Chapitre 5

Fonctions de plusieurs variables

5.1 Introduction

Dans ce chapitre on va présenter les concepts fondamentaux de l'Analyse des fonctions de plusieurs variables. On va généraliser les notions de limite, dérivabilité et intégrabilité, bien connues dans le cas des fonctions d'une seule variable. Nous rechercherons dans ce chapitre une formalisation mathématique théorique de ces concepts.

5.2 Limite, continuité et dérivées partielles d'une fonction.

5.2.1 Produit scalaire, norme euclidienne et distance dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 5.1 *Si* $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *et* $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ *sont deux vecteurs de* $\mathbb{R}^n$*, on définit leur* ***produit scalaire*** *par :*

$$< X, Y >= x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n.$$

Définition 5.2 *On appelle* ***norme euclidienne*** *de* X *(ou longueur de* X*)*

$$||X|| =< X, X >^{\frac{1}{2}}= \left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

et on appelle la distance entre deux vecteurs

$$d(X, Y) = ||X - Y||.$$

Théorème 5.1 *La norme vérifie :*

1) $||X|| = 0$ *si et seulement si* $X = 0$.

2) $||X|| > 0$ *si et seulement si* $X \neq 0$.

3) $||\lambda X|| = |\lambda| . ||X||$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

4) $||X + Y|| \leq ||X|| + ||Y||$ *(inégalité triangulaire).*

Propriété :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \forall Y \in \mathbb{R}^n \quad |\|X\| - \|Y\|| \leq \|X\| + \|Y\|.$$

Normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$:

Les trois normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$ définies pour $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ sont :
1) $\|X\|_\infty = \sup\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\}$.
2) $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.
3) $\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

Définition 5.3 *X et Y de $\mathbb{R}^n$ sont dits orthogonaux lorsque :*

$$< X, Y >= 0.$$

Définition 5.4 *Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$.*

$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - a\| < r\}$ *: est appelé la boule ouverte de centre a et de rayon r.*

$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - a\| \leq r\}$ *: est appelé la boule fermée de centre a et de rayon r.*

$S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - a\| = r\}$ *: est appelé la sphère de centre a et de rayon r.*

On dit qu'une partie D de $\mathbb{R}^n$ est bornée si : $\forall X$,$Y \in D$, l'ensemble des réels $\|X - Y\|$ est borné.

Remarque 5.1 *Dans le cas où $a = 0 \in \mathbb{R}^n$ et $r = 1$ on a ce qu'on appelle les boules ou sphères unités.*

5.2.2 Fonctions de plusieurs variables

Définition 5.5 *Une fonction f définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, s'appelle fonction de n variables.*

$$\begin{array}{rcl} f: \quad D \subset \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}, \\ (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto & z = f(x_1, x_2, ..., x_n), \end{array}$$

où D est l'ensemble de définition de f.

$\{f(x)/x \in D\}$ *est appelé l'image de f.*

$\{(x, f(x))/x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *est appelé graphe de f.*

Exemple 5.2 *La fonction f suivante :*

$$\begin{array}{rcl} f: \quad \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) = \dfrac{x^3 + xy + y^2 + 2}{1 + x^2 + y^2} \end{array}$$

est définie sur $D = \mathbb{R}^2$.

Exemple 5.3 *La fonction g suivante :*

$$\begin{array}{llll} g: & D \subset \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ (x,y) & & \mapsto & g(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}, \end{array}$$

est définie sur le disque $D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Définition 5.6 *Soit f une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $A = (a_1, a_2) \in D$. On appelle fonctions partielles associées à f au point A les fonctions :*

$$x_1 \longmapsto f(x_1, a_2) \text{ et } x_2 \longmapsto f(a_1, x_2)$$

définies sur un intervalles ouvert contenant respectivement a_1 et a_2.

Remarque 5.2 *Pour simplifier, les énoncés seront donnés dans le cas de deux variables.*

(les notions se généralisent sans difficultés aux espaces de dimensions supérieures à deux).

Limites d'une fonction

Définissons la notion d'une limite d'une fonction $f(x,y)$ de deux variables. Supposons que la fonction est définie en tout point $M(x,y)$ suffisamment proche de $M_0(a,b)$.

Définition 5.7 *Soient*

$$\begin{array}{llll} f: & D_f \subset \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ (x,y) & & \mapsto & z = f(x,y), \end{array}$$

où D_f est l'ensemble de définition de f et $M_0(x_0, y_0) \in D_f$.

On dit que f admet la limite L quand $M(x,y)$ tend vers $M_0(x_0,y_0)$, si $f(x,y)$ est aussi voisin que l'on veut de L dès que le point M est dans un voisinage convenable de M_0. On écrit :

$$\lim_{x\to x_0, y \to y_0} f(x,y) = L \text{ ou } \lim_{M \to M_0} f(x,y) = L,$$

si pour tout ϵ positif donné il existe un δ positif tel que :

$$|f(x,y) - L| < \epsilon \text{ si } \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta.$$

Remarque 5.3 *Les propriétés des limites des fonctions de plusieurs variables sont les mêmes que celles des limites des fonctions d'une variable pour les sommes, produits, quotients et composées.*

Fonction continue

Définition 5.8 *Soient*

$$\begin{array}{llll} f: & D_f \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & z = f(x,y), \end{array}$$

où D_f l'ensemble de définition de f et $M_0(x_0,y_0) \in D_f$.

On dit que la fonction f est continue au point $M_0(x_0,y_0)$ si

$$\lim_{x \to x_0, y \to y_0} f(x,y) = f(x_0,y_0) \text{ ou } \lim_{M \to M_0} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

On dit que la fonction f est continue sur D_f si f est continue en tout point de D_f.

Si f est continue sur D_f, alors les fonctions partielles associées à f en un point sont continues sur D_f.

Exemple 5.4 *Soit la fonction suivante :*

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = x + y. \end{array}$$

On a : $D_f = \mathbb{R}^2$ et f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$ car :

$$\begin{array}{rcl} |f(x,y) - f(x_0,y_0)| & = & |x + y - x_0 - y_0| \\ & = & |(x - x_0) + (y - y_0)| \\ & \leq & |x - x_0| + |y - y_0| \end{array}$$

$|x - x_0|$ tend vers 0 dès que x tend vers x_0 et $|y - y_0|$ tend vers 0 dès que y tend vers y_0.

Exemple 5.5 *Soit la fonction suivante :*

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z) = \dfrac{(1 + x^2 + z^2 + y)\sin y}{x^2 + xz + y}. \end{array}$$

On a :

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x \to 0, y \to 0, z \to 0} f(x,y,z) & = & \lim\limits_{x \to 0, y \to 0, z \to 0} \left(\dfrac{(1 + x^2 + z^2 + y)\sin y}{x^2 + xz + y} \right) \\ & = & \lim\limits_{y \to 0} \left(\dfrac{\sin y}{y} \right) = 1 \end{array}$$

Opérations :

Soient f et g deux fonctions continues en $M_0\left(x_0, y_0\right)$ de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a :

$f+g$, $f\,g$, λf , $\frac{f}{g}$ (si $g\left(x_0, y_0\right) \neq 0$) sont continues.

De même la composée de fonctions continues est continue.

5.2.3 Dérivées partielles

Définition 5.9 *Soient*

$$\begin{array}{rlll} f: & D_f \subset \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ & (x, y) & \mapsto & z=f(x, y), \end{array}$$

une fonction de deux variables x, y où D_f est l'ensemble de définition de f et $M_0\left(x_0, y_0\right) \in D_f$.

Supposons la fonction partielle $f_x : x \mapsto f\left(x, y_0\right)$ définie sur un voisinage de x_0

Si f_x admet une dérivée au point x_0, on dit que cette dérivée est la "dérivée partielle" de f par rapport à x au point $\left(x_0, y_0\right)$. On note $f_x^{\prime}$ ou $\frac{\partial f}{\partial x}$ cette dérivée et l'on a :

$$f_x^{\prime}\left(x_0, y_0\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0\right)=\lim _{x \rightarrow x_0} \frac{f\left(x, y_0\right)-f\left(x_0, y_0\right)}{x-x_0}.$$

De même, la dérivée de la fonction f_y est la dérivée partielle de f par rapport à y au point $\left(x_0, y_0\right)$, et on la note :

$$f_y^{\prime}\left(x_0, y_0\right)=\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0\right)=\lim _{y \rightarrow y_0} \frac{f\left(x_0, y\right)-f\left(x_0, y_0\right)}{y-y_0}.$$

Si $f_x^{\prime}$ et $f_y^{\prime}$ existent au point $\left(x_0, y_0\right)$, on dit que f est dérivable au point $\left(x_0, y_0\right)$.

On dit que f est de classe C^1 sur D_f si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur D_f.

Définition 5.10 *Soient*

$$\begin{array}{rlll} f: & D_f \subset \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ & (x, y) & \rightarrow & z=f(x, y), \end{array}$$

une fonction des deux variables x, y où D_f est l'ensemble de définition de f et $M_0\left(x_0, y_0\right) \in D_f$.

On appelle gradient de f en $\left(x_0, y_0\right)$, le vecteur noté

$$\nabla f\left(x_0, y_0\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0\right), \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0\right)\right).$$

Exemple 5.6 *Soit*

$$\begin{array}{lll} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = x^3 + xy^2 + y - 3, \end{array}$$

une fonction de deux variables x, y.

Pour déterminer une dérivée partielle de f, il suffit de dériver l'expression de f par rapport à la variable considérée, les autres étant considérées comme des constantes.

$$\begin{array}{lllllll} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 3x^2 + y^2 & , & \frac{\partial f}{\partial x}(4,5) & = & 73. \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 2xy + 1 & , & \frac{\partial f}{\partial y}(4,5) & = & 41. \end{array}$$

Exemple 5.7 *Soit*

$$\begin{array}{llll} g: & \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & g(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2+y^2} \end{array}$$

une fonction de deux variables x, y.

$$\begin{array}{lllllll} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & = & \frac{-x^2+y^2+2xy}{(x^2+y^2)^2} & , & \frac{\partial g}{\partial x}(1,-1) & = & \frac{-1}{2}. \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) & = & \frac{-x^2+y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} & , & \frac{\partial g}{\partial y}(1,-1) & = & \frac{1}{2}. \end{array}$$

5.2.4 Dérivées successives

Définition 5.11 *On définit ensuite les dérivées partielles secondes, si elles existent par dérivation des dérivées premières, on les note :*

$$f''_{x_i x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f'_{x_j}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f.$$

Dans le cas de deux variables x, y on a :

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & = & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) & = & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & = & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & = & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y). \end{array}$$

De façon analogue, on peut définir les dérivées partielles d'ordre supérieur à 2 par récurrence.

On dit que f est de classe C^k sur D_f si les dérivées partielles d'ordre k sont continues sur D_f.

On dit que f est de classe C^∞ sur D_f si les dérivées partielles de tous ordres existent et sont continues sur D_f.

Théorème 5.8 ***(Théorème de Schwarz)***

Si f admet dans un voisinage de (x_0, y_0) des dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ continues, alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y).$$

Exemple 5.9 *Soit*

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ (x,y) & & \mapsto & f(x,y) = x^4y^2, \end{array}$$

une fonction de deux variables x, y.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}(4x^3y^2) = 12x^2y^2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}(2x^4y) = 2x^4, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}(2x^4y) = 8x^3y, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}(4x^3y^2) = 8x^3y. \end{aligned}$$

5.3 Différentiabilité

Définition 5.12 *Soit*

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ (x,y) & & \mapsto & f(x,y), \end{array}$$

une fonction de deux variables x, y.

On dit que f est différentiable au point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, si il existe deux constantes réelles α, λ telles que :

$$\begin{aligned} f(a+h_1, b+h_2) - f(a,b) &= \alpha h_1 + \lambda h_2 + ||(h_1,h_2)||\, \epsilon(h_1,h_2), \\ \text{avec} \lim_{||(h_1,h_2)|| \to 0} \epsilon(h_1,h_2) &= 0. \end{aligned}$$

Exemple 5.10 *Soit*

$$\begin{array}{lll} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}, \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) = x^4 + 3x^2 y, \end{array}$$

une fonction de deux variables x, y.

Plaçons nous au point $(1,-1)$.

$$\begin{aligned} f(1+h_1,-1+h_2) - f(1,-1) &= (1+h_1)^4 + 3(1+h_1)^2(-1+h_2) - (-2) \\ &= -2h_1 + 3h_2 + \left(6h_1h_2 + 3h_1^2 + 4h_1^3 + h_1^4 + 3h_1^2h_2\right) \\ &= -2h_1 + 3h_2 + \|(h_1,h_2)\| \, \epsilon(h_1,h_2). \end{aligned}$$

On a : $\lim\limits_{\|(h_1,h_2)\|\to 0} \epsilon(h_1,h_2) = 0$ *où* $\epsilon(h_1,h_2) = \frac{6h_1h_2+3h_1^2+4h_1^3+h_1^4+3h_1^2h_2}{\|(h_1,h_2)\|}$.

Donc : f est différentiable au point $(1,-1)$ et sa différentielle est l'application linéaire :

$$df(1,-1) : (h_1,h_2) \rightarrow -2h_1 + 3h_2$$

On remarque que :

$$\begin{array}{llllll} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &=& 4x^3 + 6xy & , & \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-1) &=& -2. \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &=& 3x^2 & , & \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,-1) &=& 3, \end{array}$$

ce qui correspond aux coefficients trouvés précédemment.

Remarque 5.4 *On note la différentielle de f de la manière suivante :*

$$df : (h_1,h_2) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f}{\partial y} h_2.$$

On note aussi plus simplement :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

5.4 Intégrales doubles

Dans cette section, on donnera uniquement quelques éléments relatifs aux calculs d'intégrales double et triple.