

2.1 Introduction

Les systèmes linéaires interviennent à travers leurs applications dans de nombreux contextes, car ils forment la base calculatoire de l'algèbre linéaire. Ils permettent également de traiter une bonne partie de la théorie de l'algèbre linéaire en dimension finie. C'est pourquoi ce cours commence avec une étude des équations linéaires et de leur résolution. Le but de ce chapitre est de résoudre des systèmes linéaires.

2.2 Généralités

Dans tout le chapitre, $\mathbb{k}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 2.1 On appelle système linéaire de n équations à m inconnues et à coefficients dans $\mathbb{k}$, tout système de la forme :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n, \end{cases}$$

les $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ sont appelés les coefficients du système (S) .

La matrice M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

est appelée matrice du système (S) .

Le vecteur $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ est appelé le second membre du système (S) .

Le vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ est appelé le vecteur inconnu du système (S) .

Alors le système (S) s'écrit sous la forme matricielle suivante $MX = B$ c'est à dire

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Système homogène associé :

A un système (S) on associe un système homogène (S_h) en annulant les seconds membres des équations de système (S) .

$$(S_h) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = 0, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = 0, \end{cases}$$

alors le système homogène (S_h) s'écrit sous la forme matricielle suivante $MX = 0$.

Un tel système homogène (S_h) possède au moins la solution $(0, 0, \dots, 0)$ dite solution triviale.

Définition 2.2 Une solutions du système (S) est une liste de m nombre réels $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ (un m -uplet) tels que si l'on substitue $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ dans le système (S) , on obtient une égalité.

On appelle l'ensemble des solutions du système (S) l'ensemble de tous ces m -uplet vérifiant (S) .

Définition 2.3 On dit que deux systèmes linéaires sont équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.

Théorème 2.1 Un système d'équations linéaires n'a soit aucune solution, soit a une seule solution, soit a une infinité de solutions.

2.3 Les méthodes de résolution d'un système linéaire

2.3.1 Systèmes de Cramer

Le système (S) est dit de Cramer si et seulement si M est carrée et $\det M \neq 0$. Dans ce cas, (S) admet une unique solution donnée par :

$$x_i = \frac{\det M_{x_i}}{\det M} \text{ pour } 1 \leq i \leq n,$$

où M_{x_i} est la matrice obtenue de M en remplaçant la colonne i de M par :

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.2 Résoudre le système linéaire suivant :

$$(S) \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 7, \\ 2x_1 - x_2 = 9. \end{cases}$$

On a :

$$(S) \iff \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix},$$

$\det M = -13 \neq 0$, donc (S) est un système de Cramer et admet une solution unique donnée par :

$$x_1 = \frac{\det M_{x_1}}{\det M} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & -1 \end{vmatrix}}{-13} = 4,$$

$$x_2 = \frac{\det M_{x_2}}{\det M} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}}{-13} = -1.$$

Alors la solution unique de système (S) est $(x_1, x_2) = (4, -1)$.

Exemple 2.3 Résoudre le système linéaire suivant :

$$(S) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = -1, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

On a :

$$(S) \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$\det M = 12 \neq 0$, donc (S) est un système de Cramer et admet une solution unique donnée par :

$$x_1 = \frac{\det M_{x_1}}{\det M} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{3}{2},$$

$$x_2 = \frac{\det M_{x_2}}{\det M} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{12} = 1,$$

$$x_3 = \frac{\det M_{x_3}}{\det M} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{1}{2}.$$

Alors la solution unique de système (S) est $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$.

2.3.2 Résolution par la méthode de la matrice inverse

Considérons le système linéaire sous la forme matricielle $MX = B$ où M est une matrice carrée, dans le cas où M est inversible, nous pouvons utiliser la matrice pour trouver la solution du système linéaire.

Proposition 2.1 *Si la matrice M est inversible, alors la solution du système $MX = B$ est unique et est donnée par :*

$$X = M^{-1}B.$$

Exemple 2.4 *Résoudre le système linéaire suivant :*

$$(S) \begin{cases} x - 2y + 3z = 3, \\ -x + y - 2z = 2, \\ x + y + 3z = 1. \end{cases}$$

Le système (S) s'écrit sous la forme matricielle $MX = B$, avec

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

$\det M = -3 \neq 0$, donc M est inversible d'où le système admet une solution unique donnée par :

$$X = M^{-1}B \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & -3 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{34}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{13}{3} \end{pmatrix}.$$

Donc, $(x, y, z) = \left(-\frac{34}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{13}{3}\right)$ est la solution unique du système.

2.3.3 Résolution par la méthode de Gauss

Forme échelonnée :

Définition 2.4 Nous dirons qu'un système est échelonné s'il se présente sous la forme suivante.

$$(S_E) \left\{ \begin{array}{l} p_1 y_1 + c_{12} y_2 + \dots + c_{1j} y_j + \dots + c_{1m} y_m = d_1, \\ 0 + p_1 y_2 + \dots + c_{2j} y_j + \dots + c_{2m} y_m = d_2, \\ \dots \\ 0 + \dots + 0 + p_r y_r + \dots + c_{rm} y_m = d_r, \\ 0 + \dots + 0 = d_{r+1}, \\ \dots \\ 0 + \dots + 0 = d_n. \end{array} \right.$$

Transformations équivalentes :

L'idée de la méthode de Gauss est de transformer par étapes, le système à résoudre en des systèmes plus simples, tous équivalents au système initial, jusqu'à un système dit « résolu », sur lequel on lit directement la solution. Pour un système linéaire, « plus simple » signifie « avec moins de termes », ou encore

« plus de coefficients nuls » . Pour annuler des termes, la méthode de Gauss combine les trois transformations suivantes changent tout système en un système équivalent :

- échanger deux lignes,
- multiplier une ligne par un réel non nul,
- ajouter une ligne à une autre ligne.

Mettre un système (S) sous forme échelonnée, c'est passer de (S) à (S_E) par les transformations précédentes, et une permutation éventuelle des coordonnées, de sorte que

1. les inconnues $(y_1, \dots, y_n)$ de (S_E) sont celles de (S) , mais dans un ordre qui peut être différent,
2. les coefficients $p_1, \dots, p_r$ sont tous non nuls.

Les coefficients $p_1, \dots, p_r$, que l'on appelle les pivots, jouent un rôle important. Pour arriver à la forme échelonnée avec des pivots non nuls on peut être amené au cours des calculs, à

1. permuter des variables.
2. permuter des équations. Le principe général consiste à utiliser une équation à pivot non nul pour annuler les termes au-dessous du pivot dans les équations suivantes du système. Décrire formellement l'algorithme dans le cas général, conduirait à des notations compliquées. Le mieux est de comprendre son fonctionnement sur des exemples. Dans ce qui suit nous utilisons la notation algorithmique, pour « prend la valeur ». A part les permutations éventuelles de variables ou d'équations, les seules transformations utilisées sont du type $L_i \leftarrow L_i + aL_k$, soit « la ligne i est remplacée par la somme de la ligne i , et de la ligne k multipliée par a ». Cette transformation change le système en un système équivalent.

Exemple 2.5 Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 2, \\ x - y + z = 3, \\ -x - 2y - 3z = 1. \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{l} L_1 \rightarrow \\ L_2 \rightarrow \\ L_3 \rightarrow \end{array} \begin{cases} 2x - y + 3z = 2, \\ x - y + z = 3, \\ -x - 2y - 3z = 1. \end{cases} \iff \begin{array}{l} L_1 \rightarrow \\ L_1 - 2L_2 \rightarrow \\ L_3 \rightarrow \end{array} \begin{cases} 2x - y + 3z = 2, \\ 0 + y + z = -4, \\ -x - 2y - 3z = 1. \end{cases} \\
\\
& \iff \begin{array}{l} L_1 \rightarrow \\ L_2 \rightarrow \\ 2L_3 + L_1 \rightarrow \end{array} \begin{cases} 2x - y + 3z = 2, \\ 0 + y + z = -4, \\ 0 - 5y - 3z = 4. \end{cases} \iff \begin{array}{l} L_1 \rightarrow \\ L_2 \rightarrow \\ L_3 + 5L_2 \rightarrow \end{array} \begin{cases} 2x - y + 3z = 2, \\ 0 + y + z = -4, \\ 0 + 0 + 2z = -16. \end{cases} \\
\\
& \iff \begin{array}{l} L_1 \rightarrow \\ L_2 \rightarrow \\ \frac{1}{2}L_3 \rightarrow \end{array} \begin{cases} 2x - y + 3z = 2, \\ 0 + y + z = -4, \\ 0 + 0 + z = -8. \end{cases} \iff \begin{array}{l} L_1 \rightarrow \\ L_2 - L_3 \rightarrow \\ L_3 \rightarrow \end{array} \begin{cases} 2x - y + 3z = 2, \\ 0 + y + 0 = 4, \\ 0 + 0 + z = -8. \end{cases} \\
\\
& \iff \begin{array}{l} L_1 + L_2 - 3L_3 \rightarrow \\ L_2 \rightarrow \\ L_3 \rightarrow \end{array} \begin{cases} 2x = 30, \\ 0 + y + 0 = 4, \\ 0 + 0 + z = -8. \end{cases} \iff \begin{array}{l} \frac{1}{2}L_1 \rightarrow \\ L_2 \rightarrow \\ L_3 \rightarrow \end{array} \begin{cases} x + 0 + 0 = 15, \\ 0 + y + 0 = 4, \\ 0 + 0 + z = -8. \end{cases}
\end{aligned}$$

Le système est maintenant sous la forme résolue, $(15, 4, -8)$ est la solution unique du système.

2.4 Exercices

Exercice 2.6 Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1) \begin{cases} 2x - y = 2, \\ x - 3y = 1. \end{cases}, (S_2) \begin{cases} 2x + 2y - z = 5, \\ 4x + 3y - z = 8, \\ 8x + 5y - 3z = 16. \end{cases}$$

Exercice 2.7 Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1) \begin{cases} 2x - y = 2, \\ 6x - 3y = 1. \end{cases}, (S_2) \begin{cases} 2x + 2y - z = 1, \\ 2x - y + 3z = 2, \\ 4x + y + 2z = 5. \end{cases}$$

Exercice 2.8 Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1) \begin{cases} -3x + y = 6, \\ x - \frac{1}{3}y = -2. \end{cases}, (S_2) \begin{cases} x + y - z = 1, \\ 4x - y + 3z = -1, \\ 3x - 2y + 4z = -2. \end{cases}$$

Exercice 2.9 *Résoudre le système suivant :*

$$(S) \begin{cases} 3x - 5y + 2z = 7, \\ 3x - 9y + 4z = 9, \\ 5x - 8y + 2z = 8, \\ 8x - 7y + z = 12. \end{cases}$$

Exercice 2.10 *Soit λ un paramètre réel .*

Résoudre le système suivant :

$$(S_\lambda) \begin{cases} x + y + \lambda z = \lambda, \\ x + \lambda y - z = 1, \\ x + y - z = 1. \end{cases}$$