Analyse II

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année Ingénieur (ST-TM)
Année universitaire 2024–2025

✠– Série numéro 1 : Intégrales et calcul des primitives–✠

Exercice 1 :
a. Calculer les primitives et les intégrales suivantes :

$\int (x-2)^2\,dx$, $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$, $\int \frac{2x+\sqrt{x}}{x}\,dx$, $\int_5^2 4x^3(x^4-\frac{1}{2})\,dx$, $\int \frac{x^3}{(x^4+5)^2}\,dx$.

b. En Integrant par partie calculer :

$\int_1^2 \ln x\,dx$, $\int x^2 e^x\,dx$, $\int 2e^x \cos x\,dx$, $\int x^n \ln x\,dx$, $\int_0^1 xe^{-x}\,dx$.

Exercice 2 : En effectuant un changement de variable, calculer :
$I_1 = \int \frac{e^{2x+1}}{2+5e^{2x+1}}\,dx$, $I_2 = \int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx$, $I_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{(1+\sin x)^4}\,dx$.

Exercice 3 : Intégrer les fractions rationnelles suivantes :
$I_1 = \int \frac{1}{x+1}\,dx$, $I_2 = \int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx$, $I_3 = \int \frac{2x+3}{x^2-5x+6}\,dx$.

Exercice 4 : Calculer les primitives suivantes :
$\int \cos^6 x \sin^3 x dx$, $\int \cos 4x \sin 3x dx$, $\int \cos^2 x \sin^2 x dx$, $\int \cos^7 x \sin^2 x dx$.

Exercice 5 : Posons :

$$I = \int e^{2x} \cos^2 x dx \quad \text{et} \quad J = \int e^{2x} \sin^2 x dx.$$

1. Calculer $I+J$.
2. En appliquant la méthode d'intégration par parties deux fois, calculer $I-J$.
3. En déduire la valeur de I et J.

Indication : $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

Analyse II

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année Ingénieur (ST-TM)
Année universitaire 2024–2025

✠– Série de TD numéro 2–✠

Exercice 1 :
Calculer les primitives suivantes :
$\int \frac{3x+2}{x^2+x+1}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$, $\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx$, $\int (x^2+x+1)e^{-x}\,dx$.

Exercice 2 : Résoudre les équations différentielles du premier ordre suivantes :
1. $(1+x^2)^2\frac{dy}{dx}+2x+2xy^2=0$, 2. $(x^2+y^2)dx-xydy=0$, avec $y(1)=2$,
3. $x^3+2y^2y'=0$, 4. $x^2y'-e^y=0$, 5. $(x^2+1)y'+xy=0$.

Exercice 3 : Résoudre les équations différentielles suivantes en trouvant une solution particulière par la méthode de variation de la constante :
1. $y'-4y=3$, $\forall x\in\mathbb{R}$ 2. $y'+y=2e^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$, 3. $y'+y=x^2$
4. $y'-\left(2x-\frac{1}{x}\right)y=1$, $x\in]0,+\infty[$ 5. $x(1+\ln^2 x)y'+2(\ln x)y=1$, $x\in]0,+\infty[$

Exercice 4 : Résoudre les équations différentielles non linéaires du premier ordre suivantes :
1. $xy'+6y-3xy^4=0$, 2. $y'=x^2+1-2xy+y^2$, ($y_1=x$ est une solution particulière).

Exercice 5 : Résoudre les équations différentielles linéaires homogènes du second ordre suivantes :
1. $y''-3y'+2y=0$, 2. $y''+2y'+y=0$, 3. $y''-2y'+2y=0$,
4. $y''-2\alpha y'+y=0$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Exercice 6 : Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :
1. $y''-y=x^2+x+1$, 2. $y''-2y'-8y=e^x$, 3. $y''-2y'=\sin x$,
4. $y''-4y'+3y=(2x+1)e^{-x}$; $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

Analyse II

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année Ingénieur (ST-TM)
Année universitaire 2024–2025

✠– Série de TD numéro 3–✠

Exercice 1 : Déterminer le domaine de définition pour chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x,y)=\ln(x+y)$ **2.** $f(x,y)=\dfrac{y-2x^2}{x^2+y^2-3}$ **3.** $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2-y^2}$

4. $f(x,y)=\sqrt{\ln(\exp(x)-1)}$ **5.** $f(x,y)=\dfrac{1}{\cos(x-y)}$.

Exercice 2 : Déterminer le domaine de définition et tracer les courbes de niveau pour les valeurs k indiquées pour les fonctions suivantes :

1. $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}, \quad k=0,\dfrac{1}{2}$ **2.** $f(x,y)=x^2-y^2, \quad k=0,1$

3. $f(x,y)=\dfrac{x^2+y}{x+y^2}, \quad k=0,1$ **4.** $f(x,y)=\dfrac{xy-x+y}{xy}, \quad k=0,1$

5. $f(x,y)=y^2, \quad k=-1,1$ **6.** $f(x,y)=\dfrac{x^4+y^4}{8-x^2y^2}, \quad k=2$

Exercice 3 : Étudier l'existence et la valeur éventuelle de la limite en (0, 0) pour les fonctions suivantes :

1. $f(x,y)=\dfrac{e^{xy}-1}{x^2+y^2}$ **2.** $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ **3.** $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^4}$

4. $f(x,y)=\dfrac{x^3y^2}{x^6+y^4}$ **5.** $f(x,y)=\dfrac{(x^2-y)(y^2-x)}{x+y}$ **6.** $f(x,y)=\dfrac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$

Exercice 4 : Étudier la continuité des fonctions suivantes :

1. $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2+1}$ **2.** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^ny^m}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$

3. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\ln\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x+y}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$ **4.** $f(x,y)=\begin{cases}e^{x-y}, & \text{si } y\geq x;\\ 0, & \text{si } y<x.\end{cases}$

Exercice 5 : Considérons la fonction f définie par

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{(x^2+y^2)^n}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.
2. Trouver une condition sur n pour que f soit continue au point (0, 0).
3. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f au point $(x,y)\neq(0,0)$.
4. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f au point (0, 0).

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie

Analyse II

Première année Ingénieur (ST-TM)
Année universitaire 2024–2025

✠– Série de TD numéro 4–✠

Exercice 1 : Justifier dans $\mathbb{R}^2$ l'existence des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ des fonctions suivantes, et les calculer :

1. $f(x,y) = e^x \sin y$ **2.** $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin(xy)$ **3.** $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$
4. $f(x,y) = x^2y + 3xy^2$ **5.** $f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1)$.

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f au point (0, 0).
2. Déterminer si f admet des dérivées partielles du premier ordre en (0, 0). Si oui les calculer.
3. Étudier la continuité des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ au point (0, 0).
4. En déduire si la fonction f est différentiable en (0, 0).

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f en $(0,0)$.
2. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
3. Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont-elles continues en $(0,0)$? f est-elle de classe C^1 ?
4. La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?
5. Calculer le gradient et la matrice Hessienne de f en $(1,1)$.
6. Exprimer la différentielle $df_{(a,b)}$ pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = y - 4x^2 + 4xy - y^2$$

1. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. Déduire le gradient et la matrice Hessienne de f en tout point de $\mathbb{R}^2$.