

Analyse II

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année Ingénieur (ST-TM)
Année universitaire 2024–2025

✠– Corrigé de la Série numéro 1 : Intégrales et calcul des primitives–✠

Exercice 1 :

a. Calcul des primitives

- $\int (x-2)^2 dx$, le développement de $(x-2)^2$ donne $x^2 - 4x + 4$, alors $\int (x^2 - 4x + 4) dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x + C$, $C \in \mathbb{R}$. On peut aussi calculer $\int u^2 du$ avec $u = (x-2)^2$ et on obtient $\int u^2 du = u^3/3 + C = (x-2)^3/3 + C$, $C \in \mathbb{R}$.
- $\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx = \ln|x^2+1| + C = \ln(x^2+1) + C$, $C \in \mathbb{R}$. Si on pose $u = x^2 + 1$, alors $du = 2x dx$. Donc $\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln(x^2+1) + C$, $C \in \mathbb{R}$.
- $\int \frac{2x+\sqrt{x}}{x} dx = \int (\frac{2x}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}) dx = 2 \int dx + \int \frac{\sqrt{x}}{x} dx = 2 \int dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \int dx + 2 \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2(x + \sqrt{x}) + C$, $C \in \mathbb{R}$.
- $\int_5^2 4x^3(x^4 - \frac{1}{2}) dx = - \int_2^5 4x^3(x^4 - \frac{1}{2}) dx = - \frac{(x^4 - \frac{1}{2})^2}{2} \Big|_2^5 = -194880$. Si on pose $u = (x^4 - \frac{1}{2})$, alors $du = 4x^3 dx$. Donc $- \int_{15.5}^{624.5} u du = - \frac{u^2}{2} \Big|_{15.5}^{624.5} = -194880$.
- $\int \frac{x^3}{(x^4+5)^2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{(x^4+5)^2} dx$. Si on pose $u = x^4 + 5$, on obtient $\frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{(x^4+5)^2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{4u} + C = -\frac{1}{4(x^4+5)} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

b. Intégration par parties

- $\int_1^2 \ln x dx$. Posons $u = \ln x$, alors $du = \frac{dx}{x}$, et $dv = dx$, alors $v = x$. Donc $\int \ln x dx = \int u dv = uv - \int v du = x \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 dx = (x \ln x - x) \Big|_1^2 = 0.386$.
 - $\int x^2 e^x dx$. Posons $u = x^2$, alors $du = 2x dx$, et $dv = e^x dx$, alors $v = e^x$. Donc $\int x^2 e^x dx = \int u dv = uv - \int v du = x^2 e^x - 2 \int x e^x$. Pour le calcul de $\int x e^x$ on pose $u = x$, alors $du = dx$, et $dv = e^x dx$, alors $v = e^x$. Donc $\int x e^x dx = \int u dv = uv - \int v du = x e^x - \int e^x dx$, on obtient alors $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x-1)e^x + C = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$, $C \in \mathbb{R}$.
 - $\int 2e^x \cos x dx$. Posons $u = 2e^x$, alors $du = 2e^x dx$, et $dv = \cos x dx$, alors $v = \sin x$. Donc $\int 2e^x \cos x dx = \int u dv = uv - \int v du = 2e^x \sin x - \int 2e^x \sin x dx$. Maintenant on va calculer $\int 2e^x \sin x dx$ en posant $u = 2e^x$, alors $du = 2e^x dx$, et $dv = \sin x dx$, alors $v = -\cos x$. Donc $\int 2e^x \sin x dx = \int u dv = uv - \int v du = -2e^x \cos x + \int 2e^x \cos x dx$. On obtient alors $\int 2e^x \cos x dx = 2e^x \sin x + 2e^x \cos x - \int 2e^x \cos x dx$, donc $\int 2e^x \cos x dx = e^x(\sin x + \cos x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.
 - $\int x^n \ln x dx$. Posons $u = \ln x$, alors $du = \frac{dx}{x}$ et $dv = x^n dx$, alors $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Donc $\int x^n \ln x dx = \int u dv = uv - \int v du = \frac{x^{n+1} \ln x}{n+1} - \int \frac{x^{n+1}}{x(n+1)} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln x - \frac{1}{n+1}) + C$, $C \in \mathbb{R}$.
 - $\int_0^1 x e^{-x} dx$. Posons $u = x$, alors $du = dx$ et $dv = e^{-x} dx$, alors $v = -e^{-x}$. Donc $\int_0^1 x e^{-x} dx = -x e^{-x} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-x} dx = -(x+1)e^{-x} \Big|_0^1 = 1 - 2e^{-1} = 0.264$.
-

Exercice 2 :

Intégration par changement de variable

- $I_1 = \int \frac{e^{2x+1}}{2+5e^{2x+1}} dx$. Posons $t = e^{2x+1} \Rightarrow dt = 2e^{2x+1} dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2e^{2x+1}} \Rightarrow dx = \frac{dt}{2t}$, donc $I_1 = \int \frac{t dt}{2t(2+5t)} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{2+5t} = \frac{1}{10} \int \frac{5 dt}{2+5t} = \frac{1}{10} \ln |2+5t| + C = \frac{1}{10} \ln |2+5e^{2x+1}| + C, C \in \mathbb{R}$.
 - $I_2 = \int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$. Posons $t = \sqrt{x-1}$, alors $x = t^2 + 1$ et $dx = 2t dt$. Donc $I_2 = \int \frac{t 2t dt}{t^2+1} = 2 \int \frac{t^2 dt}{t^2+1} = 2 \int \frac{(t^2+1-1) dt}{t^2+1} = \int 2 dt - 2 \int \frac{dt}{t^2+1} = 2t - 2 \arctan(t) + C = 2\sqrt{x-1} - 2 \arctan \sqrt{x-1} + C, C \in \mathbb{R}$.
 - $I_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{(1+\sin x)^4} dx$. Posons $t = 1 + \sin x$, alors $dt = \cos x$. Pour $x = 0, t = 1 + \sin 0 = 1$ et pour $x = \frac{\pi}{2}, t = 1 + \sin \frac{\pi}{2} = 2$. Donc $I_3 = \int_1^2 \frac{dt}{t^4} = \int_1^2 t^{-4} du = -\frac{1}{3t^3} \Big|_1^2 = \frac{7}{24}$.
-

Exercice 3 :

Intégration des fractions rationnelles

- $I_1 = \int \frac{1}{x+1} dx = \ln |x+1| + C, C \in \mathbb{R}$.
 - $I_2 = \int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx$. On écrit $\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}$ sous la forme suivante : $\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$, avec A et B sont des valeurs à déterminer.
 1. $\frac{2x+3}{x+5} = A + \frac{B(x-2)}{x+5}$. Si $x = -5$ on obtient $B = \frac{2(-5)+3}{-5-2} = 1$.
 2. $\frac{2x+3}{x-2} = \frac{A(x+5)}{x-2} + B$. Si $x = 2$ on obtient $A = \frac{2(2)+3}{2-5} = -1$.
Donc $I_2 = \int \frac{-1}{x-2} + \int \frac{dx}{x+5} = \ln |x+5| - \ln |x-2| + C = \ln |(x+5)/(x-2)| + C, C \in \mathbb{R}$.
 - $I_3 = \int \frac{2x+3}{x^2-5x+6} dx$. On a $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$. Donc on écrit $\frac{2x+3}{(x-2)(x-3)}$ sous la forme suivante : $\frac{2x+3}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$, avec A et B sont des valeurs à déterminer.
 1. $\frac{2x+3}{x-3} = A + \frac{B(x-2)}{x-3}$. Si $x = 3$ on obtient $A = \frac{2(3)+3}{3-2} = 9$.
 2. $\frac{2x+3}{x-2} = \frac{A(x-3)}{x-2} + B$. Si $x = 2$ on obtient $B = \frac{2(2)+3}{2-3} = -7$.
Donc $I_3 = \int \frac{-7}{x-2} + \int \frac{9}{x-3} = -7 \ln |x-2| + 9 \ln |x-3| + C, C \in \mathbb{R}$.
-

Exercice 4 :

Intégration des fonctions Trigonométriques

- $\int \cos^6 x \sin^3 x dx = \int \cos^6 x \sin x \sin^2 x dx$. Comme $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, alors $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Donc $\int \cos^6 x \sin^3 x dx = \int \cos^6 x \sin x (1 - \cos^2 x) dx$. Posons $u = \cos x$, alors $du = -\sin x$ on obtient alors $\int \cos^6 x \sin x (1 - \cos^2 x) dx = -\int u^6 (1 - u^2) du = -\int (u^6 - u^8) du = -\frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C = -\frac{\cos^7 x}{7} + \frac{\cos^9 x}{9} + C, C \in \mathbb{R}$.
- $\int \cos 4x \sin 3x dx = \int (\sin 3x)(\cos 4x) dx = \int \frac{1}{2}(\sin(3+4)x + \sin(3-4)x) dx$
 $= \int \frac{1}{2}(\sin(7)x + \sin(-x)) dx = \int \frac{1}{2}(\sin(7)x dx + \sin(-x) dx) = \frac{-\cos(7x)}{14} + \frac{\cos(-x)}{2} + C,$
 $= \frac{-\cos(7x)}{14} + \frac{\cos(x)}{2} + C, C \in \mathbb{R}$. Car la fonction cosinus est paire ($\cos(-x) = \cos x$).
- $\int \cos^2 x \sin^2 x dx$. Dans ce cas on va utiliser les deux relations suivantes :

1. $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$, alors $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2}$.

2. $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$, alors $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}$. Donc $\sin^2 x \cos^2 x$
 $= (\frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2})(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2}) = \frac{1}{4}(1 - \cos(2x))(1 + \cos(2x)) = \frac{1}{4}(1 - \cos^2(2x)) =$
 $\frac{1}{4}(1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4x))) = \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4x)) = \frac{1}{4}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4x)) = \frac{1}{8}(1 - \cos(4x))$. On
obtient alors $\int \cos^2 x \sin^2 x dx = \int \frac{1}{8}(1 - \cos(4x)) dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos(4x)) dx = \frac{1}{8}(x - \frac{1}{4}) + C$
 $= \frac{x}{8} - \frac{\sin(4x)}{32} + C, C \in \mathbb{R}$.

• $\int \cos^7 x \sin^2 x dx$. Dans ce cas on va utiliser la relation $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, puis on va
remplacer $\cos^2 x$ par $1 - \sin^2 x$ et poser $u = \sin x$, alors $du = \cos x dx$. Donc on obtient
 $\int \cos^7 x \sin^2 x dx = \int \cos^6 x \cos x \sin^2 x dx = \int (\cos^2 x)^3 \sin^2 x \cos x dx =$
 $\int (1 - \sin^2 x)^3 \sin^2 x \cos x dx = \int (1 - u^2)^3 u^2 du = \int (1 - u^2)(1 - u^2)(1 - u^2)u^2 du =$
 $\int (1 - 3u^2 + 3u^4 - u^6)u^2 du = \int (u^2 - 3u^4 + 3u^6 - u^8) du = -\frac{u^9}{9} + \frac{3u^7}{7} - \frac{3u^5}{5} + \frac{u^3}{3} + c, c \in \mathbb{R} =$
 $-\frac{\sin^9 x}{9} + \frac{3\sin^7 x}{7} - \frac{3\sin^5 x}{5} + \frac{\sin^3 x}{3} + c, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 : Posons :

$$I = \int e^{2x} \cos^2 x dx \quad \text{et} \quad J = \int e^{2x} \sin^2 x dx.$$

1. $I + J = \int e^{2x} \cos^2 x dx + \int e^{2x} \sin^2 x dx = \int (\sin^2 x + \cos^2 x) e^{2x} dx = \int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + C_1$,
 $C_1 \in \mathbb{R}$.

1. $I - J = \int e^{2x} \cos^2 x dx - \int e^{2x} \sin^2 x dx = \int (\cos^2 x - \sin^2 x) e^{2x} dx = \int \cos(2x) e^{2x} dx$. Pour
l'intégration par parties nous posons ($u = e^{2x}$, alors $du = 2e^{2x} dx$) et ($dv = \cos(2x) dx$, alors
 $v = \frac{\sin(2x)}{2}$). Donc $\int \cos(2x) e^{2x} dx = \frac{\sin(2x) e^{2x}}{2} - \int \frac{2 \sin(2x) e^{2x}}{2} dx = \frac{\sin(2x) e^{2x}}{2} - \int \sin(2x) e^{2x} dx$.
On va utiliser l'intégration par parties pour calculer $\int \sin(2x) e^{2x} dx$. posons ($u = e^{2x}$, alors
 $du = 2e^{2x} dx$) et ($dv = \sin(2x) dx$, alors $v = -\frac{\cos(2x)}{2}$). Donc $\int \sin(2x) e^{2x} dx =$
 $-\frac{\cos(2x) e^{2x}}{2} + \int \frac{2 \cos(2x) e^{2x}}{2} dx = -\frac{\cos(2x) e^{2x}}{2} + \int \cos(2x) e^{2x} dx$, donc $\int \cos(2x) e^{2x} dx =$
 $\frac{\sin(2x) e^{2x}}{2} + \frac{\cos(2x) e^{2x}}{2} - \int \cos(2x) e^{2x} dx$, alors on obtient $2 \int \cos(2x) e^{2x} dx$
 $= \frac{\sin(2x) e^{2x}}{2} + \frac{\cos(2x) e^{2x}}{2} \Rightarrow \int \cos(2x) e^{2x} dx = \frac{(\sin(2x) + \cos(2x)) e^{2x}}{4} + C_2, C_2 \in \mathbb{R}$.

3. Pour déduire I et J on va utiliser les deux relations $I + J = \frac{e^{2x}}{2} + C_1$ et $I - J$
 $= \frac{(\sin(2x) + \cos(2x)) e^{2x}}{4} + C_2$. Donc on trouve $2I = \frac{(2 + \sin(2x) + \cos(2x)) e^{2x}}{4} + C_1 + C_2 \Rightarrow$
 $I = \frac{(2 + \sin(2x) + \cos(2x)) e^{2x}}{8} + C$, avec $C = \frac{C_1 + C_2}{2}$ et $J = \frac{(2 - \sin(2x) - \cos(2x)) e^{2x}}{8} + C'$, avec
 $C' = \frac{C_1 - C_2}{2}$.

Analyse II

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année Ingénieur (ST-TM)
Année universitaire 2024–2025

✠– Corrigé de la Série de TD numéro 2 –✠

Exercice 1 : Calcul des primitives

• $\int \frac{3x+2}{x^2+x+1} dx$. Il est clair que le dénominateur $x^2 + x + 1$, n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$, car le discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$. Donc dans ce cas on va utiliser la méthode de complétion du carré comme suit : $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$.

On pose $t = x + \frac{1}{2}$, donc $dt = dx$ et $x = t - \frac{1}{2}$. En remplaçant dans l'intégrale, on obtient :

$$\int \frac{3x+2}{x^2+x+1} dx = \int \frac{3(t-\frac{1}{2})+2}{t^2+\frac{3}{4}} dt = \int \frac{3t+\frac{1}{2}}{t^2+\frac{3}{4}} dt = \int \frac{3t}{t^2+\frac{3}{4}} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}} dt.$$

$$\triangleright \int \frac{3t}{t^2+\frac{3}{4}} dt = \frac{3}{2} \int \frac{2t}{t^2+\frac{3}{4}} dt = \frac{3}{2} \ln |t^2 + \frac{3}{4}| + C_1 = \ln |x^2 + x + 1| + C_1, C_1 \in \mathbb{R}.$$

$$\triangleright \text{Pour l'intégrale } \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}} dt, \text{ on pose } a^2 = \frac{3}{4}, \text{ puis on remplace } \frac{3}{4} \text{ par sa valeur.}$$

$$\text{Donc } \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2+a^2} dt = \frac{1}{2a^2} \int \frac{1}{(\frac{t}{a})^2+1} dt = \frac{1}{2a^2} a \arctan\left(\frac{t}{a}\right) + C_2 =$$

$$\frac{1}{2a} \arctan\left(\frac{t}{a}\right) + C_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C_2, C_2 \in \mathbb{R}. \text{ Ainsi : } \int \frac{3x+2}{x^2+x+1} dx =$$

$$\ln |x^2 + x + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C, C \in \mathbb{R}.$$

• $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} dx$. Donc dans ce cas on va utiliser la méthode de complétion du carré sous la racine comme suit : $4x - x^2 = -(x^2 - 4x) = -((x-2)^2 - 4) = 4 - (x-2)^2$. Ainsi, on obtient : $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}} dx$. On effectue le changement de variable $t = x - 2$,

alors $dt = dx$. Donc l'intégrale $\int \frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}} dx$ devient : $\int \frac{1}{\sqrt{4-t^2}} dt =$

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{t}{2})^2}} dt = \frac{1}{2} (2 \arcsin(\frac{t}{2})) + C = \arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right) + C, C \in \mathbb{R}.$$

• $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$. On sait que : $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ et $\cos^4 x = \frac{1}{4}(1 + \cos 2x)^2$. Ainsi : $\sin^2 x \cos^4 x = \frac{1}{8}(1 - \cos 2x) \cdot (1 + \cos 2x)^2$. Comme $\cos^2 2x + \sin^2 2x = 1$, alors $1 - \cos^2 2x = \sin^2 2x$, donc $\sin^2 x \cos^4 x = \frac{1}{8} \sin^2 2x (1 + \cos 2x) = \frac{1}{8} \sin^2 2x + \frac{1}{8} \sin^2 2x \cos 2x$.

On sait aussi que $\sin^2(2x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2(2x)) = \frac{1}{2}(1 - \cos 4x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4x \Rightarrow \sin^2 x \cos^4 x$

$$= \frac{1}{16} - \frac{1}{16} \cos 4x + \frac{1}{8} \sin^2 2x \cos 2x \Rightarrow \int \sin^2 x \cos^4 x dx =$$

$$\int \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{16} \cos 4x + \frac{1}{8} \sin^2 2x \cos 2x \right) dx = \int \frac{1}{16} dx - \int \frac{1}{16} \cos 4x dx +$$

$$\int \frac{1}{8} \sin^2 2x \cos 2x dx = \int \frac{1}{16} dx - \int \frac{1}{16} \cos 4x dx + \int \frac{1}{16} \sin^2 2x \cdot 2 \cos 2x dx =$$

$$\frac{1}{16} \int dx - \frac{1}{16} \int \cos 4x dx + \frac{1}{16} \int \sin^2 2x \cdot 2 \cos 2x dx = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C, C \in \mathbb{R}.$$

• $\int (x^2 + x + 1)e^{-x} dx$. Dans ce cas nous allons utiliser la méthode suivante : $\int p(x) \cdot e^{\alpha x} dx = Q(x) \cdot e^{\alpha x}$, avec $\deg(p(x)) = \deg(Q(x))$. Donc dans notre cas on pose

$$\int (x^2 + x + 1) \cdot e^{-x} dx = (ax^2 + bx + c) \cdot e^{-x}, \text{ donc } (x^2 + x + 1) \cdot e^{-x} = [(ax^2 + bx + c) \cdot e^{-x}]'$$

$$= [(2ax + b) \cdot e^{-x}] - [(ax^2 + bx + c) \cdot e^{-x}] = (-ax^2 + (2a - b)x + b - c) \cdot e^{-x} \Rightarrow -a = 1,$$

$$2a - b = 1 \text{ et } b - c = 1 \Rightarrow a = -1, b = 2a - 1 = -3 \text{ et } c = b - 1 = -4. \text{ Donc}$$

$$\int (x^2 + x + 1) \cdot e^{\alpha x} dx = -(x^2 + 3x + 4) \cdot e^{-x} + C, C \in \mathbb{R}.$$

Pour l'intégrale $\frac{1}{a^2} \int \frac{1}{(\frac{t}{a})^2+1} dt$, on utilise un changement de variable $u = \frac{t}{a}$, et on trouve

$$\frac{1}{a} dt = du \Rightarrow dt = a du \Rightarrow \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{(\frac{t}{a})^2+1} dt = \frac{1}{a^2} \int \frac{a}{u^2+1} du = \frac{1}{a} \int \frac{1}{u^2+1} du = \frac{1}{a} \arctan u + C =$$

$$\frac{1}{a} \arctan \frac{t}{a} + C, C \in \mathbb{R}. \text{ On peut faire de la même manière pour } \int \frac{1}{\sqrt{4-t^2}} dt =$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{t}{2})^2}} dt = \frac{1}{2} (2 \arcsin(\frac{t}{2})) + C = \arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right) + C, C \in \mathbb{R}. \text{ Pour l'intégrale}$$

$$\frac{1}{16} \int \sin^2 2x \cdot 2 \cos 2x dx, \text{ on a utilisé le fait que } \int f(x)^n \cdot f'(x) dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C, C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2 :

1. $(1+x^2)^2 \frac{dy}{dx} + 2x + 2xy^2 = 0$ [1]
[1] $\Rightarrow (1+x^2)^2 \frac{dy}{dx} = -2x(1+y^2) \Rightarrow \frac{dy}{1+y^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} dx \Rightarrow \int \frac{1}{1+y^2} dy = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} dx$
 $\Rightarrow \arctan y = \frac{1}{1+x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R} \Rightarrow y(x) = \tan\left(\frac{1}{1+x^2} + C\right), \quad C \in \mathbb{R}$
2. $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$, avec $y(1) = 2$ [2]
[2] $\Rightarrow x^2 + y^2 = xy \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{xy} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$. Donc [2] est de la forme $y' = f(\frac{y}{x})$. Si on pose $v = \frac{y}{x}$ on obtient $y = xv \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$. Comme $\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$, alors $v + x \frac{dv}{dx} = \frac{1}{v} + v$ [2']
[2'] $\Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{1}{v} \Rightarrow x dv = \frac{1}{v} dx \Rightarrow v dv = \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int v dv = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \frac{v^2}{2} = \ln|x| + C \Rightarrow v^2 = 2 \ln|x| + 2C, C \in \mathbb{R} \Rightarrow v = \pm \sqrt{2 \ln|x| + 2C}, C \in \mathbb{R}$. Comme $y = vx$, alors la solution générale de l'équation [2] est donnée par $y(x) = \pm x \sqrt{2 \ln|x| + K}$, avec $K = 2C, C \in \mathbb{R}$. La condition $y(1) = 2 \Rightarrow \pm 1 \sqrt{2 \ln|1| + K} = 2 \Rightarrow \sqrt{K} = 2 \Rightarrow K = 4$, donc la solution finale est $y(x) = \pm x \sqrt{2 \ln|x| + 4}$.
3. $x^3 + 2y^2 y' = 0$ [3]
[3] $\Rightarrow 2y^2 \frac{dy}{dx} = -x^3 \Rightarrow 2y^2 dy = -x^3 dx \Rightarrow \int 2y^2 dy = \int -x^3 dx \Rightarrow \frac{2}{3} y^3 = -\frac{1}{4} x^4 + C, C \in \mathbb{R} \Rightarrow y^3 = -\frac{3}{8} x^4 + K, K = \frac{3C}{2} \Rightarrow y(x) = \left(-\frac{3}{8} x^4 + K\right)^{1/3}, K \in \mathbb{R}$.
4. $x^2 y' - e^y = 0$ [4]
[4] $\Rightarrow x^2 \frac{dy}{dx} = e^y \Rightarrow e^{-y} dy = \frac{1}{x^2} dx \Rightarrow \int e^{-y} dy = \int \frac{1}{x^2} dx \Rightarrow -e^{-y} = -\frac{1}{x} + C \Rightarrow e^{-y} = \frac{1}{x} - C$. Donc, la solution générale est : $y(x) = -\ln\left(\frac{1}{x} - C\right), C \in \mathbb{R}$.
5. $(x^2 + 1)y' + xy = 0$ [5] [5] $\Rightarrow (x^2 + 1) \frac{dy}{dx} + xy = 0 \Rightarrow (x^2 + 1) \frac{dy}{dx} = -xy \Rightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{x^2+1} \Rightarrow \frac{1}{y} dy = -\frac{x}{x^2+1} dx \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = -\int \frac{x}{x^2+1} dx \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = -\int \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+1} dx \Rightarrow \ln|y| = -\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C, C \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{\ln|y|} = e^{-\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C} \Rightarrow |y| = e^{C + \ln((x^2+1)^{-\frac{1}{2}})} \Rightarrow |y| = e^C \cdot e^{\ln((x^2+1)^{-\frac{1}{2}})} = \frac{e^C}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow y = \frac{K}{\sqrt{x^2+1}}, K \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 :

1. $y' - 4y = 3, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ [11]

▷ La solution de l'équation sans second membre(homogène) de [11] est donnée comme suit : $y' - 4y = 0 \Rightarrow y' = 4y$. Il est clair que $y = 0$ est une solution (solution triviale). Supposant que $y \neq 0$, alors $y' = 4y \Rightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 4 \Rightarrow \frac{1}{y} dy = 4 dx \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = 4 \int dx \Rightarrow \ln|y| = 4x + C, C \in \mathbb{R} \Rightarrow |y| = e^C \cdot e^{4x} \Rightarrow y = \pm e^C \cdot e^{4x}, C \in \mathbb{R}$. Avec la solution triviale on trouve $y_h = K e^{4x}, k \in \mathbb{R}$.

▷ Variation de la constante(recherche de la solution particulière de [11]). Pour trouver une solution particulière, on pose $y_p = K(x)e^{4x}$. En remplaçant dans [11] on obtient : $(K(x)e^{4x})' - 4K(x)e^{4x} = 3 \Rightarrow (K(x))'e^{4x} + 4K(x)e^{4x} - 4K(x)e^{4x} = 3 \Rightarrow K'(x)e^{4x} = 3 \Rightarrow K(x) = \int 3e^{-4x} dx = -\frac{3}{4}e^{-4x} \Rightarrow y_p = -\frac{3}{4}e^{-4x}e^{4x} = -\frac{3}{4}$. Donc, la solution générale est : $y(x) = y_p + y_h = -\frac{3}{4} + K e^{4x}, \quad K \in \mathbb{R}$.
2. $y' + y = 2e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ [12]

▷ La solution de l'équation sans second membre(homogène) de [12] est donnée comme suit : $y' + y = 0 \Rightarrow y' = -y$. Il est clair que $y = 0$ est une solution (solution triviale). Supposant que $y \neq 0$, alors $y' = -y \Rightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -1 \Rightarrow \frac{1}{y} dy = -1 dx \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = -\int dx \Rightarrow \ln|y| = -x \Rightarrow |y| = e^C \cdot e^{-x} \Rightarrow y = \pm e^C \cdot e^{-x}, C \in \mathbb{R}$. Avec la solution triviale on trouve $y_h = K e^{-x}, k \in \mathbb{R}$.

▷ Variation de la constante(recherche de la solution particulière de [12]). Pour trouver une solution particulière, on pose $y_p = K(x)e^{-x}$. En remplaçant dans [12] on obtient : $(K(x)e^{-x})' - 4K(x)e^{-x} = 2e^x \Rightarrow (K(x)'e^{-x}) - K(x)e^{-x} + K(x)e^{-x} = 2e^x \Rightarrow K'(x)e^{-x} = 2e^x \Rightarrow K(x) = \int 2e^{2x} dx = e^{2x} \Rightarrow y_p = e^{2x}e^{-x} = e^x$. Donc, la solution générale est : $y(x) = y_p + y_h = e^x + Ke^{-x}$, $K \in \mathbb{R}$.

3. $y' + y = x^2$, $x \in]0, +\infty[$ [13]

▷ La solution de l'équation sans second membre(homogène) de [13] est donnée comme suit : $y' + y = 0 \Rightarrow y' = -y$. Il est clair que $y = 0$ est une solution (solution triviale). Supposant que $y \neq 0$, alors $y' = -y \Rightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -1 \Rightarrow \frac{1}{y} dy = -1 dx \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = -\int dx \Rightarrow \ln|y| = -x \Rightarrow |y| = e^C \cdot e^{-x} \Rightarrow y = \pm e^C \cdot e^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$. Avec la solution triviale on trouve $y_h = Ke^{-x}$, $k \in \mathbb{R}$.

▷ Variation de la constante(recherche de la solution particulière de [13]). Pour trouver une solution particulière, on pose $y_p = K(x)e^{-x}$. En remplaçant dans [13] on obtient : $(K(x)e^{-x})' - 4K(x)e^{-x} = x^2 \Rightarrow (K(x)'e^{-x}) - K(x)e^{-x} + K(x)e^{-x} = x^2 \Rightarrow K'(x)e^{-x} = x^2 \Rightarrow K(x) = \int x^2 e^x dx = (ax^2 + bx + c)e^x$, avec a , b et c sont des valeurs à déterminer. $\int x^2 e^x dx = (ax^2 + bx + c)e^x \Rightarrow x^2 e^x dx = [(ax^2 + bx + c)e^x]' \Rightarrow x^2 e^x dx = (ax^2 + bx + c)e^x + (2ax + b)e^x \Rightarrow x^2 e^x dx = (ax^2 + (2a + b)x + (b + c))e^x \Rightarrow a=1, b=-2$ et $c=2 \Rightarrow y_p = (x^2 - 2x + 2)$. Donc la solution générale est : $y(x) = y_p + y_h = (x^2 - 2x + 2) + Ke^{-x}$, $K \in \mathbb{R}$.

4. $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$, $x \in]0, +\infty[$ [14]

▷ La solution de l'équation sans second membre(homogène) de [14] est donnée comme suit : $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 0 \Rightarrow y' = (2x - \frac{1}{x})y$. Il est clair que $y = 0$ est une solution (solution triviale). Supposant que $y \neq 0$, alors $y' = (2x - \frac{1}{x})y \Rightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = (2x - \frac{1}{x}) \Rightarrow \frac{1}{y} dy = (2x - \frac{1}{x}) dx \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int (2x - \frac{1}{x}) dx \Rightarrow \ln|y| = x^2 - \ln(x) + C \Rightarrow |y| = e^C \cdot e^{x^2} \cdot e^{\ln(\frac{1}{x})} \Rightarrow y = \pm e^C \cdot \frac{e^{x^2}}{x}$, $C \in \mathbb{R}$. Avec la solution triviale on trouve $y_h = K \frac{e^{x^2}}{x}$, $k \in \mathbb{R}$.

▷ Variation de la constante(recherche de la solution particulière de [14]). Pour trouver une solution particulière, on pose $y_p = K(x) \frac{e^{x^2}}{x}$. En remplaçant dans [14] on obtient : $(K(x) \frac{e^{x^2}}{x})' - (2x - \frac{1}{x})(K(x) \frac{e^{x^2}}{x}) = 1 \Rightarrow K'(x) \frac{e^{x^2}}{x} = 1 \Rightarrow K'(x) = xe^{-x^2} \Rightarrow K(x) = \int xe^{-x^2} dx$. Posons $u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow K(x) = \frac{1}{2} \int e^{-u} du = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Rightarrow y_p = -\frac{1}{2x}$. Donc la solution générale est : $y(x) = y_p + y_h = -\frac{1}{2x} + K \frac{e^{x^2}}{x}$, $K \in \mathbb{R}$.

5. $x(1 + \ln^2 x)y' + 2(\ln x)y = 1$, $x \in]0, +\infty[$ [15]

L'équation [15] $\Leftrightarrow y' + \frac{2 \ln x}{x(1 + \ln^2 x)}y = \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)}$ [15]'

▷ La solution de l'équation sans second membre(homogène) de [15]' est donnée comme suit : $y' + \frac{2 \ln x}{x(1 + \ln^2 x)}y = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2 \ln x}{x(1 + \ln^2 x)}y$. Il est clair que $y = 0$ est une solution (solution triviale). Supposant que $y \neq 0$, alors $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -\frac{2 \ln x}{x(1 + \ln^2 x)} \Rightarrow \frac{1}{y} dy = -\frac{2 \ln x}{x(1 + \ln^2 x)} dx \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = -\int \frac{2 \ln x}{x(1 + \ln^2 x)} dx = -\int \frac{2u}{1 + u^2} du$, avec $u = \ln x$, $du = \frac{1}{x} dx$. Donc $\ln|y| = -\frac{2u}{1 + u^2} du = -\ln(1 + u^2) + C = -\ln(1 + \ln^2 x) + C$, $C \in \mathbb{R} \Rightarrow |y| = e^C \cdot e^{\ln(\frac{1}{1 + \ln^2 x})} \Rightarrow y = \pm e^C \cdot \frac{1}{1 + \ln^2 x}$, $C \in \mathbb{R}$. Avec la solution triviale on trouve $y_h = \frac{K}{1 + \ln^2 x}$, $k \in \mathbb{R}$.

▷ Variation de la constante(recherche de la solution particulière de [15]'). Pour trouver une solution particulière, on pose $y_p = \frac{K(x)}{1 + \ln^2 x}$. En remplaçant dans [15]' on obtient : $\frac{K'(x)}{1 + \ln^2 x} - \frac{K(x) \cdot 2 \ln x}{x(1 + \ln^2 x)^2} + \frac{2 \ln x}{x(1 + \ln^2 x)} \cdot \frac{K(x)}{1 + \ln^2 x} = \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} \Rightarrow \frac{K'(x)}{1 + \ln^2 x} = \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} \Rightarrow$

$K'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow K(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Rightarrow y_p = \frac{\ln x}{1+\ln^2 x}$. Donc la solution générale est :
 $y(x) = y_p + y_h = \frac{K}{1+\ln^2 x} + \frac{\ln x}{(1+\ln^2 x)} = \frac{K+\ln x}{1+\ln^2 x}, \quad K \in \mathbb{R}.$

Exercice 4 :

1. $xy' + 6y - 3xy^4 = 0$ [21].

Une équation de Bernoulli est de la forme : $y' + P(x)y = Q(x)y^n$, où $n \neq 0, 1$. Ici, nous pouvons réécrire l'équation [21] sous cette forme :

Pour $x \neq 0$ [21] $\Rightarrow y' + \frac{6}{x}y = 3y^4$ (Une équation de Bernoulli avec ($P(x) = \frac{6}{x}$, $Q(x) = 3$ et $n = 4$) [21]'.

Pour résoudre l'équation [21]' on effectue le changement de variable Pour résoudre une équation de Bernoulli, on effectue le changement de variable : $z = y^{1-n} = y^{-3}$, alors $z' = \frac{d}{dx}(y^{-3}) = -3y^{-4}y' \Rightarrow y' = -\frac{1}{3}y^4 z'$. En substituant dans l'équation [21]' les expressions de y et de y' , on obtient $-\frac{1}{3}xz' + 6z - 3x = 0 \Rightarrow xz' + 18z - 9x = 0$. Pour $x \neq 0$, l'équation $xz' + 18z - 9x = 0 \Leftrightarrow z' - \frac{18}{x}z = -9$ (équation linéaire de premier ordre). Pour la résolution, nous allons résoudre l'équation homogène (sans second membre) suivante : $z' - \frac{18}{x}z = 0$.

▷ Il est clair que $z=0$ est une solution (solution triviale). Supposant maintenant que $z \neq 0$, alors $z' - \frac{18}{x}z = 0 \Rightarrow z' = \frac{18}{x}z \Rightarrow \frac{1}{z}z' = \frac{18}{x} \Rightarrow \frac{1}{z} \frac{dz}{dx} = \frac{18}{x} \Rightarrow \frac{1}{z} dz = \frac{18}{x} dx \Rightarrow \int \frac{1}{z} dz = \int \frac{18}{x} dx \Rightarrow \ln|z| = 18 \ln|x| + C, C \in \mathbb{R} \Rightarrow \ln|z| = \ln x^{18} + C, C \in \mathbb{R} \Rightarrow |z| = e^C x^{18}, C \in \mathbb{R} \Rightarrow z = \pm e^C x^{18}, C \in \mathbb{R}$. Comme $z = 0$ est une solution, alors, la solution homogène est : $z = kx^{18}, k \in \mathbb{R}$.

▷ Pour déterminer la solution générale, nous allons faire la variation de la constante afin d'obtenir la solution particulière de l'équation $z' - \frac{18}{x}z = -9$. Pour ce faire on pose $z_p = k(x)x^{18}$, alors $z_p' = k(x)'x^{18} + 18k(x)x^{17}$. Comme z_p est une solution particulière de $z' - \frac{18}{x}z = -9$, alors $k(x)'x^{18} + 18k(x)x^{17} - \frac{18}{x}k(x)x^{18} = -9 \Rightarrow k(x)'x^{18} + 18k(x)x^{17} - 18k(x)x^{17} = -9 \Rightarrow k(x)'x^{18} = -9 \Rightarrow k(x)' = -9x^{-18} \Rightarrow k(x) = \frac{9}{17}x^{-17} \Rightarrow z_p = \frac{9}{17}x^{-17}x^{18} = \frac{9}{17}x$. alors la solution générale de l'équation différentielle linéaire est $z = kx^{18} + \frac{9}{17}x, k \in \mathbb{R}$. Comme $z = \frac{1}{y^3}$, alors $y^3 = \frac{1}{z} = \frac{1}{kx^{18} + \frac{9}{17}x}, k \in \mathbb{R} \Rightarrow y = \frac{1}{(kx^{18} + \frac{9}{17}x)^{\frac{1}{3}}}, k \in \mathbb{R}$.

2. $y' = x^2 + 1 - 2xy + y^2$ [22].

On sait que $y_1 = x$ est une solution particulière de l'équation différentielle de Riccati $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$, avec $a(x) = 1, b(x) = -2x$, et $c(x) = x^2 + 1$. Pour la résolution on pose $y = x + z$, alors $y' = 1 + z'$. en remplaçant y et y' dans [22], on obtient $y' = x^2 + 1 - 2xy + y^2 \Rightarrow$

$$1 + z' = x^2 + 1 - 2x(x+z) + (x+z)^2 \Rightarrow z' = z^2 \quad \text{..... [22]'}$$

L'équation de Bernoulli [22]' est une équation à variables séparées. On peut donc l'écrire sous la forme $\frac{dz}{z^2} = dx \Rightarrow \int \frac{dz}{z^2} = \int dx \Rightarrow -\frac{1}{z} = x + c$ où $c \in \mathbb{R} \Rightarrow z(x) = -\frac{1}{x+c}$ où $c \in \mathbb{R}$. Comme $y = x + z$, alors la solution générale de l'équation [22] est : $y(x) = x - \frac{1}{x+c}$ où $c \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 :

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$ [31].

L'équation caractéristique de [31] est $r^2 - 3r + 2 = 0$ [31]'.

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 > 0$. Donc L'équation [31]' admet deux racines réelles distinctes $r_1 = \frac{3-1}{2} = 1$ et $r_2 = \frac{3+1}{2} = 2$. Ainsi, la solution générale de [31] est : $y(x) = Ae^x + Be^{2x}, A, B \in \mathbb{R}$.

2. $y'' + 2y' + y = 0$ [32].
 L'équation caractéristique de [31] est $r^2 + 2r + 1 = 0$ [32]'.
 $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$. Donc L'équation [31]' admet une racine réelle double
 $r = \frac{-2}{2} = -1$. Ainsi, la solution générale de [32] est : $y(x) = (A + Bx)e^{-x}$, $A, B \in \mathbb{R}$.
3. $y'' - 2y' + 2y = 0$ [33].
 L'équation caractéristique de [33] est $r^2 - 2r + 2 = 0$ [31]'.
 $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0$. Donc L'équation [31]' admet deux racines complexes
 conjuguées $r_1 = 1 + i$ et $r_2 = 1 - i$. Ainsi, la solution générale de [33] est :
 $y(x) = (A \sin x + B \cos x)e^x$, $A, B \in \mathbb{R}$.
4. $y'' - 2\lambda y' + y = 0$ [34].
 L'équation caractéristique de [34] est $r^2 - 2\lambda r + 1 = 0$ [34]'.
 $\Delta = 4\lambda^2 - 4$.
 • Si $\lambda \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, alors $\Delta > 0$ et l'équation [34]' admet deux racines
 réelles distinctes : $r_1 = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}$ et $r_2 = \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}$. Ainsi, la solution générale
 de [34] est : $y(x) = Ae^{(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1})x} + Be^{(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1})x}$, $A, B \in \mathbb{R}$.
 • Si $\lambda \in \{-1, 1\}$, alors $\Delta = 0$ et l'équation [34]' admet une racine réelle double
 $r = \lambda$. Ainsi, la solution générale de [34] est : $y(x) = (A + Bx)e^{\lambda x}$, $A, B \in \mathbb{R}$.
 • Si $\lambda \in]-1, 1[$, alors $\Delta < 0$ et l'équation [34]' admet deux racines
 complexes conjuguées $r_1 = \lambda + i\sqrt{1 - \lambda^2}$ et $r_2 = \lambda - i\sqrt{1 - \lambda^2}$. Ainsi, la solution
 générale de [34] est : $y(x) = (A \sin(\sqrt{1 - \lambda^2}x) + B \cos(\sqrt{1 - \lambda^2}x))e^{\lambda x}$, $A, B \in \mathbb{R}$.

Exercice 6 :

1. $y'' - y = x^2 + x + 1$ [41].
 L'équation homogène associée à [41] est : $y'' - y = 0$ [41]'.
 L'équation caractéristique de [41]' est : $r^2 - 1 = 0$ [41]'.
 [41]'' admet deux racines réelles distinctes $r_1 = -1$ et $r_2 = 1$. Ainsi, la solution
 générale de [41]' est : $y(x) = Ae^{-x} + Be^x$, $A, B \in \mathbb{R}$.
 ▷ **Recherche d'une solution particulière y_p de [41]** : Le second
 membre de l'équation [41] est : $f(x) = x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)e^{0x}$. Comme 0 n'est
 pas une racine de l'équation caractéristique [41]', alors on cherche une solution
 particulière de [41] sous la forme : $y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^{0x} = ax^2 + bx + c$, où
 $a, b, c \in \mathbb{R}$. On a : $y_p'(x) = 2ax + b$ et $y_p''(x) = 2a$. En substituant dans l'équation [41],
 on obtient : $2a - (ax^2 + bx + c) = x^2 + x + 1$. Par identification, on obtient le système
 suivant : $-a = 1$, $-b = 1$, $2a - c = 1 \Rightarrow a = -1$, $b = -1$ et $c = -3$. Donc la solution
 particulière de [41] est : $y_p(x) = -x^2 - x - 3$.
 ▷ **Solution générale de [41]** :
 $y_g(x) = y_p(x) + y(x) = -x^2 - x - 3 + Ae^{-x} + Be^x$, $A, B \in \mathbb{R}$.
2. $y'' - 2y' - 8y = e^x$ [42].
 L'équation homogène associée à [42] est : $y'' - 2y' - 8y = 0$ [42]'.
 L'équation caractéristique de [42]' est : $r^2 - 2r - 8 = 0$ [42]'.
 $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36 > 0$. Donc [42]'' admet deux racines réelles distinctes
 $r_1 = -2$ et $r_2 = 4$. Ainsi, la solution générale de [42]' est :
 $y(x) = Ae^{-2x} + Be^{4x}$, $A, B \in \mathbb{R}$.

▷ **Recherche d'une solution particulière y_p de [42]** : Le second membre de l'équation [42] est : $f(x) = e^x = e^{1x}$. Comme 1 n'est pas une racine de l'équation caractéristique [42]', alors on cherche une solution particulière de [42] sous la forme : $y_p(x) = ae^x$, $a \in \mathbb{R}$. On a : $y_p'(x) = ae^x$ et $y_p''(x) = ae^x$. En substituant dans l'équation [42], on obtient : $ae^x - 2ae^x - 8ae^x = e^x$. Par identification, on obtient $-9a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{9}$. Donc la solution particulière de [42] est : $y_p(x) = -\frac{1}{9}e^x$.

▷ **Solution générale de [42]** :
 $y_g(x) = y_p(x) + y(x) = -\frac{1}{9}e^x + Ae^{-2x} + Be^{4x}$, $A, B \in \mathbb{R}$.

3. $y'' - 2y' = \sin x$ [43].

L'équation homogène associée à [43] est : $y'' - 2y' = 0$ [43]'

L'équation caractéristique de [43]' est : $r^2 - 2r = 0$ [43]''.

[43]'' admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 0$ et $r_2 = 2$. Ainsi, la solution générale de [43]' est : $y(x) = A + Be^{2x}$, $A, B \in \mathbb{R}$.

▷ **Recherche d'une solution particulière y_p de [43]** : Le second membre de l'équation [43] est : $f(x) = \sin x = \sin(1x)e^{0x}$. Comme $0 + 1i$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique [43]', alors on cherche une solution particulière de [43] sous la forme : $y_p(x) = a \sin x + b \cos x$, $a, b \in \mathbb{R}$. On a : $y_p'(x) = a \cos x - b \sin x$ et $y_p''(x) = -a \sin x - b \cos x$. En substituant dans l'équation [43], on obtient : $(-a \sin x - b \cos x) - 2(a \cos x - b \sin x) = \sin x$. Par identification, on obtient $-a + 2b = 1$, $-b - 2a = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{5}$, $b = \frac{2}{5}$. . Donc la solution particulière de [43] est : $y_p(x) = -\frac{1}{5} \sin x + \frac{2}{5} \cos x$.

▷ **Solution générale de [43]** :
 $y_g(x) = y(x) + y_p(x) = A + Be^{2x} - \frac{1}{5} \sin x + \frac{2}{5} \cos x$, $A, B \in \mathbb{R}$.

4. $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{-x}$, avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ [44].

L'équation homogène associée à [44] est : $y'' - 4y' + 3y = 0$ [44]'

L'équation caractéristique de [44]' est : $r^2 - 4r + 3 = 0$ [44]''.

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 > 0$. Donc [44]'' admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 1$ et $r_2 = 3$. Ainsi, la solution générale de [44]' est : $y(x) = Ae^x + Be^{3x}$, $A, B \in \mathbb{R}$.

▷ **Recherche d'une solution particulière y_p de [44]** : Le second membre de l'équation [44] est : $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$. Comme -1 n'est pas une racine de l'équation caractéristique [44]', alors on cherche une solution particulière de [44] sous la forme : $y_p(x) = (ax + b)e^{-x}$, $a, b \in \mathbb{R}$. On a : $y_p'(x) = (-ax + a - b)e^{-x}$ et $y_p''(x) = (ax - 2a + b)e^{-x}$. En substituant dans l'équation [44], on obtient : $(ax - 2a + b)e^{-x} - 4(-ax + a - b)e^{-x} + 3(ax + b)e^{-x} = (2x + 1)e^{-x}$. Par identification, on obtient $8a = 2$, $-6a + 8b = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{5}{16}$. . Donc la solution particulière de [44] est : $y_p(x) = (\frac{1}{4}x + \frac{5}{16})e^{-x}$.

▷ **Solution générale de [44]** :
 $y_g(x) = y_p(x) + y(x) = (\frac{1}{4}x + \frac{5}{16})e^{-x} + Ae^x + Be^{3x}$, $A, B \in \mathbb{R}$.

▷ **Application aux conditions initiales** :

On a : $y(0) = 0 \Rightarrow \frac{5}{16} + A + B = 0$ (1). De plus, la dérivée de $y_g(x)$ est :

$y'(x) = (-\frac{1}{4}x - \frac{1}{16})e^{-x} + Ae^x + 3Be^{3x}$. Donc

$y'(0) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{16} + A + 3B = 0$ (2). En résolvant le système formé par (1) et (2), on obtient : $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{3}{16}$.

▷ **Solution finale du problème de Cauchy** :

$y_g(x) = (\frac{1}{4}x + \frac{5}{16})e^{-x} - \frac{1}{2}e^x + \frac{3}{16}e^{3x}$.