Corrigé de la série de TD N° 3 d'analyse II

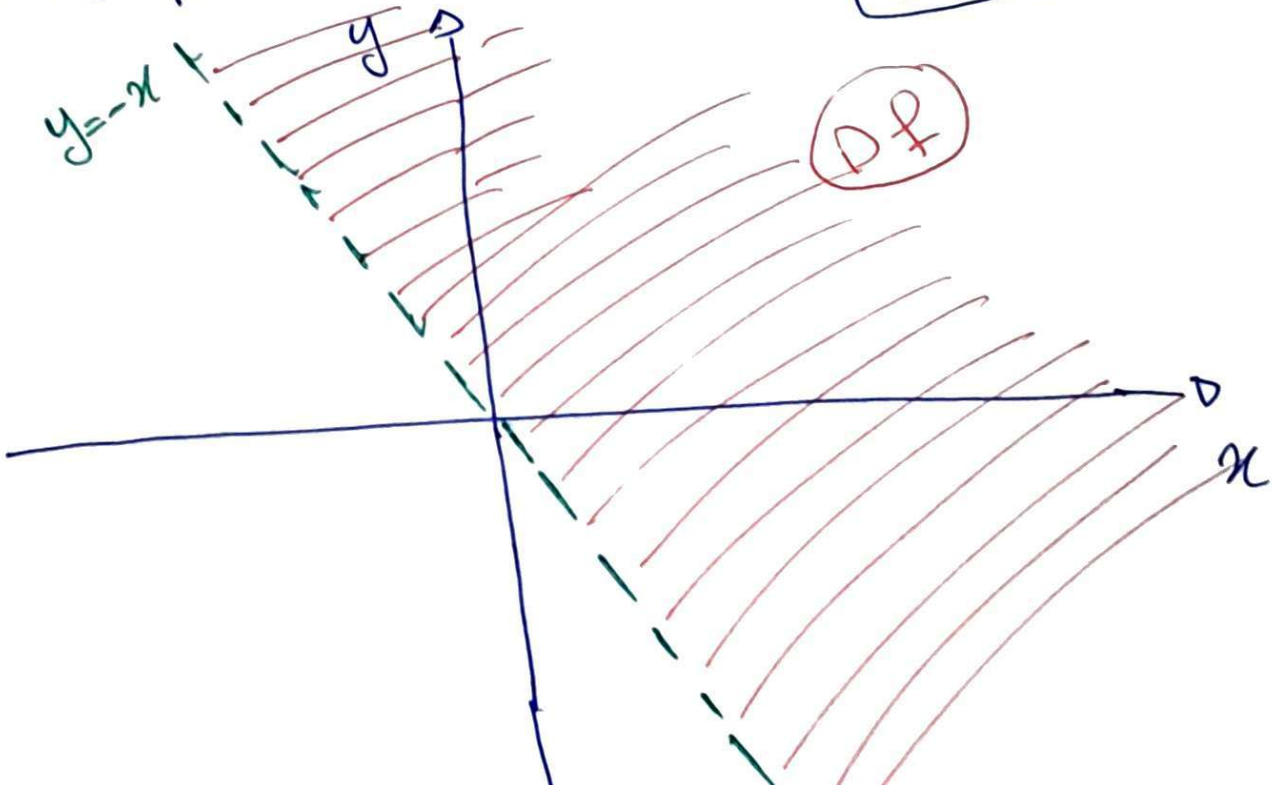
Exercice n° 01

Domaine de définition :

1) $f(x,y) = \ln(x+y)$. $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y>0\}$

$\Rightarrow D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y > -x\}$

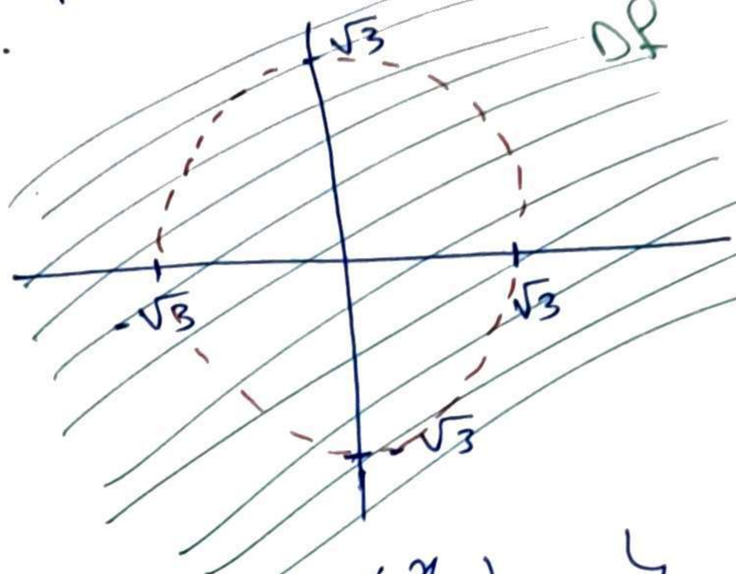
Pour tracer le domaine D_f on va considérer la droite $\boxed{y=-x}$ en pointillés puis pour vérifier $y>-x$ on va hachurer tout ce qui est au-dessus de $\boxed{y=-x}$.



2) $f(x,y) = \dfrac{y-2x^2}{x^2+y^2-3}$. $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \neq 3\}$

$\Rightarrow D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \neq (\sqrt{3})^2\}$.

Pour tracer D_f on va considérer le cercle $x^2+y^2=(\sqrt{3})^2$ en pointillér et hachurer les autre valeurs.



4) $f(x,y) = \sqrt{\ln(e^x-1)}$

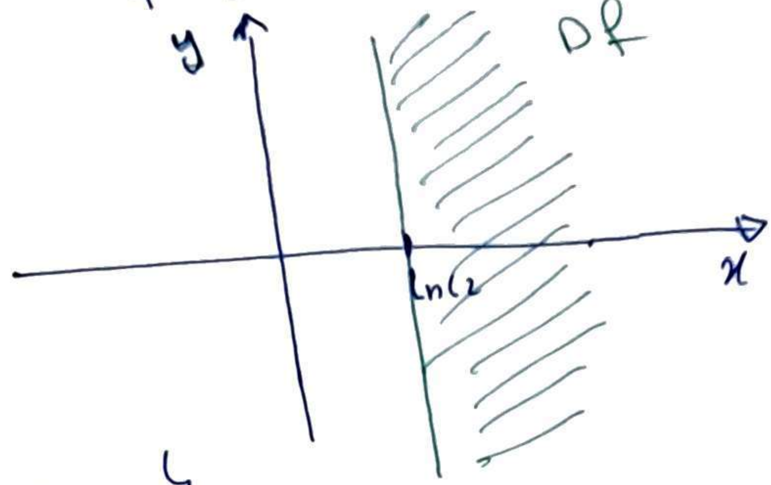
$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid e^x - 1 > 0$ et $\ln(e^x-1) \geq 0\}$

$\begin{cases} e^x - 1 > 0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow x > 0. \\ \ln(e^x-1) \geq 0 \Rightarrow e^x - 1 \geq 1 \end{cases}$ (car: $\ln(a) \geq 0 \Rightarrow a \geq 1$)

Donc $\begin{cases} x > 0 \\ e^x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \ln(2) = 0{,}693. \end{cases}$

alors $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y$ qlcq et $x \geq \ln(2)\}$

Le graphe associé à Df est :

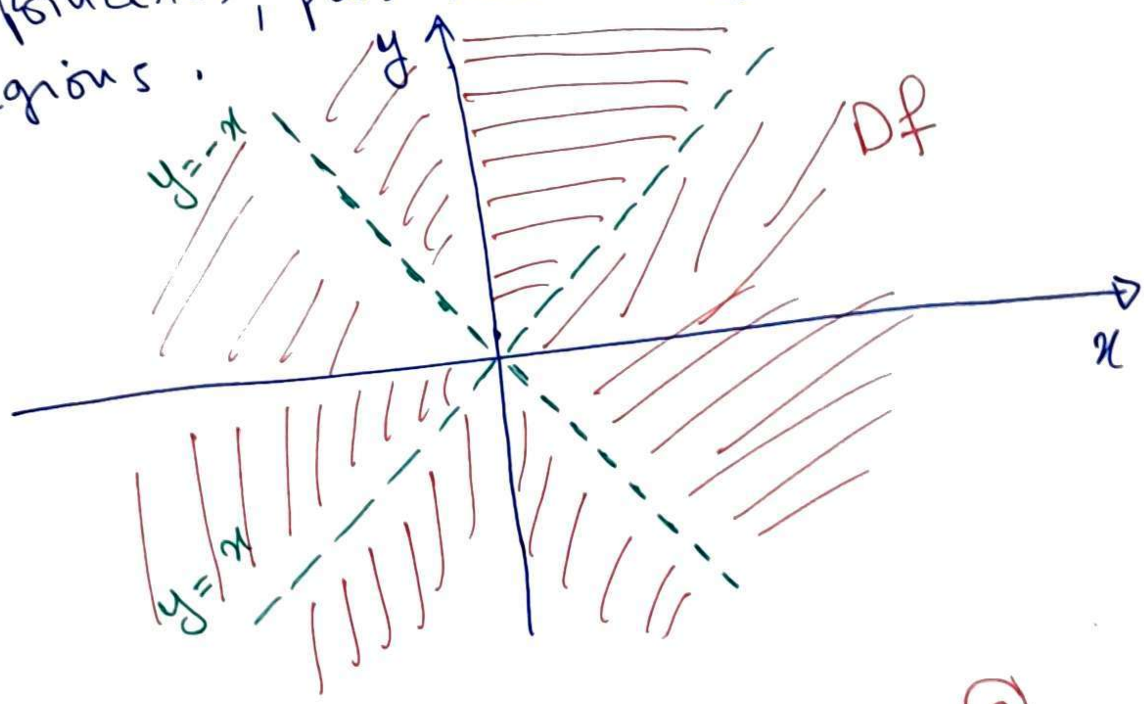


3) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2 - y^2}$

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 \neq 0\}$

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq x \text{ et } y \neq -x\}$

Pour tracer graphiquement Df, on va considérer les deux droites $\boxed{y = -x \text{ et } y = x}$ en pointillés, puis hachurer les autres régions.



5) $f(x,y) = \dfrac{1}{\cos(x-y)}$. $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \cos(x-y) \neq 0\}$

Il est clair que $\cos(x-y) = 0 \Leftrightarrow$

$x - y = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow$

$y = x - \frac{\pi}{2} - k\pi$

Pour $k=0$, on trouve $y = x - \frac{\pi}{2}$

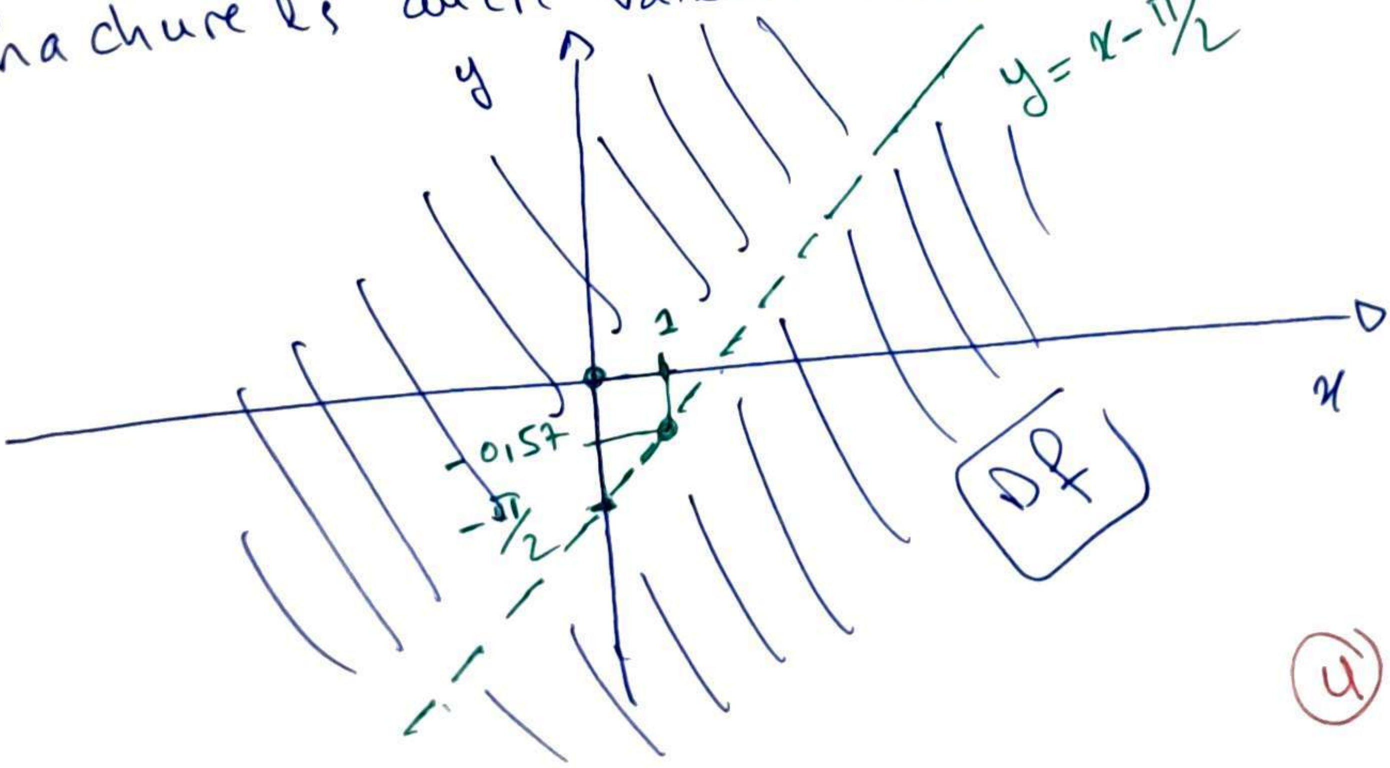
$k = 1$, on trouve $y = x - \frac{\pi}{2} - \pi = x - \frac{3\pi}{2}$

$k = -1$, on trouve $y = x - \frac{\pi}{2} + \pi = x + \frac{\pi}{2}$

.... etc

Pour $k=0$, le domaine D_f est donné par : $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq x - \frac{\pi}{2}\}$

Pour tracer le graphe, on va considérer la droite $y = x - \frac{\pi}{2}$ en pointillés et hachure les autre valeurs valides.



4

Exercice n°02

Représentation graphique des courbes (lignes) de niveau k $\left(\begin{array}{l} f(x,y) = k \\ \text{avec } (x,y) \in D_f \end{array} \right)$.

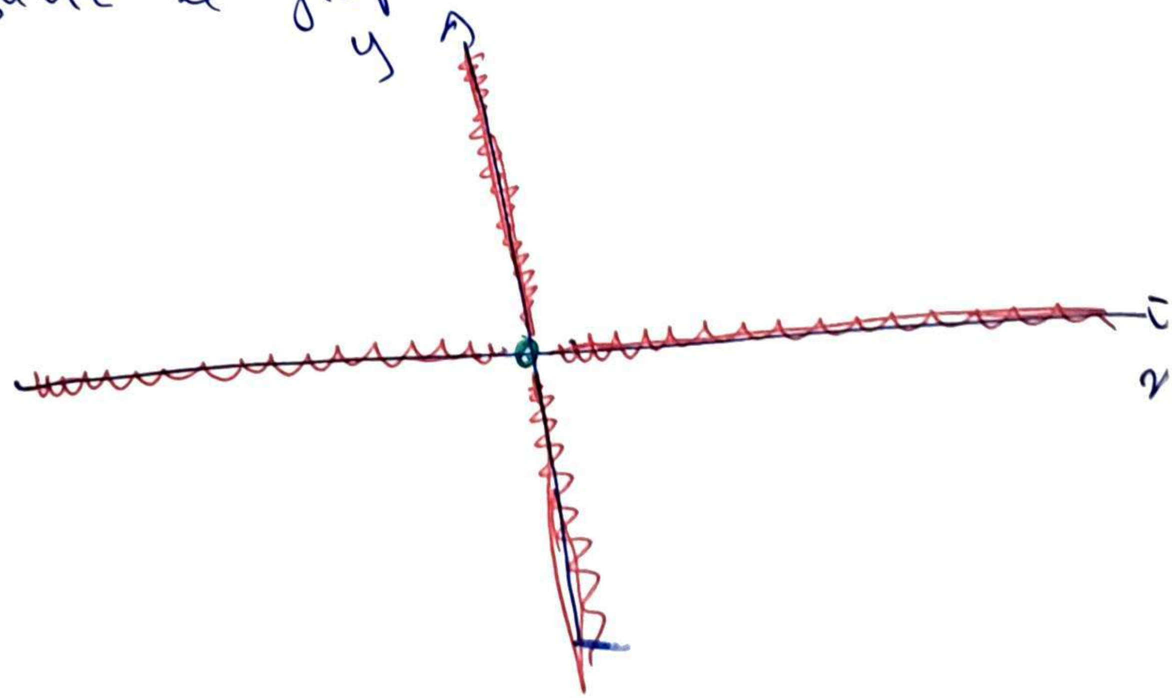
1) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0 \text{ et } y \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

lignes de niveau $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2} = k$

Pour $k=0$, on a $\dfrac{xy}{x^2+y^2} = 0 \Rightarrow xy = 0$

Comme $(x,y) \neq (0,0)$, alors dans ce cas on prend tous les points $(0,y)$ avec $y \neq 0$ et tous les points $(x,0)$ avec $x \neq 0$ ce qui donne le graphe suivant



Pour $k = 1/2$, on obtient $\frac{xy}{x^2+y^2} = 1/2$

$\Rightarrow 2xy = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 = 0$

$\Rightarrow (x-y)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = y}$ avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$

Donc on obtient le même graphe

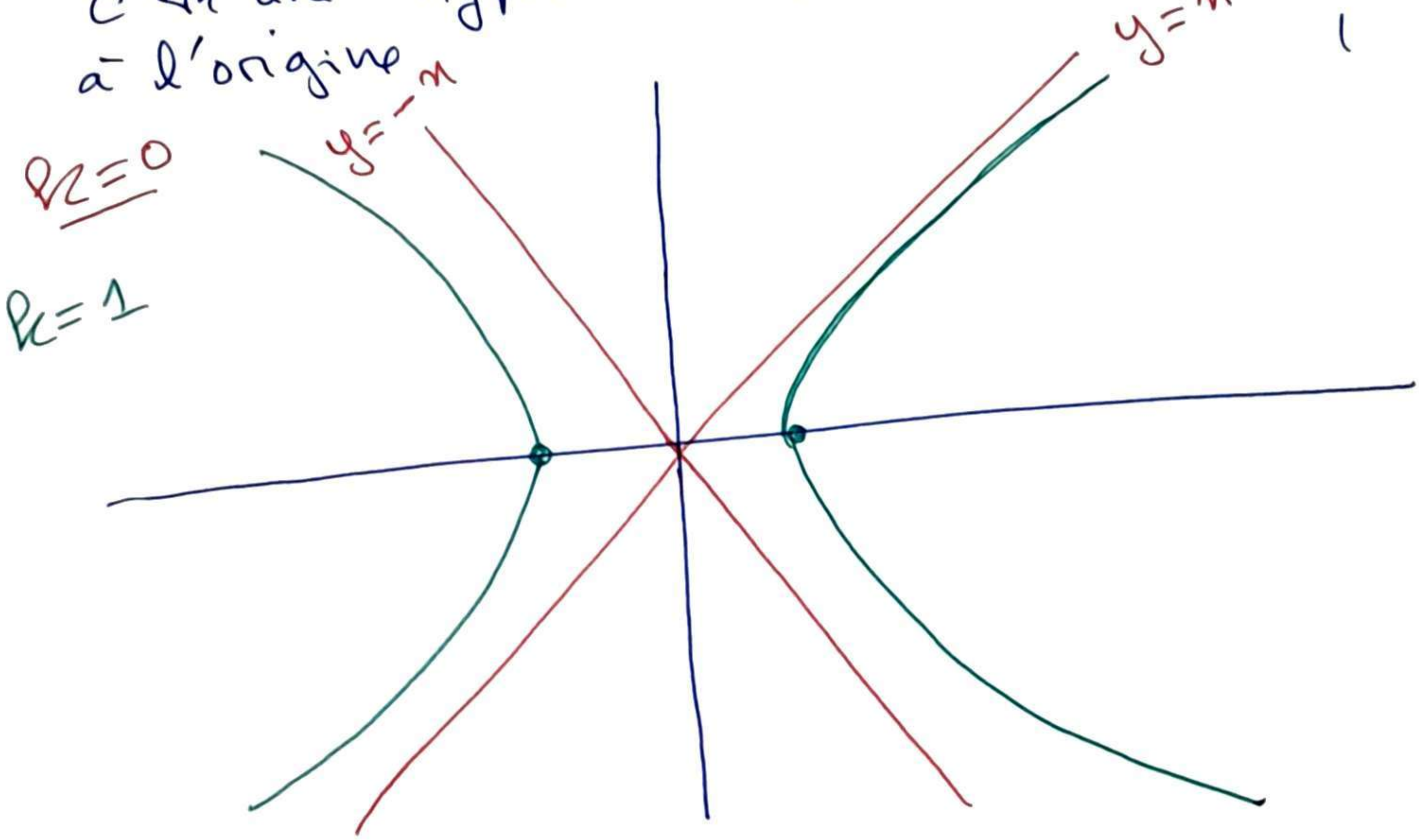
2) $f(x,y) = x^2 - y^2$

* pour $k = 0$, on a $x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow y = x$ ou $y = -x$

Dans ce cas on va considérer les deux droites $y = x$ et $y = -x$

* pour $k = 1$, on a $x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{1} = 1$

c'est une hyperbole equilatère centrée à l'origine ,



3) $f(x,y) = \frac{x^2+y}{x+y^2}$,

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y^2 \neq 0\}$ (Donc il faudra exclure $x = -y^2$ lors du tracé des courbes

Pour $k=0$, on a $\frac{x^2+y}{x+y^2} = 0 \Rightarrow x^2+y = 0 \Rightarrow$

$y = -x^2$ pour eviter le cas $x = -y^2$

il faut exclure le point $(0,0)$

Donc la courbe de niveau $k=0$ est

$y = -x^2$ (sauf $(0,0)$).

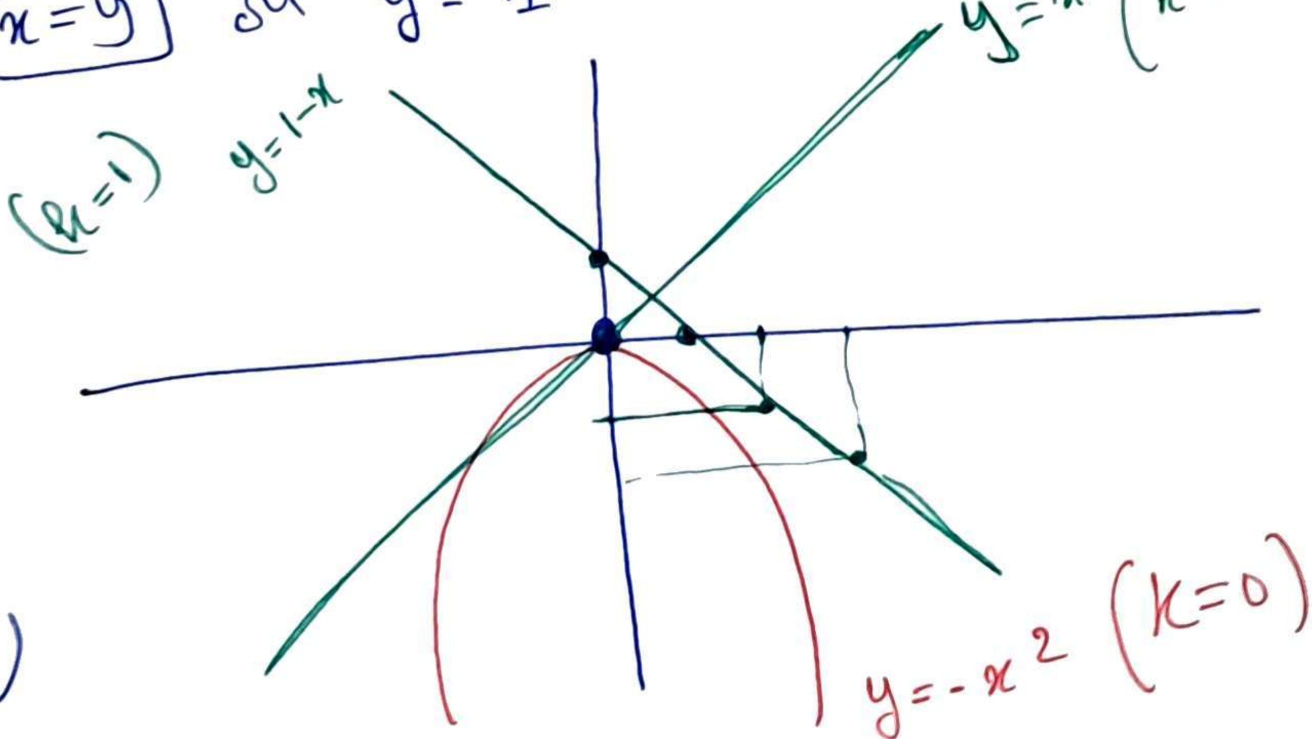
Pour $k = 1$

on a $\frac{x^2+y}{x+y^2} = 1 \Rightarrow x^2+y = x+y^2$

$\Rightarrow x^2 - x - y^2 + y = 0 \Rightarrow (x-y)(x+y-1) = 0$

$(x-y) = 0$ ou $(x+y-1) = 0$

$\Rightarrow \boxed{x = y}$ ou $y = 1-x$ avec $(x,y) \neq (0,0)$



4) $f(x,y) = \frac{xy - x + y}{xy}$

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, xy \neq 0\}$

Pour $k=0$, on a : $\frac{xy-x+y}{xy} = 0 \Rightarrow$

$xy - x + y = 0 \Rightarrow x(y-1) + y = 0$

$\Rightarrow x(y-1) = -y \Rightarrow \boxed{x = \frac{-y}{y-1}}$

Comme on peut trouver y en fonction de x.

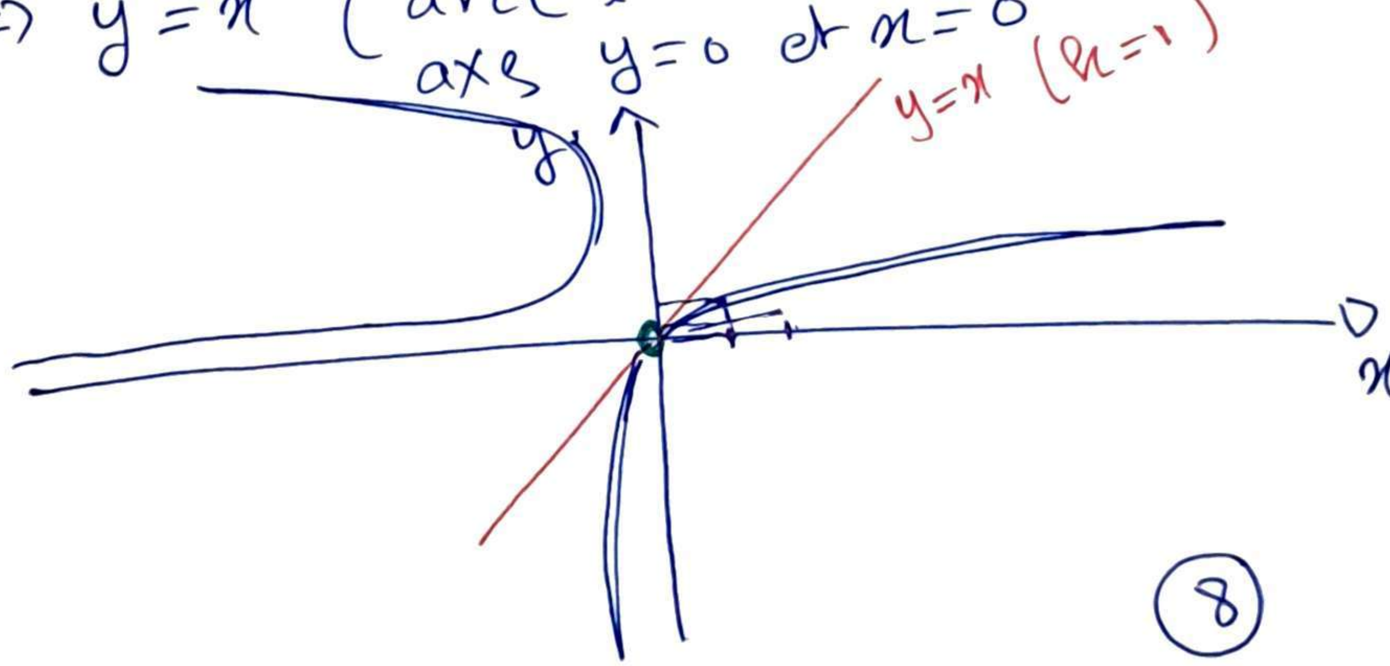
$xy - x + y = 0 \Rightarrow y(1+x) - x = 0$

$\Rightarrow y(1+x) = x \Rightarrow \boxed{y = \frac{x}{1+x}}$

* Pour $k=1$, on a : $\frac{xy-x+y}{xy} = 1$

$\Rightarrow xy - x + y = xy \Rightarrow -x + y = 0$

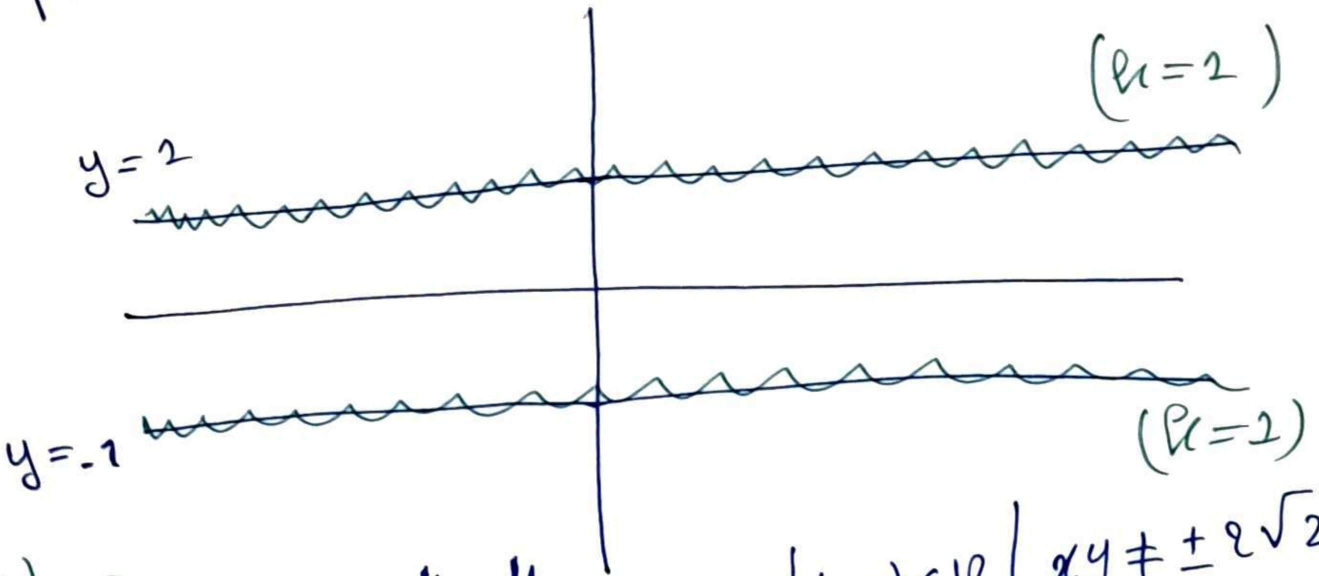
$\Rightarrow y = x$ (avec l'exclusion des axes $y=0$ et $x=0$)



5) $f(x,y) = y^2$ $\quad D_f = \mathbb{R}^2$

pour $k = -1 \Rightarrow y^2 = -1$ (impossible)

pour $k = 1$ on a $y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$



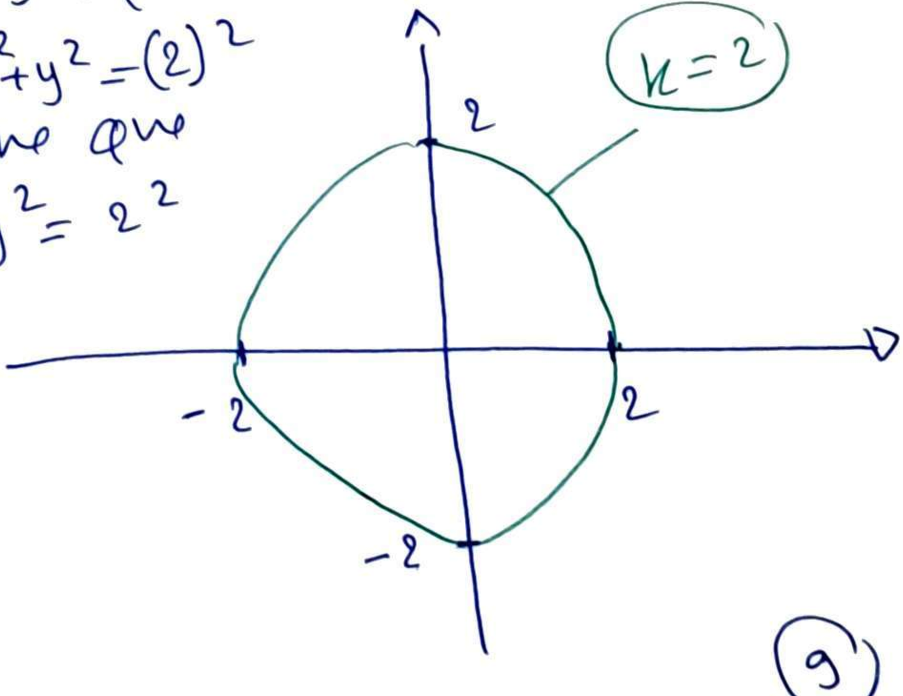
6) $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{8-x^2y^2}$. $\quad D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid xy \neq \pm 2\sqrt{2}\}$

Pour $k = 2 \Rightarrow x^4+y^4 = (8-x^2y^2)\,2$

$\Rightarrow x^2+y^2 = 4 \Rightarrow x^2+y^2 = (2)^2$

ici il faut expliquer que

$(xy = 2\sqrt{2}) \notin x^2+y^2 = 2^2$



Exercice n° 03

Limites en $(0,0)$

1) $f(x,y) = \dfrac{e^{xy} - 1}{x^2 + y^2}$

* Prenons le chemin $x = 0$, alors

$$f(0,y) = \frac{e^{0y} - 1}{0^2 + y^2} = \frac{0}{y^2} = 0$$

* prenons le ~~chem~~ chemin $y = 0$, alors

$$f(x,0) = \frac{e^{x0} - 1}{x^2 + 0^2} = \frac{0}{x^2} = 0.$$

* Prenons le chemin $y = x$

$$f(x,x) = \frac{e^{x^2} - 1}{2x^2}$$

on a aussi $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{e^u - 1}{u} = 1$

Le developpement limité de $e^{x^2} - 1$ au $V(0)$ est donné par:

$$e^{x^2} - 1 = x^2 + \frac{x^4}{2} + \cdots, \text{ donc}$$

$$\frac{e^{x^2} - 1}{2x^2} \simeq \frac{1}{2} + \frac{x^2}{4} + \cdots, \text{ alors}$$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x,x) = 1/2 \neq 0$, donc $\lim\limits_{(x,y)} f(x,y)$ n'existe pas

10

Deuxième méthode

Coordonnés polairs

Posons $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2 = r^2$

Car $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

Donc $f(x,y) = f(r,\theta) = \dfrac{e^{r^2\cos\theta\sin\theta} - 1}{r^2}$

Pour $r \longrightarrow 0$ on peut utiliser l'approximation

$e^{z} - 1 \simeq z$ (avec z assez petit)

Donc $e^{r^2\cos\theta\sin\theta} - 1 \simeq r^2\cos\theta\sin\theta$,

alors $f(r,\theta) = \dfrac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \cos\theta\sin\theta$

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ dépend de θ, alors

la limite en $(0,0)$ n'existe pas

2) $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

* limite le long des droites $y = hx$, $h \in \mathbb{R}$.

$f(x,y) = f(x,hx) = \frac{x^2-(hx)^2}{x^2+(hx)^2} = \frac{1-h^2}{1+h^2}$

Donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,hx) = \frac{1-h^2}{1+h^2}$

$= \begin{cases} 1 & \text{si } h=0 \text{ (suivant l'axe des } x\text{)} \\ 0 & \text{si } h=1 \text{ (suivant la droite } y=x\text{)} \\ -\frac{1}{2} & \text{si } h=\sqrt{3} \end{cases}$

Puis la limite dépend du chemin suivi, alors elle n'existe pas

Deuxième méthode

Coordonnées polaires $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

alors $x^2+y^2 = r^2$

$x^2-y^2 = r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

Donc $f(x,y) = f(r,\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos(2\theta)$

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{r\to 0} f(r,\theta) = \cos(2\theta)$

$$= \begin{cases} \cos(0) = 1 & \text{si } \theta = 0 \\ \cos(\pi) = -1 & \text{si } \theta = \pi/2 \end{cases}$$

Comme la limite dépend de θ, alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

3) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^4}$.

limite le long de chemins particuliers

Pour $y=0$, $f(x,0) = \dfrac{x^3+0^3}{x^2+0^4} = x$

tend vers 0 quand $x \to 0$

Pour $x=0$, $f(0,y) = \dfrac{0^3+y^3}{0^2+y^4} = \dfrac{1}{y}$

tend vers $+\infty$ quand $y \to 0$, alors

~~lam~~ la limite n'existe pas $(0,0)$

car elle admet deux limites différentes

13

Deuxième méthode

Coordonnées polairs $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

alors $x^2+y^4 = r^2\cos^2\theta + r^4\sin^4\theta$

$x^3+y^3 = r^3(\cos^3\theta+\sin^3\theta)$

$\Rightarrow f(x,y) = f(r,\theta) = \dfrac{r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)}{(\cos^2\theta+r^2\sin^4\theta)}$

quand $r \to 0$

on obtient $r(\cos^3\theta+\sin^3\theta) \to 0$

$\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta \to \cos^2\theta$

alors $\lim\limits_{r\to 0} f(r,\theta) = \dfrac{0}{\cos^2\theta} = 0$ si

$\cos\theta \neq 0$, mais si

$\theta = \pi/2$ ou $3\pi/2$, on trouve

$x = r\cos\theta = 0$, alors on tombe sur le cas de la première méthode

$f(0,y) = 1/y \to +\infty$ quand $y \to 0$

donc la limite n'existe pas en $(0,0)$.

4) $f(x,y) = \dfrac{x^3 y^2}{x^6 + y^4}$.

Pour $y = hx$, $h \in \mathbb{R}$.

$f(x,y) = f(x, hx) = \dfrac{x^3 (hx)^2}{x^6 + (hx)^4}$

$= \dfrac{x^3 h^2 x^2}{x^6 + h^4 x^4} = \dfrac{h^2 x^5}{x^4 (x^2 + h^2)} = \dfrac{h^2 x}{x^2 + h^4}$

Donc pour $x \to 0$, on trouve

$\lim\limits_{x \to 0} f(x, hx) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{h^2 x}{x^2 + h^4} = 0$

(Rq: h ne peut pas être égal à 0 si non on se retrouve dans le cas $y = 0$ et $x \to 0$ (cas non defini))

Deuxième méthode

Coordonnées polaire $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$\Rightarrow f(r,\theta) = \dfrac{r\cos^3\theta \sin^2\theta}{r^2 \cos^6\theta + \sin^4\theta}$

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{r \to 0} f(r,\theta) = 0$

15

5) $f(x,y) = \dfrac{(x^2-y)(y^2-x)}{x+y}$ $\left(= \dfrac{0}{0} \text{ FI}\right)$

Prendre $y = hx$, $h \in \mathbb{R}$.

* $(x^2-y)(y^2-x) = (x^2-hx)((hx)^2-x)$
$= (x^2-hx)(h^2x^2-x)$

* $(x+y) = x + hx = x(1+h)$

alors, $f(x,y) = f(x,hx) = \dfrac{(x^2-hx)(h^2x^2-x)}{x(1+h)}$

$= \dfrac{x(x-h)(h^2x-1)x}{x(1+h)} = \dfrac{x(x-h)(h^2x-1)}{(1+h)}$

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} f(x,hx) = \dfrac{0(0-h)(0-1)}{1+h}$

$= 0$ si $h \neq -1$, mais si $\boxed{h = -1}$

on tombe sur le cas $y = -x$

or $x+y = x+(-x) = 0$ ne peut pas se realisé car $f(x,y)$ n'est pas définie pour $\boxed{y=-x}$, alors on ne peut pas prendre le chemin $\boxed{y=-x}$, donc

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

6) $f(x,y) = \dfrac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)}$

Pour $y=0$, on a

$f(x,0) = \dfrac{\sin(x)}{x^2} = \dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = \lim\limits_{x\to 0} \cancel{\dfrac{\sin x}{x}}^{\to 1} \cdot \dfrac{1}{x} = +\infty$

alors la limite n'existe pas en $(0,0)$

Deuxième méthode

Coordonnées polaires $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$f(x,y) = f(r,\theta) =$

$\dfrac{\sin\sqrt{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} = \dfrac{\sin r}{r^2}$

$= \dfrac{\sin r}{r} \cdot \dfrac{1}{r}$ et

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{r\to 0} \cancel{\dfrac{\sin r}{r}}^{\to 1} \cdot \dfrac{1}{r} = +\infty$

alors la limite n'existe pas en $(0,0)$.

Corrigé des exercices 4 et 5

Exercice n°04 (Continuité)

1) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2+1}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

On a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $x^2+y^2+1 \geq 1 > 0$
c'est-à-dire le dénominateur
est différent de 0 $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

On a aussi $f(x,y) = \dfrac{g(x,y)}{h(x,y)}$ avec

$g(x,y) = x$ (continue $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$)

$h(x,y) = x^2+y^2+1$ (continue $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$)

et comme $h(x,y) \neq 0$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,
alors le quotient $f(x,y) = \dfrac{g(x,y)}{h(x,y)}$

est continue sur $\mathbb{R}^2$

2) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^n y^m}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1) Pour $(x,y) \neq (0,0)$, $f(x,y) = \dfrac{x^n y^m}{x^2+y^2}$ est le quotient de deux fonctions continus ($x^n y^m$ et x^2+y^2), avec le dénominateur ($x^2+y^2 \neq 0 \ \forall (x,y) \neq (0,0)$), alors $f(x,y)$ st continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2) Continuité en $(0,0)$

Pour que f soit continue en $(0,0)$
Il faut que la limite de f en $(0,0)$ existe et que cette limite $= 0 = f(0,0)$

Utilisons les Coordonnées polairs.
Posons $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ avec $r \geq 0$, alors

$$\frac{x^n y^m}{x^2+y^2} = \frac{r^n \cos^n\theta \cdot r^m \sin^m\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \frac{r^{n+m} \cdot \cos^n\theta \sin^m\theta}{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}$$

$$= \frac{r^{n+m}}{r^2} \cdot \frac{\cos^n\theta \cdot \sin^m\theta}{1} = \cos^n\theta \sin^m\theta \cdot r^{n+m-2}$$

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{r \to 0 \\ \forall \theta}} \cos^n\theta \sin^n\theta \cdot r^{n+m-2}$

$= 0$ si $n+m-2 > 0$

Donc elle continue en $(0,0)$ si $n+m-2>0$
alors $\forall n,m \,/\, n+m > 2$ $f(x,y)$ st continue sur $\mathbb{R}^2$

2

3) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x+y} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

<u>Rq</u> ici on va pas étudier la continuité sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car la fonction f n'est pas définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Elle est définie sur $\mathbb{R}^2 - \{(x,y) \mid x+y=0\}$.

Donc pour étudier la continuité en $(0,0)$ nous allons vérifier si limite f quand $(x,y) \to (0,0)$ existe et si sa valeur $= 0 = f(0,0)$.

- Coordonnées polaires.

Posons $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ avec $r \geq 0$

$f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = f(r,\theta) =$

$$\frac{\ln\left(1+\sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}\right)}{r\cos\theta + r\sin\theta} = \frac{\ln(1+r)}{r(\cos\theta+\sin\theta)}$$

$$= \frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)} \cdot \frac{\ln(1+r)}{r}$$

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \dfrac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)} \lim\limits_{\substack{r\to 0\\ \forall\theta}} \dfrac{\ln(1+r)}{r}$

on a $\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{\ln(1+r)}{r} = 1$

avec la règle de l'Hôpital

$$\lim_{r\to 0} \frac{[\ln[1+r]]'}{[r]'} = \lim_{r\to 0} \frac{\frac{1}{1+r}}{1} = 1$$

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \dfrac{1}{(\cos\theta + \sin\theta)}$, $\theta \in [0, 2\pi[$

cette limite dépend de θ

si $\theta = 0$ (Direction $y = 0$), $\lim\limits_{r\to 0} f(r,0) = 1$

si $\theta = \pi/4$ $(x = r\cos\theta = r\sin\theta = y)$, $\lim\limits_{r\to 0} f(r, \frac{\pi}{4}) =$

$$\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

si $\theta = -\pi/4$ $(y = r\sin\theta = -r\cos\theta = -x)$, $\lim f(r, -\pi/4)$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} \quad \infty$$

Donc $f(x,y)$ n'a pas de limite en $(0,0)$

alors elle n'est pas continue en $(0,0)$

4) $f(x,y) = \begin{cases} e^{x-y} & \text{si } y \geq x \\ 1 \text{ si } & y < x \end{cases}$

* Il est clair que $f(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ avec $(y \geq x)$. (composition de deux fonctions continues)

* Il est clair que $f(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2 / (y < x)$ (car 1 est une constante)

Etudions la continuité au point $(x,y) / y = x$

Pour $y = x$, $f(x,y) = f(x,x) = e^{x-x} = e^{0} = 1$

on a $\lim\limits_{(x,y)\to(a,a)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to a} f(x,x) = 1 = e^{0}$

Comme $\lim\limits_{(x,y)\to(a,a)} e^{x-y} = e^{0} = 1 \quad \forall y \geq x$

et $\lim\limits_{(x,y)\to(a,a)} [1] = 1 \quad \forall y < x$, alors

Dans les deux cas la limite est égale à $\boxed{1}$

Donc f est continue pour $y = x$

en conclusion f est continue sur $\mathbb{R}^2$

Exercice n° 5

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{(x^2+y^2)^n} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ici il faut ajouter la condition que $n \in \mathbb{N}^*$

pour ne pas prendre plusieurs valeurs de n

1) Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Comme xy^2 et $(x^2+y^2)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ sont des fctions continue sur $\mathbb{R}^2$ et en particulier sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $(x^2+y^2)^n \neq 0$, alors $f(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2) Continuité au point $(0,0)$.

on pose $y = r\sin\theta$, $x = r\cos\theta$, $r \geq 0$

alors $f(x,y) = f(r,\theta) = \dfrac{r\cos\theta \cdot r^2\sin^2\theta}{(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)^n}$

$$= \frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^{2n}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^n} = r^3\,\frac{\cos\theta\sin^2\theta}{r^{2n}}$$

$$= \boxed{r^{(3-2n)}\cos\theta\sin^2\theta}$$

Donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\theta}} f(r,\theta)$

$= \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\theta}} r^{(3-2n)} \cos\theta \sin^2\theta$

$= \cos\theta \sin^2\theta \lim_{r\to 0} r^{(3-2n)} \quad \forall\theta$

or $\lim_{r\to 0} r^{3-2\theta} = 0$ si $3-2n>0$

alors f est continue en $(0,0)$

$\underline{\text{ssi}}$ $n<3/2$ Donc $\boxed{n=1}$

3/ Dérivées partielles d'ordre 1 en $(x,y)\neq(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2(x^2+y^2)^n - 2nx(x^2+y^2)^{n-1}\cdot xy^2}{(x^2+y^2)^{n+n}}$$

$$= \frac{y^2(x^2+y^2)(x^2+y^2)^{n-1} - 2nx^2y^2(x^2+y^2)^{n-1}}{(x^2+y^2)^{n-1}\cdot(x^2+y^2)^{n+1}}$$

$$= \frac{y^2(x^2+y^2) - 2nx^2y^2}{(x^2+y^2)^{n+1}} = \frac{y^2\left[y^2-(1-2n)x^2\right]}{(x^2+y^2)^{n+1}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2xy(x^2+y^2)^n - 2ny(x^2+y^2)^{n-1}\cdot xy^2}{(x^2+y^2)^{2n}}$$

$$= \frac{2xy(x^2+y^2)(x^2+y^2)^{n-1} - 2nxy^3(x^2+y^2)^{n-1}}{(x^2+y^2)^{n-1}\cdot(x^2+y^2)^{n+1}}$$

$$= \frac{2xy(x^2+y^2) - 2nxy^3}{(x^2+y^2)^{n+1}}$$

$$= \frac{2xy(x^2+y^2-ny^2)}{(x^2+y^2)^n} = \frac{2xy\left(x^2+(1-n)y^2\right)}{(x^2+y^2)^{n+1}}$$

4b) Dérivées partielles d'ordre 1 en $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0$$

Rq: ici on a par déf $f(0,0)=0$

puis pour $\frac{f(0,k)}{k}$ et $\frac{f(h,0)}{h}$ les limites sont nulles car les valeurs trouvées sont nulles avant de passer à la limite

8

Corrigé de la série n° 04

Exercice n° 1

1) $f(x,y) = e^x \sin y$. Il est clair que pour tout réel y $\boxed{\text{fixé}}$, la fonction $x \longmapsto e^x \underbrace{\boxed{\sin y}}_{\text{constante}}$ est dérivable $\forall x \in \mathbb{R}$.

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ existe dans $\mathbb{R}^2$. On fait de la même manière pour l'existence de $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ dans $\mathbb{R}^2$. Comme pour tout réel $\boxed{x \text{ fixé}}$, la fonction $y \longmapsto \underbrace{\boxed{e^x}}_{\text{constante}} \sin y$ est dérivable dans $\mathbb{R}$, alors $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existe dans $\mathbb{R}^2$

Rq « on procède de la même manière pour les autres fonctions »

2) Comme dérivées partielles du premier ordre

1/ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x \sin y$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^x \cos y$

2/ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \sin xy + y(x^2+y^2)\cos xy$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \sin(xy) + x(x^2+y^2)\cos xy$

5/ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2+1}$

3/ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$

4/ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + 3y^2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 6xy$

5/ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2+1}$

Exercice n°02

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Continuité de f en $(0,0)$

Pour vérifier si f est continue en $(0,0)$, on étudie la limite de $f(x,y)$ quand $(x,y) \to (0,0)$

a) Si on pose $y = x$, on trouve $f(x,y) = \dfrac{x\,x}{x^2+x^2} = \dfrac{1}{2}$

b) Si on pose $y = 2x$, on trouve $f(x,y) = \dfrac{x(2x)}{x^2+(2x)^2} = \dfrac{2}{5}$

Donc les limites dépendent du chemin suivi, alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas,

Par conséquent f n'est pas continue en $(0,0)$

2) Existence des dérivées partielles en $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \underset{\text{par définition}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0 \quad (\text{Existe}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \overset{\text{par déf}}{=} \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0 \quad (\text{existe}$$

« Donc les dérivées partielles du premier ordre existent »

3) Continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$. Pour $(x,y) \neq (0,0)$

on a $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(x^2+y^2) - xy(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \boxed{\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x(x^2+y^2) - xy(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \boxed{\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}}$

a) Continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,0)$

Si on pose $y = x$, on trouve $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x(0)}{2x^4} = 0$,

donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\partial f}{\partial x} = 0$

Si on pose $y = 0$, on trouve $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{0}{x^4} = 0$,

donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\partial f}{\partial x} = 0$,

mais si on pose $y = 2x$, on trouve

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x(4x^2 - x^2)}{(x^2+4x^2)^2} = \frac{6x^3}{25x^4} = \frac{6}{25x}$,

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\partial f}{\partial x} = +\infty$, alors la limite de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

dépend du chemin suivi, donc

$\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est

pas continue en $(0,0)$ car

$\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

b) continuité de $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$

on fait de la même manière que $\frac{\partial f}{\partial x}$.

cette fois-ci on prend un chemin $\boxed{x = \lambda y \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}}$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\lambda y(\lambda^2 y^2 - y^2)}{(\lambda^2 y^2 + y^2)^2} = \frac{\lambda(\lambda^2-1)\cdot y^3}{(1+\lambda^2)^2 y^4} =$$

$\frac{\lambda(\lambda^2-1)}{(1+\lambda^2)^2} \cdot \frac{1}{y}$ et $\lim\limits_{y \to 0} \frac{\partial f}{\partial y}$ tend vers $\pm\infty$

si $(\lambda \neq 0, \lambda \neq \pm 1)$, alors la limite de $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ quand $(x,y) \to (0,0)$ dépend du chemin suivi, ~~~~ par,

par conséquent $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ n'est pas continue en $(0,0)$. car $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

c) différentiabilité en $(0,0)$

f est différentiable en $(0,0) \Rightarrow$ f est continue en $(0,0)$. Comme f n'est pas ~~diff~~ continue en $(0,0)$, alors elle n'est pas différentiable

RQ : (vous pouvez utiliser les coordonnés polaires pour démontrer que $f(x,y)$ n'est pas continue en $(0,0)$

Posons $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r \geq 0$, on obtient $f(x,y) = f(r,\theta) = \dfrac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \boxed{\cos\theta\sin\theta}$

donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{r\to 0\\ \forall\theta}} f(r,\theta) = \boxed{\cos\theta\sin\theta}$

cette limite depend de θ, ~~donc la limite n'existe pas~~ donc la limite n'existe pas, alors f n'est pas continue en $(0,0)$. on peut aussi utiliser les coordonnées polaires pour la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice n° 3

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Continuite de f en $(0,0)$

si on pose $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r \geq 0$, alors

$$f(x,y) = \frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2} = r\cos^2\theta\sin\theta$$

Comme $|\cos^2\theta\sin\theta| \leq 1 \ \forall\theta$, alors

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\theta}} f(r,\theta) = 0 = f(0,0) \Rightarrow$$

f est continue en $(0,0)$

2) Calcul de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0$$

Car : $f(h,0) = \frac{h^2 \cdot 0}{h^2+0^2} = 0$ et $f(0,0)=0$

$f(0,k) = \frac{0^2 k}{0^2+k^2} = 0$

Donc $\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$

et $\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0$ avant de passer à la limite

3) Classe C^1 :

(Pour que f soit de classe C^1, il faut que $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ soient continues sur $\mathbb{R}^2$

Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy(x^2+y^2) - x^2y(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \boxed{\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2(x^2+y^2) - 2y^2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \boxed{\frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}}$$

Utilisation des Coordonnées polaires

Si on pose $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, $r \geq 0$

on trouve
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2r\cos\theta\, r\sin\theta\,(1) - r^2\cos\theta\, r\sin\theta\,(2r\cos\theta)}{(1)^2 \cdot (r^2)^2}$$
$$= \frac{2r^4\cos\theta\sin^3\theta}{r^4} = \boxed{\cos\theta\sin^3\theta}$$

et
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{r^2\cos^2\theta\,(r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta)}{r^4} =$$
$$\boxed{\cos^2\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}$$

Comme limite $\frac{\partial f}{\partial x}$ et lim $\frac{\partial f}{\partial y}$ quand $(x,y) \mapsto (0,0)$ dependent de θ, alors les limites n'existent pas en $(0,0)$, alors $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ ne sont pas continues en $(0,0)$, donc $f \notin C^1(\mathbb{R}^2)$

4) Différentiabilité en $(0,0)$

Rappel on dit que f est différentiable en (a,b) si $\exists$ une application linéaire (unique) notée $df(a,b)$ tel que :

$$f((a,b)+(h,k)) = f(a+h, b+k)$$
$$= f(a,b) + d f_{(a,b)}(h,k) + \|(h,k)\| \varepsilon(h,k)$$
avec $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0.$

$$\boxed{\text{on a } df(a,b)(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\, k}$$

Comme $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, alors

$$f(h,k) = \cancel{f(0,0)} + \cancel{\frac{\partial f}{\partial x}}(0,0)\, h + \cancel{\frac{\partial f}{\partial y}}(0,0)\, k + \|(h,k)\| \varepsilon(h,k).$$

$$\Rightarrow \varepsilon(h,k) = \frac{f(h,k)}{\|(h,k)\|}$$

avec $\|(h,k)\|$ est la norme $\| \|_2$ donnée par $\|(h,k)\|_2 = \sqrt{h^2+k^2}$ donc

on obtient $\varepsilon(h,k) = \dfrac{h^2 k}{(\sqrt{h^2+k^2})^2 \cdot \sqrt{h^2+k^2}}$

$$= \frac{h^2 \cdot k}{(h^2+k^2)^{3/2}}$$

si on pose $k = h$, on trouve

$$\varepsilon(h,k) = \frac{h^2 \cdot h}{\sqrt{8}\,(h^2+h^2)^{3/2}} = \frac{h^3}{\sqrt{8}\cdot(h^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\cancel{h^3}}{\sqrt{8}\cdot \cancel{h^3}} = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

donc $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = \lim_{h\to 0} \varepsilon(h,h) =$

$\frac{1}{\sqrt{8}} \neq 0$, alors f n'est pas differentiable en $(0,0)$.

5| Gradient $\nabla f(1,1)$ et la matrice Hessienne $Hf(1,1)$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

$(x,y) \neq (0,0)$

on a $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{2(1)(1)^3}{((1^2)+(1^2))^2} = 1/2.$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{1^2(1^2-1^2)}{(1^2+1^2)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) =$$

$$\frac{2y^3(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = -1/2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{2xy^2(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = 1/2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) =$$

$$-\frac{4yx^4}{(x^2+y^2)^3} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = -1/2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{2x(x^4+2x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \boxed{1/2}$$, alors

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

5) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ on a :

$$df(a,b)(h,k)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\, k$$

$$= \frac{2ab^2}{(a^2+b^2)^2}\, h + \frac{a^2(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2}\, k$$

pour $(a,b) = (1,1)$ on a $df(1,1) = \frac{1}{2} h$

pour $(a,b) = (2,0)$ on a $df(2,0) = \boxed{k}$

L'exercice n° 04 est laissé à la réflexion des étudiants