

# Table des matières

<b>1</b>	<b><i>Les équations différentielles</i></b>	<b>2</b>
1.1	<i>Équations différentielles d'ordre <math>n</math></i>	2
1.2	<i>Équation différentielle du premier ordre</i>	3
1.2.1	<i>Équation différentielle à variables séparés</i>	3
1.2.2	<i>Équations différentielles homogènes</i>	4
1.2.3	<i>Équations différentielles linéaires</i>	6
1.2.4	<i>Équations de Bernoulli</i>	8
1.2.5	<i>Équation de Riccati</i>	10
1.3	<i>Équations différentielles du second ordre à coefficients constants</i>	11
1.3.1	<i>L'équation homogène associée à (E) (sans second membre)</i>	11
1.3.2	<i>Résolution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 avec second membre</i>	12

# Chapitre 1

## *Les équations différentielles*

### *1.1 Équations différentielles d'ordre $n$*

**Définition 1.1.1 :**

*Soit  $\Omega$  une partie de  $\mathbb{R}^{n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) et  $\varphi$  une application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  ( $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ).*

*On appelle équation de la différentielle d'ordre  $n$ , l'équation*

$$\varphi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (E)$$

*où  $y$  est une fonction de la variable  $x$  et  $y', y'', \dots, y^{(n)}$  sont ses dérivées.*

- *L'ordre le plus grand de dérivation est appelé ordre de l'équation (E).*
- *Résoudre ou intégrer l'équation (E) c'est trouver toutes les fonctions  $y = f(x)$ ,  $y \in C^n(I, \mathbb{R})$  ( $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ) vérifient (E),  $\forall x \in I$ .*  
*une telle fonction s'appelle solution ou intégrale de l'équation (E).*

**Exemple 1.1.1 :**

- 1)  $y' = e^x$  est une équation différentielle du premier ordre.
- 2)  $xy' + y'' + y^3 = 0$  équation différentielle du deuxième ordre (second ordre).

## 1.2 Équation différentielle du premier ordre

Soient  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  et  $y : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions tels que  $y$  est dérivable sur  $I$ .

**Définition 1.2.1 :**

On appelle équation différentielle du premier ordre toute équation de type

$$y' = f(x, y) \quad (P)$$

On dit que (P) admet une solution  $y_0(x)$  si  $y_0' = f(x, y_0)$ .

### 1.2.1 Équation différentielle à variables séparés

Soient  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$  et  $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues sur  $I$  et  $J$  respectivement et  $\forall y \in J, g(y) \neq 0$ .

**Définition 1.2.2 :**

Une équation différentielle premier ordre est dite à variables séparées si elle peut s'écrire sous la forme  $y' = \frac{f(x)}{g(y)}$  où  $g(y) dy = f(x) dx$  une telle que différentielle peut s'intégrer facilement en effet:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \implies \int g(y) dy = \int f(x) dx \implies G(y) = F(x) + c$$

tel que  $G$  est une primitive de  $g$  et  $F$  est primitive de  $f$ . Donc

$$y = G^{-1}(F(x) + c).$$

**Exemple 1.2.1 :**

Résoudre sur  $I = ]1, +\infty[$  l'équation différentielle:  $xy' \ln x = (3 \ln x + 1) y$

$$xy' \ln x = (3 \ln x + 1) y \implies y' = \frac{(3 \ln x + 1) y}{x \ln x}$$

$$\begin{aligned}
&\implies \frac{y'}{y} = \frac{(3 \ln x + 1)}{x \ln x} \\
&\implies \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{(3 \ln x + 1)}{x \ln x} \\
&\implies \frac{dy}{y} = \frac{(3 \ln x + 1)}{x \ln x} dx \\
&\implies \int \frac{dy}{y} = \int \frac{(3 \ln x + 1)}{x \ln x} dx \\
&\implies \ln y = 3 \int \frac{\ln x}{x \ln x} dx + \int \frac{1}{x \ln x} dx \\
&\implies \ln y = 3 \ln |x| + \ln |\ln x| + c \\
&\implies \ln y = \ln (x^3 \ln x) + c \\
&\implies e^{\ln y} = e^{\ln(x^3 \ln x) + c} \\
&\implies y = e^c (x^3 \ln x) \\
&\implies y = k (x^3 \ln x) \quad \text{où } k = \pm e^c
\end{aligned}$$

### 1.2.2 Équations différentielles homogènes

La forme générale de ces équations est  $y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \implies \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$  où  $f$  est une fonction continue sur  $I \subset \mathbb{R}$ .

**Résolution de l'équation:**

On pose  $t = \frac{y}{x}$  pour se ramener à une équation à variables séparés,

$$\text{on pose } t = \frac{y}{x} \implies y = xt$$

Ainsi

$$dy = xdt + tdx \quad \text{et} \quad y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \implies \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\implies dy = f\left(\frac{y}{x}\right) dx$$

$$\implies xdt + tdx = f(t) dx$$

$$\implies xdt = (f(t) - t) dx$$

$$\implies \frac{dt}{f(t) - t} = \frac{dx}{x}$$

On est donc bien ramené au cas précédent (équation différentielle à variables séparés).

**Exemple 1.2.2 :**

Résoudre l'équation différentielle:  $(2x + y) dx - (4x - y) dy = 0$

$$(2x + y) dx - (4x - y) dy = 0 \implies (2x + y) dx = (4x - y) dy$$

$$\implies \frac{dy}{dx} = \frac{2x + y}{4x - y}; \quad ((4x - y) \neq 0)$$

$$\implies \frac{dy}{dx} = \frac{2 + \frac{y}{x}}{4 - \frac{y}{x}}$$

$$\implies dy = \left( \frac{2 + \frac{y}{x}}{4 - \frac{y}{x}} \right) dx$$

On pose

$$t = \frac{y}{x} \implies y = xt \implies dy = xdt + tdx$$

Alors

$$xdt + tdx = \left( \frac{2 + t}{4 - t} \right) dx \implies xdt = \left( \frac{2 + t}{4 - t} - t \right) dx$$

$$\implies xdt = \frac{t^2 - 3t + 2}{4 - t} dx$$

$$\implies \frac{dx}{x} = \left( \frac{4 - t}{t^2 - 3t + 2} \right) dt$$

$$\implies \ln|x| = \int \frac{4 - t}{t^2 - 3t + 2} dt = \int \frac{2}{t - 2} dt - \int \frac{3}{t - 1} dt$$

$$\implies \ln|x| = 2 \ln|t - 2| - 3 \ln|t - 1| + c$$

$$\implies \ln|x| = \ln|t - 2|^2 - \ln|t - 1|^3 + c$$

$$\implies \ln|x| = \ln \frac{|t - 2|^2}{|t - 1|^3} + c$$

$$\implies |x| = e^c \frac{|t - 2|^2}{|t - 1|^3} = k \frac{|t - 2|^2}{|t - 1|^3} \quad \text{où } k = \pm e^c$$

Alors

$$|x| = k \frac{\left| \frac{y}{x} - 2 \right|^2}{\left| \frac{y}{x} - 1 \right|^3} = k \frac{\left| \frac{y - 2x}{x} \right|^2}{\left| \frac{y - x}{x} \right|^3} = k |x| \frac{|y - 2x|^2}{|y - x|^3} \implies |y - x|^3 = k |y - 2x|^2$$

### 1.2.3 Équations différentielles linéaires

**Définition 1.2.3 :**

une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme:

$$y' + a(x)y = b(x) \quad (EDL)$$

où  $a$  et  $b$  sont des fonctions continues sur  $I \subset \mathbb{R}$ .

Cette équation différentielle on peut associer la même équation avec  $b(x) = 0$  c'est l'équation homogène associée à l'équation différentielle ou équation sans second membre on la note (E.H).

i.e.

$$y' + a(x)y = 0 \quad (E.H)$$

#### 1- Résolution de l'équation homogène associée:

Équation homogène (EH) est une équation à variable séparée:

$$\begin{aligned} y' + a(x)y = 0 &\implies \frac{y'}{y} = -a(x) \\ &\implies \ln |y| = -\int a(x) dx + c \\ &\implies y = ke^{-\int a(x) dx}; \quad k = \pm e^c \\ &\implies y = ke^{F(x)}; \quad k = \pm e^c \text{ et } F(x) = -\int a(x) dx \end{aligned}$$

#### 2- Solution particulière par variation de la constante:

On cherche la solution particulière sous la forme  $y_p = k(x)e^{F(x)}$  avec  $k$  une fonction à déterminer;  $y'_p = k'(x)e^{F(x)} + k(x)F'(x)e^{F(x)}$

et on a:

$$\begin{aligned}
y' + a(x)y = b(x) &\implies k'(x)e^{F(x)} + k(x)F'(x)e^{F(x)} + a(x)k(x)e^{F(x)} = b(x) \\
&\implies k'(x)e^{F(x)} = b(x) \\
&\implies k'(x) = b(x)e^{-F(x)} \\
&\implies k(x) = \int b(x)e^{-F(x)}dx
\end{aligned}$$

Donc la solution particulière est:

$$y_p = e^{F(x)} \int b(x) e^{-F(x)} dx$$

La solution générale de l'équation (E.D.L) est:

$$y = y_H + y_p = e^{F(x)} \left( k + \int b(x) e^{-F(x)} dx \right) \quad \text{où } F(x) = - \int a(x) dx$$

**Exemple 1.2.3 :**

Résoudre sur  $I = ]0, \frac{\pi}{2}[$  l'équation différentielle

$$y' \sin x - y \cos x = x \quad (E.D.L)$$

1) l'équation homogène (équation sans second membre) (E.H):

$$y' \sin x - y \cos x = 0 \implies y' \sin x = y \cos x$$

$$\begin{aligned}
&\implies \frac{y'}{y} = \frac{\cos x}{\sin x} \\
&\implies \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x} \\
&\implies \frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\sin x} dx \\
&\implies \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \\
&\implies \ln y = \ln \sin x + c \\
&\implies y = e^c \sin x \\
&\implies y = k \sin x; \quad k = \pm e^c
\end{aligned}$$

2) cherchons la solution particulière:

la solution particulière sous la forme  $y = k(x) \sin x \implies y' = k'(x) \sin x + k(x) \cos x$ .

$$\begin{aligned}
 (EDL) &\implies (k'(x) \sin x + k(x) \cos x) \sin x - k(x) \sin x \cos x = x \\
 &\implies k'(x) \sin^2 x + k(x) \cos x \sin x - k(x) \sin x \cos x = x \\
 &\implies k'(x) \sin^2 x = x \\
 &\implies k'(x) = \frac{x}{\sin^2 x} \\
 &\implies k(x) = \int \frac{x}{\sin^2 x} dx
 \end{aligned}$$

on intègre par parties

on pose  $\left\{ \begin{array}{l} u = x \\ v' = \frac{1}{\sin^2 x} \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} u' = dx \\ v = -\frac{1}{\tan x} \end{array} \right.$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x}{\sin^2 x} dx &= -\frac{x}{\tan x} + \int \frac{1}{\tan x} dx \\
 &= -\frac{x}{\tan x} + \ln |\sin x| + c
 \end{aligned}$$

donc  $k(x) = -\frac{x}{\tan x} + \ln |\sin x| + c$

Alors

$$y_p = k(x) \sin x = -x \cos x + \sin x \ln |\sin x| + c$$

la solution générale

$$\begin{aligned}
 y &= y_H + y_p \\
 &= k \sin x - x \cos x + \sin x \ln |\sin x| \\
 &= -x \cos x + (k + \ln |\sin x|) \sin x; \quad k \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

### 1.2.4 Équations de Bernoulli

$$y' + a(x)y = b(x)y^k \tag{E.B}$$

Une équation de Bernoulli est de la forme

$$y' + a(x)y = b(x)y^k; \quad k \neq 0, k \neq 1, k \in \mathbb{R}$$

$a(x)$  et  $b(x)$  sont des fonctions continues sur  $I$ .

lorsque  $k = 0$  ou  $k = 1$  une telle équation est linéaire.

**Méthode de résolution:**

Division (E.B) par  $y^k$ , on obtient

$$y'y^{-k} + a(x)y^{1-k} = b(x) \quad (E.B')$$

or, on peut remarque que:  $y'y^{-k} = \left(\frac{y^{1-k}}{1-k}\right)'$ ; donc on pose  $z = y^{1-k}$  il vient  $z' = (1-k)y'y^{-k}$ , remplaçant dans (E.B')

$$\frac{z'}{1-k} + a(x)z = b(x)$$

on est donc ramené à une équation différentielle linéaire.

**Exemple 1.2.4 :**

Résoudre l'équation de Bernoulli

$$xy' - y = 2xy^2, \quad k = 2 \quad (E.b)$$

$$(E.b) \implies xy'y^{-2} - y^{-1} = 2x$$

posons

$$z = \frac{1}{y} = y^{-1} \implies z' = -\frac{y'}{y^2} = -y'y^{-2}$$

alors

$$(E.B) \implies -xz' - z = 2x$$

l'équation homogène associée à (E.B) est

$$-xz' - z = 0 \implies -xz' = z$$

$$\implies \frac{z'}{z} = -\frac{1}{x}$$

$$\implies \int \frac{z'}{z} dx = -\int \frac{1}{x} dx$$

$$\implies \ln|z| = -\ln|x| + c$$

$$\implies z = e^{\ln \frac{1}{|x|} + c} = k \frac{1}{|x|}, \quad k \pm e^c$$

la solution particulière de (E.B) :

Remarquons que  $z = -x$  est une solution particulière de (E.B) donc la solution générale est

$$z = \frac{k}{|x|} - x$$

$$z = \frac{1}{y} \implies y = \frac{1}{z} \implies y = \frac{1}{\frac{k}{|x|} - x} = \frac{|x|}{k - x|x|}.$$

### 1.2.5 Équation de Riccati

Une équation de Riccati est de la forme

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = f(x) \quad (E.R)$$

On ne peut la résoudre que si l'on connaît une solution particulière  $y_p$ .

on pose  $z = y - y_p \implies y = z + y_p \implies z' = y' - y_p' \implies y' = z' + y_p'$  et  $y^2 = z^2 + y_p^2 + 2zy_p$ .

ce qui permet d'arriver à:

$$z' + (a(x) + 2y_p b(x))z = -b(x)z^2$$

une équation de Bernoulli avec  $k = 2$ .

**Exemple 1.2.5 :**

$$\begin{cases} e^{-x}y' - 2e^xy + y^2 = 1 - e^{2x} \\ y_p = e^x \end{cases} \quad (E.r)$$

Posons  $z = y - y_p = y - e^x \implies y = z + e^x \implies y' = z' + e^x$  et  $y^2 = z^2 + e^{2x} + 2ze^x$ .

Remplaçant dans (E.r) on obtient:

$$\begin{aligned} (E.r) &\iff e^{-x}(z' + e^x) - 2e^x(z + e^x) + z^2 + 2ze^x + e^{2x} = 1 - e^{2x} \\ &\iff e^{-x}z' + z^2 = 0 \\ &\iff e^{-x}z' = -z^2 \\ &\iff \frac{z'}{z^2} = -e^x \\ &\iff \int \frac{z'}{z^2} dx = \int -e^x dx \\ &\iff -\frac{1}{z} = -e^x + c \\ &\iff z = \frac{1}{e^x - c} \end{aligned}$$

Alors la solution générale de (E.r) est

$$y = z + e^x \implies y = \frac{1}{e^x - c} + e^x$$

### 1.3 Équations différentielles du second ordre à coefficients constants

Les équations différentielles d'ordre 2 sont de la forme générale  $F(x, y, y'; y'') = 0$  comme pour les équations différentielles du 1<sup>er</sup> ordre on distingue les équations différentielles d'ordre 2 sans et avec second membre puis les équations différentielles linéaires d'ordre 2 sans et avec second membre on s'intéresse aux équations différentielles linéaires du second ordre où les coefficients sont des constantes réelles.

**Définition 1.3.1 :**

Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est une équation différentielle de la forme:

$$ay'' + by' + cy = f(x) \quad (E)$$

où  $a, b, c \in \mathbb{R} (a \neq 0)$  et  $f \in C^0(I)$ .

#### 1.3.1 L'équation homogène associée à (E) (sans second membre)

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (E.H)$$

Résolution de l'équation (E.H):

On considère l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (E.H)$$

on remarque que la fonction nulle est solution de (E.H) et on va chercher une condition sur  $r$  pour que  $e^{rx}$  soit une solution de (E.H) où  $r$  un réel.

$$y = e^{rx} \implies y' = re^{rx} \implies y'' = r^2 e^{rx}$$

Donc l'équation différentielle (E.H) devient:

$$e^{rx} (ar^2 + br + c) = 0 \quad , \quad e^{rx} \neq 0$$

donc

$$\varphi(x) = ar^2 + br + c = 0 \quad (E.C)$$

c'est ce que l'on appelle équation caractéristique de l'équation (E.H). Donc la forme des solutions de (E.H) dépend du déterminant  $\Delta$

**Proposition 1.3.1 :**

Suivant le signe de  $\Delta = b^2 - 4ac$ . On a les résultats suivants:

- 1) Si  $\Delta > 0$  alors l'équation (E.C) admet deux racines distincts  $r_1, r_2$  et (E.H) admet deux solutions  $y_1 = e^{r_1x}$  et  $y_2 = e^{r_2x}$ . Donc la solution générale de l'équation (E.H) est

$$y_H = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} \quad \text{avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- 2) Si  $\Delta = 0$  alors l'équation (E.C) admet une racine double  $r_0 = \frac{-b}{2a}$  et (E.H) admet la solution particulière et la solution générale de l'équation (E.H) est

$$y_H = (c_1x + c_2)e^{r_0x} \quad \text{avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- 3) Si  $\Delta < 0$  alors l'équation (E.C) admet deux racines complexes conjugués  $r_1 = \alpha + i\beta$ ,  $r_2 = \alpha - i\beta$ . Donc la solution générale de l'équation (E.H) est

$$y_H = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) \quad \text{avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

**1.3.2 Résolution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 avec second membre**

Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 est de la forme  $ay'' + by' + cy = f(x)$  ce équation avec second membre résolvent en deux étapes:

- 1) On intègre d'abord l'équation sans second membre on obtient  $y_H$ .
- 2) On résoudre l'équation avec second membre en cherchant une solution particulière  $y_p$  de (E) et dans ce cas  $y = y_H + y_p$ .

**Proposition 1.3.2** : (Solution particulière de l'équation avec second membre)

Suivant l'expression du second membre, nous allons résumer les solutions particulières possibles dans le cas de l'équation différentielle avec second membre:

- Si  $f(x) = P_n(x)$  avec  $d^0P = n$  on cherche une solution particulière de la forme  $x^k P_n(x) = Q_n(x)$ 
  - \*  $k = 0$  si  $r$  n'est pas solution de l'équation  $\varphi(r) = 0$  (l'équation caractéristique (E.C)).
  - \*  $k = 1$  si  $r$  est une racine de l'équation  $\varphi(r) = 0$ .
  - \*  $k = 2$  si  $r$  est une racine double de l'équation  $\varphi(r) = 0$ .On seulement  $y_p = Q_n(x)$ ,  $Q_n$  est un polynôme de degré  $n$ .
- Si  $f(x) = e^{rx} (\lambda \cos \theta x + \mu \sin \theta x)$ ,  $\theta \in \mathbb{R}^*$ .
  - \* Si  $r + i\theta$  et  $r - i\theta$  ne sont pas des racines de (E.C), on cherche une solution particulière de la forme  $y_p = e^{rx} (\alpha \cos \theta x + \beta \sin \theta x)$
  - \* Si  $r + i\theta$  et  $r - i\theta$  sont des racines de (E.C), alors  $y_p = x e^{rx} \left( \frac{\lambda}{2\theta} \sin \theta x - \frac{\mu}{2\theta} \cos \theta x \right)$ .
- Si  $f(x) = e^{\alpha x} . P_n(x)$  avec  $d^0P = n$  alors  $y_p = x^k e^{\alpha x} . P_n(x)$ 
  - \*  $k = 0$  si  $\alpha$  n'est pas solution de l'équation  $\varphi(r) = 0$ .
  - \*  $k = 1$  si  $\alpha$  est une racine de l'équation  $\varphi(r) = 0$ .
  - \*  $k = 2$  si  $\alpha$  est une racine double de l'équation  $\varphi(r) = 0$ .