1.1 Introduction

Les lois de la physique et de la mécanique ainsi que de nombreux phénomènes chimiques, biologiques ou économiques se ramènent à la recherche de fonctions dont les dérivées vérifient certaines relations.

1.2 Généralités

Définition 1.1 *On appelle "équation différentielle" toute équation dans laquelle figurent une fonction inconnue y d'une variable x et ses dérivées de différents ordres*

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(k)}\right) = 0, \tag{1.1}$$

où F est une relations liant x à la fonction y et ses dérivés $y', ..., y^{(k)}$.

*On appelle "**ordre**" de l'équation différentielle, l'ordre de la dérivée la plus élevée, figurant dans l'équation.*

Une telle équation différentielle (1.1) est dite équation différentielle ordinaire (EDO) car la fonction inconnue est une fonction d'une seule variable.

Exemple 1.1 $y'' + (y')^3 + 2y = 0$ *est une équation différentielle d'ordre* 2.

$y' + xy + \frac{x}{x+1} = 0$ *est une équation différentielle d'ordre* 1.

$x^2y'' + xy' + 2y^4 = 0$ *est une équation différentielle d'ordre* 2.

$xy''' + 2y + xe^x = 0$ *est une équation différentielle d'ordre* 3.

$y''' + 2y^{(8)} = xe^x y'$ *est une équation différentielle d'ordre* 8.

Définition 1.2 *On appelle "solution" (ou intégrale) de l'équation différentielle (1.1) tout couple (I, f) formé d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ et d'une fonction f , vérifiant les conditions suivantes :*

1) f est $k-$fois dérivable sur I.

2) $\forall x \in I,\ F\left(x, f(x), f'(x), f''(x), ..., f^{(k)}(x)\right) = 0$.

Si f est une solution de l'équation différentielle (1.1), alors le graphe de f est appelé courbe intégrale de cette équation.

Définition 1.3 *Si la seule solution prolongeant f, est f elle même, on dira alors que f est une "solution maximale".*

Exemple 1.2 $y = e^x$ *est une solution définie sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle* $y'' - y = 0$. *($y = e^x$ est une solution maximale).*

Remarque 1.1 *Résoudre (ou intégrer) une équation différentielle, c'est en trouver toutes les solutions quand elles existent.*

1.3 Equations différentielles du premier ordre

Définition 1.4 *La forme générale d'une équation différentielle du premier ordre est :*

$$F(x, y, y') = 0,$$

où F est une relations liant x à la fonction y et sa dérivée y'.

Le plus souvent, les équations différentielles du premier ordre sont étudiées sous leurs formes résolues en $y' = f(x, y)$,où $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exemple 1.3 $xy' + 2y^4 + \ln x = 0$ *est une équation différentielle d'ordre* 1.

$xy' + 2y + xe^x = 0$ *est une équation différentielle d'ordre* 1.

$x(y')^3 + 2y = 0$ *est une équation différentielle d'ordre* 1.

$y' = xy^3 + \frac{x}{x+1}$ *est une équation différentielle d'ordre* 1.

Problème de Cauchy :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

relatif à l'équation $y' = f(x, y)$ et à la condition $y_0 = y(x_0), x_0 \in I$, consiste à chercher la solution maximale de l'équation $y' = f(x, y)$ telle que $y_0 = y(x_0)$.

1.3.1 Equations différentielles à variables séparées

Définition 1.5 *On appelle "équation différentielle à variables séparées" toute équation de la forme :*

$$f(y)\, y' = g(x),$$

où f et g sont deux fonctions réelles définies et continues respectivement sur les intervalles I et J de $\mathbb{R}$.

On a : $y' = \dfrac{dy}{dx}$, donc l'équation peut s'écrire aussi comme :

$$f(y)\, dy = g(x)dx.$$

Résolution d'une équations différentielles à variables séparées :

Une telle équation différentielle à variables séparées se résout par calcul de primitives de f et g comme suit :

On a :

$$\begin{array}{lll} & f(y)\,y' & = & g(x) \\ \Rightarrow & f(y)\,dy & = & g(x)dx \\ \Rightarrow & \int f(y)\,dy & = & \int g(x)dx \\ \Longrightarrow & F(y) & = & G(x)+c/\ c\in\mathbb{R}. \end{array}$$

où F est une primitive de f sur I et G est une primitive de g sur J .

Enfin, on va résoudre cette équation (algébrique) : $F(y) = G(x)+c$ de l'inconnu y.

Voici des exemples concrets :

Exemple 1.4 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$xy' + e^y = 0. \tag{1.2}$$

On commence par séparer les variables : x d'un côté et y de l'autre côté.

On a :

$$\begin{aligned} (1.2) \Rightarrow\ & xy' = -e^y, \\ \Rightarrow\ & x\frac{dy}{dx} = -e^y, \\ \Rightarrow\ & -e^{-y}dy = \frac{1}{x}dx,\ \textit{(en supposant } x\neq 0\textit{)}, \\ \Rightarrow\ & \int\left(-e^{-y}\right)dy = \int\frac{1}{x}dx, \\ \Rightarrow\ & e^{-y} = \ln|x| + c/\ c\in\mathbb{R}, \\ \Rightarrow\ & -y = \ln\left(\ln|x|+c\right)/\ c\in\mathbb{R}\ \textit{(en supposant } \ln|x|+c>0\textit{)}, \\ \Rightarrow\ & y(x) = -\ln\left(\ln|x|+c\right)/\ c\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Alors

$$y(x) = -\ln\left(\ln|x|+c\right)/\ c\in\mathbb{R},$$

est la solution générale de l'équation différentielle (1.2) *.*

Exemple 1.5 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$\left(1+x^2\right)y' - xy = 0. \tag{1.3}$$

On a : $y = 0$ est une solution triviale (évidente) de (1.3). On suppose que $y \neq 0$, et on commence à séparer les variables : x d'un côté et y de l'autre côté.

On a :

$$\begin{aligned}
(1.3) \quad & \Rightarrow \quad \left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx} = xy, \\
& \Rightarrow \quad \left(1+x^2\right)dy = xydx, \\
& \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{x}{1+x^2}dx, \\
& \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{1+x^2}dx, \\
& \Rightarrow \quad \ln|y| = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + c/\ c \in \mathbb{R}, \\
& \Rightarrow \quad |y| = e^{\ln\sqrt{1+x^2}+\ln k}/\ k \in \mathbb{R},\ \text{où}\ \left(c = \ln k\right), \\
& \Rightarrow \quad |y| = e^{\ln\left(k\sqrt{1+x^2}\right)}/\ k \in \mathbb{R}, \\
& \Rightarrow \quad |y| = k\sqrt{1+x^2}/\ k \in \mathbb{R}, \\
& \Rightarrow \quad y = \pm k\sqrt{1+x^2}/\ k \in \mathbb{R}, \\
& \Rightarrow \quad y = \lambda\sqrt{1+x^2}/\ \lambda \in \mathbb{R},\ \text{où}\ \left(\lambda = \pm k\right).
\end{aligned}$$

Finalement, les solutions de l'équation (1.3) sont :

$$y(x) = \lambda\sqrt{1+x^2}/\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Elles sont définies sur $\mathbb{R}$.

1.3.2 Equations différentielles homogènes en x et y.

Définition 1.6 *On appelle "équations différentielles homogènes en x et y" toute équation de la forme :*

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

où $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Résolution d'une équations différentielles homogènes :

On utilise ce changement d'inconnue $u = \frac{y}{x}$ $(y = xu)$ qui donne $y' = u + xu'$. Par suite on a :

$$\begin{aligned}
y' &= f\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow u + xu' = f(u)\,, \\
&\Rightarrow x\frac{du}{dx} = f(u) - u,\ (u' = \frac{du}{dx}), \\
&\Rightarrow \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}, \\
&\Rightarrow \int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}, \\
&\Rightarrow \int \frac{du}{f(u) - u} = \ln|x| + c/\ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

On détermine u puis y, on obtient la solution générale grâce à la relation $y = xu$.

Voici des exemples concrets :

Exemple 1.6 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$xyy' - y^2 + x^2 = 0. \tag{1.4}$$

Si on suppose que $xy \neq 0$, *on a :*

$$\begin{aligned}
(1.4) \quad &\Rightarrow \quad y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}, \\
&\Rightarrow \quad y' = \left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)},
\end{aligned}$$

c'est une équation différentielle homogène.

On pose le changement de variable : $u = \frac{y}{x}$ *qui donne* $y' = u + xu'$, *en remplace dans* (1.4)

$$\begin{aligned}
(1.4) \quad &\Rightarrow \quad u + xu' = u - \frac{1}{u}, \\
&\Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = \frac{-1}{u}, \\
&\Rightarrow \quad udu = -\frac{dx}{x}, \\
&\Rightarrow \quad \int udu = \int -\frac{dx}{x}, \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2}u^2 = -\ln|x| + c/\ c \in \mathbb{R}, \\
&\Rightarrow \quad u = \pm\sqrt{-2\ln|x| + 2c}/\ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Mais : $y = xu$*, d'où*

$$y(x) = \pm x\sqrt{-2\ln|x| + 2c} /\ c \in \mathbb{R}.$$

c'est la solution générale de l'équation différentielle (1.4) .

Exemple 1.7 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$x^2 y' - xy + y^2 = 0. \tag{1.5}$$

Si on suppose que $x \neq 0$*, on a :*

$$\begin{aligned} (1.5) \quad &\Rightarrow \quad y' = \frac{xy}{x^2} - \frac{y^2}{x^2}, \\ &\Rightarrow \quad y' = \left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{y}{x}\right)^2, \end{aligned}$$

c'est une équation différentielle homogène.

On pose le changement de variable : $u = \frac{y}{x}$ *qui donne* $y' = u + xu'$*, on remplace dans* (1.5) *:*

$$\begin{aligned} (1.5) \quad &\Rightarrow \quad u + xu' = u - u^2, \\ &\Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = -u^2, \\ &\Rightarrow \quad \frac{-du}{u^2} = \frac{dx}{x}, \\ &\Rightarrow \quad \int \frac{-du}{u^2} = \int \frac{dx}{x}, \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{u} = \ln|x| + c /\ c \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow \quad u = \frac{1}{c + \ln|x|} /\ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Mais : $y = xu$*, d'où*

$$y(x) = \frac{x}{c + \ln|x|} /\ c \in \mathbb{R}.$$

c'est la solution générale de l'équation différentielle (1.5) .

1.3.3 Equations différentielles linéaires du premier ordre

Définition 1.7 *On appelle "équation différentielle linéaire du premier ordre" toute équation de la forme :*

$$y' = a(x)\, y + b(x), \tag{1.6}$$

où a et b sont deux fonctions réelles définies et continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

On lui associe l'équation sans second membre :

$$y' = a(x)\,y. \tag{1.7}$$

L'équation (1.7) est dite équation différentielle homogène associée à l'équation (1.6) (ou l'équation sans second membre).

Résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre :

a) Résolution de l'équation homogène (1.7) :

Soit l'équation (1.7)

$$y' = a(x)\,y.$$

Si $y \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
(1.7) \quad &\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = a(x)dx, \\
&\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int a(x)dx, \\
&\Rightarrow \quad \ln|y| = \int a(x)dx + k / \ k \in \mathbb{R}, \\
&\Rightarrow \quad |y| = \exp\left(\int a(x)dx + k\right) / \ k \in \mathbb{R}, \\
&\Rightarrow \quad y = c\exp\left(\int a(x)dx\right) / \ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

D'où

$$y_h(x) = c\exp\left(\int a(x)dx\right) / \ c \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (1.7) .

Résolution de l'équation avec second membre

Proposition 1.1 *La solution générale y de (1.6) est la somme de la solution générale y_h de (1.7) et d'une solution particulière de (1.6) .*

$$y = y_p + y_h = y_p + c\exp\left(\int a(x)dx\right) / \ c \in \mathbb{R}.$$

b) Recherche d'une solution particulière (Méthode de la variation de la constante) :

C'est une méthode générale pour trouver une solution particulière en se ramenant à un calcul de primitives.

On a : $y_h(x) = c\exp\left(\int a(x)dx\right) \ / \ c \in \mathbb{R}$, est la solution générale de (1.7) avec c une constante. La méthode de la variation de la constante consiste à chercher une solution particulière sous la forme $y(x) = c\,(x)\exp\left(\int a(x)dx\right)$, où c est maintenant une fonction de la variable x à déterminer.

On pose :

$$y(x) = c\,(x)\exp\left(\int a(x)dx\right),$$

donc

$$y'(x) = c'\,(x)\exp\left(\int a(x)dx\right) + a(x)c\,(x)\exp\left(\int a(x)dx\right)$$

En remplaçant y et y' dans (1.6) on obtient :

$$c'\,(x)\exp\left(\int a(x)dx\right)+a(x)c\,(x)\exp\left(\int a(x)dx\right) = a\,(x)\,c\,(x)\exp\left(\int a(x)dx\right)+b(x)$$

$$\Rightarrow c'\,(x)\exp\left(\int a(x)dx\right) = b(x)$$

$$\Rightarrow c'\,(x) = b(x)\exp\left(-\int a(x)dx\right),$$

par conséquent

$$c\,(x) = \int\left(b(x)\exp\left(-\int a(x)dx\right)\right)dx + \lambda, \ \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Finalement la solution générale de (1.6) est

$$y(x) = \left(\int\left(b(x)\exp\left(-\int a(x)dx\right)\right)dx + \lambda\right)\exp\left(\int a(x)dx\right), \ \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.8 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y' = 3y + 1 - 2e^x, \tag{1.8}$$

puis résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' = 3y + 1 - 2e^x, \\ y\,(0) = 2. \end{cases} \tag{1.9}$$

L'équation homogène associée est

$$y' = 3y \tag{1.10}$$

Remarquons que : $y = 0$ *est une solution évidente de* (1.10).

On suppose que $y \neq 0$ *:*

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} = 3 &\Rightarrow \int \tfrac{dy}{y} = \int 3dx, \\ &\Rightarrow \ln|y| = 3x + k, \ k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow y = \pm e^k e^{3x}, \ k \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow y = ce^{3x}, \ c \in \mathbb{R} \ \ (c = \pm e^k). \end{aligned}$$

Alors

$$y_h(x) = ce^{3x}, c \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (1.10).

On utilise la méthode de variation de la constante :

On pose : $y(x) = c(x)e^{3x} \Rightarrow y'(x) = c'(x)e^{3x} + 3c(x)e^{3x}$. *En remplaçant* y *et* y' *dans* (1.8) *on obtient :*

$$\begin{aligned} (E) \quad &\Rightarrow c'(x)e^{3x} + 3c(x)e^{3x} = 3c(x)e^{3x} + 1 - 2e^x, \\ &\Rightarrow c'(x)e^{3x} = 1 - 2e^x, \\ &\Rightarrow c'(x) = e^{-3x} - 2e^{-2x}, \\ &\Rightarrow c(x) = \tfrac{-1}{3}e^{-3x} + e^{-2x} + \lambda, \ \ \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc

$$y(x) = \left(\frac{-1}{3}e^{-3x} + e^{-2x} + \lambda\right)e^{3x} = \frac{-1}{3} + e^x + \lambda e^{3x}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$y(x) = \lambda e^{3x} + e^x - \frac{1}{3}, \ \lambda \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (1.8).

Pour le problème de Cauchy (1.9) *on a :*

$$\begin{aligned} y(0) = 2 \quad &\Rightarrow \lambda + 1 - \tfrac{1}{3} = 2, \\ &\Rightarrow \lambda = \tfrac{4}{3}. \end{aligned}$$

Donc

$$y(x) = \frac{4}{3}e^{3x} + e^x - \frac{1}{3},$$

est la solution du problème de Cauchy (1.9).

1.3.4 Equation différentielle de Bernoulli

Définition 1.8 *On appelle "équation différentielle de Bernoulli" toute équation de la forme :*

$$y' + a(x)\,y + b(x)y^\alpha = 0. \tag{1.11}$$

où $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ et a, b sont deux fonctions réelles définies et continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Remarque 1.2 *On sait déjà traiter les cas $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$, car (1.11) est alors une équation différentielle linéaire du premier ordre.*

Pour chercher les solutions de l'équation différentielle de Bernoulli (1.11), on divise par y^α

$$(1.11) \Leftrightarrow \frac{y'}{y^\alpha} + a(x)\left(\frac{y}{y^\alpha}\right) + b\,(x) = 0,$$

puis on pose : $z = \frac{y}{y^\alpha} = y^{1-\alpha}$ comme un changement de variable, et par conséquent : $z' = (1-\alpha)\,y^{-\alpha}y'$ d'où $y' = \frac{y^\alpha}{1-\alpha}z'$. En remplaçant y et y' dans (1.11) on obtient :

$$(1.11) \Leftrightarrow \frac{z'}{1-\alpha} + a(x)z + b\,(x) = 0,$$

qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre d'inconnue z.

Exemple 1.9 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$xy' + y + x^2y^2 = 0. \tag{1.12}$$

Cette équation (1.12) est de Bernoulli.

$$(1.12) \Longleftrightarrow \frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{y}\right) + x = 0, \ \text{pour } xy \neq 0$$

En posant $z = \frac{1}{y}$, on aura : $z' = \frac{-1}{y^2}y' \Rightarrow y' = -y^2z'$. En remplaçant y et y' dans (1.12) on obtient :

$$z' = \frac{1}{x}z + x, \tag{1.13}$$

l'équation (1.13) est une équation différentielle linéaire du premier ordre d'inconnue z.

L'équation homogène associée à (1.13) est

$$z' = \frac{1}{x}z. \tag{1.14}$$

Résolution de l'équation (1.14) :

$$\begin{aligned}(1.14) \quad &\Rightarrow \quad \tfrac{z'}{z} = \tfrac{1}{x},\\ &\Rightarrow \quad \ln|z| = \ln|x| + k,\ k \in \mathbb{R},\\ &\Rightarrow \quad |z| = e^{\ln|x|+k},\ k \in \mathbb{R},\\ &\Rightarrow \quad z = \pm e^k x,\ k \in \mathbb{R},\\ &\Rightarrow \quad z = cx,\ c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

D'où

$$z_h(x) = cx, c \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (1.14) *.*

On utilise la méthode de variation de la constante :

On pose : $z(x) = c(x)x$, *donc :*$z'(x) = c'(x)x + c(x)$. *En remplaçant* z *et* z' *dans* (1.13), *on obtient :*

$$\begin{aligned}(1.13) \quad &\Rightarrow \quad c'(x) = 1,\\ &\Rightarrow \quad c(x) = \int 1dx,\\ &\Rightarrow \quad c(x) = x + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

D'où

$$z(x) = x(x+\lambda), \lambda \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (1.13) *.*

Par conséquent : $z = \frac{1}{y} = x(x+\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$. *C'est à dire :*

$$y(x) = \frac{1}{x(x+\lambda)} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de l'équation différentielle de Bernoulli (1.12) *.*

1.3.5 Equation de Riccati

Définition 1.9 *On appelle "équation différentielle de Riccati" toute équation de la forme :*

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x), \tag{1.15}$$

où a, b *et* c *sont trois fonctions réelles définies et continues sur un intervalle ouvert* I *de* $\mathbb{R}$.

Ce type d'équations différentielles n'est pas toujours résoluble de façon élémentaire. Mais si une solution particulière y_p pouvait être trouvée, on pourrait alors ramener la résolution de l'équation de Riccati à celle d'une équation différentielle linéaire. En effet, en posant le changement de variable : $y = y_p + z$, donc $y' = y'_p + z'$, En remplaçant y et y' dans (1.15) on obtient :

$$\begin{array}{lll}(E) & \Leftrightarrow & y'_p + z' = a(x)(y_p+z)^2 + b(x)(y_p+z) + c(x), \\ & \Leftrightarrow & y'_p + z' = a(x)y_p^2 + 2a(x)y_pz + a(x)z^2 + b(x)y_p + b(x)z + c(x), \\ & \Leftrightarrow & y'_p + z' = a(x)\left(y_p^2 + 2y_pz + z^2\right) + b(x)(y_p+z) + c(x), \\ & \Leftrightarrow & \left[y'_p - \left(a(x)y_p^2 + b(x)y_p + c(x)\right)\right] + z' = (2a(x)y_p + b(x))z + a(x)z^2, \\ \text{on a} & : & y'_p - \left(a(x)y_p^2 + b(x)y_p + c(x)\right) = 0 \text{ car } y_p \text{ est une solution (1.15).}\end{array}$$

Donc on aura :

$$z' = (2a(x)y_p + b(x))z + a(x)z^2,$$

qui est une équation de Bernoulli, comme on l'a vu plus haut.

Exemple 1.10 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y' = -y^2 + \frac{1}{x}y - \frac{1}{x^2}. \tag{1.16}$$

(Indication : $y_p = \frac{1}{x}$ est une solution particulière de (1.16)).

On a : (1.16) est une équation différentielle de Riccati. Donc on pose le changement de variable : $y = \frac{1}{x} + z$, alors : $y' = -\frac{1}{x^2} + z'$, En remplaçant y et y' dans (1.16) on obtient :

$$\begin{array}{lll}(1.16) & \Leftrightarrow & -\frac{1}{x^2} + z' = -\left(\frac{1}{x}+z\right)^2 + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}+z\right) - \frac{1}{x^2}, \\ & \Leftrightarrow & z' + \frac{1}{x}z + z^2 = 0,\end{array}$$

d'où

$$\frac{z'}{z^2} + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{z}\right) + 1 = 0, \tag{1.17}$$

l'équation (1.17) est une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$.

En posant $u = \frac{1}{z}$, on aura $u' = \frac{-1}{z^2}z'$, d'où $z' = -z^2u'$. En remplaçant z et z' dans (1.17) on obtient :

$$\begin{array}{lll}(1.17) & \Leftrightarrow & \frac{-z^2u'}{z^2} + \frac{1}{x}u + 1 = 0, \\ & \Leftrightarrow & -u' + \frac{1}{x}u + 1 = 0,\end{array}$$

d'où

$$u' = \frac{1}{x}u + 1, \tag{1.18}$$

l'équation (1.18) *est une équation différentielle linéaire du premier ordre d'inconnue* u.

L'équation homogène associée à (1.18) *est*

$$u' = \frac{1}{x}u. \tag{1.19}$$

On a :

$$\begin{aligned}
(1.19) \quad &\Rightarrow \quad u' = \frac{1}{x}u, \\
&\Rightarrow \quad \int \frac{du}{u} = \int \frac{1}{x}dx, \quad (u' = \frac{du}{x}), \\
&\Rightarrow \quad \ln|u| = \ln|x| + k \text{ où } k \in \mathbb{R}, \\
&\Rightarrow \quad |u| = e^{\ln|x|+k} \text{ où } k \in \mathbb{R}, \\
&\Rightarrow \quad |u| = e^{k}|x| \text{ où } k \in \mathbb{R}, \\
&\Rightarrow \quad u = cx, \quad c \in \mathbb{R} \quad (c = \pm e^{k}).
\end{aligned}$$

Alors

$$u(x) = c(x)x, \ c \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (1.19).

On utilise la méthode de variation de la constante :

On pose : $u(x) = xc(x)$, *donc :* $u'(x) = c'(x)x + c(x)$. *En remplaçant* u *et* u' *dans* (1.18) *on obtient :*

$$\begin{aligned}
(1.18) \quad &\Rightarrow \quad c'(x)x + c(x) = \tfrac{1}{x}xc(x) + 1, \\
&\Rightarrow \quad c'(x)x = 1, \\
&\Rightarrow \quad c(x) = \int \frac{1}{x}dx, \\
&\Rightarrow \quad c(x) = \ln|x| + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Donc

$$u(x) = x\ln|x| + \lambda x, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$u(x) = x\ln|x| + \lambda x, \ \lambda \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (1.18).

On a $u = \frac{1}{z}$, *donc* $z = \frac{1}{u}$, *d'où*

$$z = \frac{1}{x\ln|x| + \lambda x}, \ \lambda \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (1.17).

Mais $y = \frac{1}{x} + z$, *donc*

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x \ln |x| + \lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (1.16).

1.4 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Dans cette partie, on va étudier la résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.

Définition 1.10 *On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants toute équation de la forme :*

$$y'' + ay' + by = f(x), \tag{1.20}$$

où a, b *sont deux constantes réelles et* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue sur l'intervalle* I *de* $\mathbb{R}$.

On lui associe l'équation sans second membre :

$$y'' + ay' + by = 0. \tag{1.21}$$

Problème de Cauchy :
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f(x), \\ y(x_0) = y_0, \ \text{où } x_0 \in I, \\ y'(x_0) = z_0, \end{cases}$$

relatif à l'équation (1.20) et aux deux conditions $y_0 = y(x_0)$ et $y'_0 = y'(x_0)$, $x_0 \in I$ consiste à chercher la solution maximale de l'équation (1.20) telle que : $y_0 = y(x_0)$ et $z_0 = y'(x_0)$.

1.4.1 Résolution de l'équation linéaire homogène associée

On cherche des solutions du type $y = e^{rx}$ où $r \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si $y = e^{rx}$, alors $y' = re^{rx}$ et $y'' = r^2 e^{rx}$ en remplace dans (1.21) on obtient :

$$\left(r^2 + ar + b\right) e^{rx} = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

On a l'équation suivante :

$$r^2 + ar + b = 0. \tag{1.22}$$

L'équation (1.22) est appelée "équation caractéristique" de l'équation différentielle (1.20).

Dans l'étude de l'équation caractéristique (1.22) , trois cas peuvent se présenter selon le signe de discriminant $\triangle = a^2 - 4b$.

Premier cas : Si $\triangle > 0$, l'équation (1.22) admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors la solution générale de (1.21) est de la forme

$$y_0 = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x},$$

où A, B sont deux constantes réelles.

Deuxième cas : Si $\triangle = 0$, l'équation (1.22) admet une racine réelle double r, alors la solution générale de (1.21) est de la forme

$$y_0 = (A + Bx)\, e^{rx},$$

où A, B sont deux constantes réelles.

Troisième cas : Si $\triangle < 0$, l'équation (1.22) admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$, alors la solution générale de (1.21) est de la forme

$$y_0 = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)\, e^{\alpha x},$$

où A, B sont deux constantes réelles.

Exemple 1.11 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y'' - 3y' + 2y = 0. \tag{1.23}$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 - 3r + 2 = 0,$$

cette équation admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 1$ *et* $r_2 = 2$*. Ainsi, la solution générale de* (1.23) *est*

$$y_0 = Ae^x + Be^{2x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.12 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y'' - 10y' + 25y = 0 \tag{1.24}$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 - 10r + 25 = 0,$$

cette équation admet la racine réelle double $r = 5$*. Ainsi, la solution générale de* (1.24) *est*

$$y_0 = (A + Bx)\, e^{5x}, \ A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.13 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y'' + 9y = 0 \tag{1.25}$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 + 9 = 0,$$

cette équation admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = 3i$ *et* $r_2 = -3i$*. Ainsi, la solution générale de* (1.25) *est*

$$\begin{aligned} y_0 &= (A\cos 3x + B\sin 3x)\, e^{0x}, \\ &= A\cos 3x + B\sin 3x, \ A \text{ et } B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

1.4.2 Résolution de l'équation linéaire non homogène

Théorème 1.14 *La solution générale maximale* Y *de l'équation linéaire non homogène* (1.20) *est la somme d'une solution maximale particulière* y_p *de l'équation* (1.20) *et de la solution générale* y *de l'équation homogène associée* (1.21) *c'est à dire :*

$$Y = y + y_p,$$

où y *est la solution générale de l'équation homogène associée* (1.21) ,
et y_p *est une solution particulière de l'équation avec second membre* (1.20)*.*

Recherche de la solution particulière y_p de (1.20)

- Si le second membre est du type $\mathbf{e^{\alpha x}P(x)}$:

Si $f(x) = e^{\alpha x}P(x)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, alors on cherche une solution particulière sous la forme $y_p = x^m e^{\alpha x}Q(x)$, où Q est un polynôme de même degré que P avec :

• On pose : $y_p = e^{\alpha x}Q(x)$, $(m = 0)$, si α n'est pas une racine de l'équation caractéristique (1.22).

• On pose : $y_p = xe^{\alpha x}Q(x)$, $(m = 1)$, si α est une racine simple de l'équation caractéristique (1.22).

• On pose : $y_p = x^2e^{\alpha x}Q(x)$, $(m = 2)$, si α est une racine double de l'équation caractéristique (1.22).

Exemple 1.15 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$2y'' + y' - 3y = -3x^3 + 2x - 1. \tag{1.26}$$

Puis résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} 2y'' + y' - 3y = -3x^3 + 2x - 1, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 4. \end{cases} \tag{1.27}$$

On a :

$$(1.26) \Leftrightarrow y'' + \frac{1}{2}y' - \frac{3}{2}y = -\frac{3}{2}x^3 + x - \frac{1}{2}.$$

L'équation homogène associée est

$$y'' + \frac{1}{2}y' - \frac{3}{2}y = 0,$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 + \frac{1}{2}r - \frac{3}{2} = 0. \tag{1.28}$$

On a : $\triangle = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{25}{4}$, *les racines de l'équation (1.28) sont :* $r_1 = -\frac{3}{2}, r_2 = 1$.

Alors la solution générale de l'équation homogène associée (1.21) est

$$y(x) = Ae^{-\frac{3}{2}x} + Be^{x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p de (1.26) :

On a :

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^3 + x - \frac{1}{2} = \left(-\frac{3}{2}x^3 + x - \frac{1}{2}\right)e^{0x}.$$

Comme 0 *n'est pas une racine de l'équation caractéristique* (1.28)*, donc on cherche la solution particulière de* (1.26) *sous la forme :*

$$y_p(x) = \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)e^{0x} = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$*, alors*

$$y_p'(x) = c + 2bx + 3ax^2,$$

et

$$y_p''(x) = 2b + 6ax.$$

On remplace y_p*,* y_p' *et* y_p'' *dans l'équation* (1.26) *on a :*

$$(1.26) \Rightarrow (2b + 6ax) + \frac{1}{2}\left(c + 2bx + 3ax^2\right) - \frac{3}{2}\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) = -\frac{3}{2}x^3 + x - \frac{1}{2},$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2}ax^3 + \left(\frac{3}{2}a - \frac{3}{2}b\right)x^2 + \left(6a + b - \frac{3}{2}c\right)x + \left(2b + \frac{1}{2}c - \frac{3}{2}d\right) = -\frac{3}{2}x^3 + x - \frac{1}{2}.$$

Par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}a = -\frac{3}{2}, \\ \frac{3}{2}a - \frac{3}{2}b = 0, \\ 6a + b - \frac{3}{2}c = 1, \\ 2b + \frac{1}{2}c - \frac{3}{2}d = -\frac{1}{2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = 1, \\ c = 4, \\ d = 3. \end{cases}$$

donc la solution particulière y_p *de* (1.26) *est*

$$y_p(x) = x^3 + x^2 + 4x + 3.$$

Alors

$$\begin{aligned} Y(x) &= y_p(x) + y(x) \\ &= x^3 + x^2 + 4x + 3 + Ae^{x} + Be^{-\frac{3}{2}x}\ ,\ A \text{ et } B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (1.26)*.*

Pour le problème de Cauchy (1.27) *on a :*

$$y(0) = 0,\ \text{d'où} : 3 + A + B = 0,$$

et

$$\begin{aligned} y'(0)=4 \quad &\Rightarrow \quad \left(x^3+x^2+4x+3+Ae^x+Be^{-\frac{3}{2}x}\right)'_{x=0}=4,\\ &\Rightarrow \quad \left(3x^2+2x+4+Ae^x-\tfrac{3}{2}Be^{-\frac{3}{2}x}\right)_{x=0}=4,\\ &\Rightarrow \quad 4+A-\tfrac{3}{2}B=4,\\ &\Rightarrow \quad A-\tfrac{3}{2}B=0. \end{aligned}$$

Donc on a :

$$\begin{cases} 3+A+B=0, \\ A-\frac{3}{2}B=0. \end{cases} \quad d'où : \quad \begin{cases} A=-\frac{9}{5}, \\ B=-\frac{6}{5}. \end{cases}$$

Alors

$$Y(x)=x^3+x^2+4x+3-\frac{9}{5}e^x-\frac{6}{5}e^{-\frac{3}{2}x} ,$$

est la solution de problème du Cauchy (1.27).

Exemple 1.16 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y''-4y'+4y=e^{2x}. \tag{1.29}$$

L'équation homogène associée est

$$y''-4y'+4y=0, \tag{1.30}$$

l'équation caractéristique est

$$r^2-4r+4=0. \tag{1.31}$$

On a : $\triangle=(-4)^2-4(4)=0$, *la racine double de l'équation* (1.31) *est* $r_1=r_2=2$.

Alors la solution générale de l'équation homogène associée (1.30) *est*

$$y(x)=(Ax+B)e^{2x}, A \text{ et } B\in\mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p *de* (1.29) *:*

On a : $f(x)=e^{2x}=1e^{2x}$.

Comme 2 *est une racine double de l'équation caractéristique* (1.31), *nous devons chercher une solution particulière de l'équation* (1.29) *sous la forme :*

$$y_p(x)=kx^2e^{2x}, k\in\mathbb{R},$$

donc

$$y_p'(x) = \left(2kx^2 + 2kx\right) e^{2x},$$

et

$$y_p''(x) = \left(4kx^2 + 8kx + 2k\right) e^{2x},$$

on remplace y_p, y_p' *et* y_p'' *dans* (1.29) *on a :*

$$\left(4kx^2 + 8kx + 2k\right) e^{2x} - 4\left(2kx^2 + 2kx\right) e^{2x} + 4\left(kx^2 e^{2x}\right) = e^{2x},$$

on obtient : $2ke^{2x} = e^{2x}$ *d'où* $k = \frac{1}{2}$.

Donc la solution particulière y_p *de l'équation* (1.29) *est*

$$y_p(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{2x}.$$

Alors

$$\begin{aligned} Y(x) &= y(x) + y_p(x) \\ &= (Ax + B) e^{2x} + \frac{1}{2} x^2 e^{2x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (1.29).

Exemple 1.17 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y'' - 2y' + y = (x + 2) e^x. \tag{1.32}$$

L'équation homogène associée est

$$y'' - 2y' + y = 0, \tag{1.33}$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 - 2r + 1 = 0. \tag{1.34}$$

On a : $\triangle = (-2)^2 - 4(1) = 0$, *la racine double de l'équation* (1.34) *est* $r_1 = r_2 = 1$.

Alors la solution générale de l'équation homogène associée à l'équation (1.33) *est*

$$y(x) = (Ax + B) e^x, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p *de l'équation* (1.32) *:*

On a : $f(x) = (x + 2) e^{1x}$.

Comme 1 *est une racine double de l'équation caractéristique* (1.34), *nous devons chercher une solution particulière* y_p *de* (1.32) *sous la forme :*

$$y_p(x) = x^2(ax+b)e^x = \left(ax^3+bx^2\right)e^x,$$

où a *et* $b \in \mathbb{R}$.

Donc

$$y_p'(x) = \left(ax^3+(3a+b)x^2+2bx\right)e^x,$$

et

$$y_p''(x) = \left(ax^3+(6a+b)x^2+(6a+4b)x+2b\right)e^x,$$

on remplace y_p, y_p' *et* y_p'' *dans l'équation* (1.32) *on a :*

$$(1.32) \Rightarrow (6ax+2b)e^x = (x+2)e^x.$$

Par identification on obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} 6a = 1, \\ 2b = 2. \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \frac{1}{6}, \\ b = 1. \end{array}\right.$$

Donc la solution particulière y_p *de l'équation* (1.32) *est*

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{6}x^3+x^2\right)e^x.$$

Alors

$$\begin{array}{rcl} Y(x) & = & y(x)+y_p(x) \\ & = & (Ax+B)e^x + \left(\frac{1}{6}x^3+x^2\right)e^x, A \text{ et } B \in \mathbb{R}. \end{array}$$

est une solution générale de (1.32).

- **Si le second membre est du type :** $(P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x)e^{\alpha x}$.

Si $f(x) = \mathbf{e}^{\alpha x}(P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P_1(x), P_2(x) \in \mathbb{R}[x]$, on cherche une solution particulière sous la forme :

• On pose : $y_p = \mathbf{e}^{\alpha x}(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x)$, si $\alpha + i\beta$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique (1.22).

• On pose : $y_p = x\mathbf{e}^{\alpha x}(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x)$, si $\alpha+i\beta$ est une racine de l'équation caractéristique (1.22).

Dans les deux cas, Q_1 et Q_2 sont deux polynômes de degré n et

$$n = \max\{\deg P_1, \deg P_2\}.$$

Exemple 1.18 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y'' + 4y = \cos x. \tag{1.35}$$

L'équation homogène associée est

$$y'' + 4y = 0, \tag{1.36}$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 + 4 = 0. \tag{1.37}$$

On a : $\triangle = (0)^2 - 4(4) = -16 < 0$, *l'équation* (1.37) *admet deux racines complexes conjuguées qui sont :* $r = 2i, \overline{r} = -2i$. *Alors la solution générale de l'équation homogène associée* (1.36) *est*

$$y(x) = A\cos 2x + B\sin 2x, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p *de l'équation* (1.35) *:*

On a : $f(x) = \cos x$

Comme i *n'est pas une racine de l'équation caractéristique* (1.37), *donc on cherche la solution particulière* y_p *de* (1.35) *sous la forme :*

$$y_p(x) = h\cos x + k\sin x, h \text{ et } k \in \mathbb{R},$$

alors

$$y_p^{'}(x) = -h\sin x + k\cos x,$$

et

$$y_p^{''}(x) = -h\cos x - k\sin x,$$

on remplace y_p, y_p' *et* y_p'' *dans l'équation* (1.35) *on a :*

$$\begin{aligned}(1.35) \quad &\Rightarrow \quad (-h\cos x - k\sin x) + 4(h\cos x + k\sin x) = \cos x, \\ &\Rightarrow \quad 3h\cos x + 3k\sin x = \cos x.\end{aligned}$$

Par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 3h = 1, \\ 3k = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = \frac{1}{3}, \\ k = 0. \end{cases}$$

Donc la solution particulière y_p *de l'équation* (1.35) *est*

$$y_p(x) = \frac{1}{3}\cos x$$

Alors

$$\begin{aligned} Y(x) &= y(x) + y_p(x) \\ &= A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{1}{3}\cos x, A \text{ et } B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (1.35).

Exemple 1.19 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y'' + 9y = \sin 3x. \tag{1.38}$$

L'équation homogène associée est

$$y'' + 9y = 0, \tag{1.39}$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 + 9 = 0. \tag{1.40}$$

On a : $\triangle = (0)^2 - 4(9) = -36 < 0$, *donc l'équation* (1.40) *admet deux racines complexes conjuguées qui sont :* $r = 3i, \overline{r} = -3i$. *Alors la solution générale de l'équation homogène associée* (1.39) *est*

$$y(x) = A\cos 3x + B\sin 3x, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche de la solution particulière y_p *de l'équation* (1.38) *:*

On a : $f(x) = \sin 3x$.

Comme $3i$ *est une racine de l'équation caractéristique* (1.40), *donc on cherche la solution particulière* y_p *de l'équation* (1.38) *sous la forme :*

$$y_p(x) = x(h\cos 3x + k\sin 3x)e^{0x} = hx\cos 3x + kx\sin 3x, h \text{ et } k \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$y_p'(x) = (3kx + h)\cos 3x + (k - 3hx)\sin 3x,$$

et

$$y_p''(x) = (-9hx + 6k)\cos 3x + (-6h - 9kx)\sin 3x,$$

on remplace y_p, y_p' *et* y_p'' *dans l'équation* (1.38) *on a :*

$$\begin{aligned} (b) \quad &\Rightarrow \quad (-9hx + 6k)\cos 3x + (-6h - 9kx)\sin 3x + 9(hx\cos 3x + kx\sin 3x) = \sin 3x, \\ &\Rightarrow \quad 6k\cos 3x + (-6h)\sin 3x = \sin 3x. \end{aligned}$$

Par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 6k = 0, \\ -6h = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 0, \\ h = \frac{-1}{6}. \end{cases}$$

Donc la solution particulière y_p de l'équation (1.38) est

$$y_p(x) = \frac{-1}{6} x \cos 3x.$$

Alors

$$\begin{aligned} Y(x) &= y(x) + y_p(x) \\ &= A\cos 3x + B\sin 3x - \frac{1}{6} x \cos 3x, A \text{ et } B \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

est la solution générale de (1.38).

Principe de superposition :

Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, une solution particulière y_p est donnée par :

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2},$$

où y_{p_1} est une solution particulière de l'équation :

$$y'' + ay' + by = f_1(x),$$

et y_{p_2} est une solution particulière de l'équation :

$$y'' + ay' + by = f_2(x).$$

Exemple 1.20 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y'' - 5y' + 6y = 2e^{3x} + e^{4x} \tag{1.41}$$

L'équation homogène associée est

$$y'' - 5y' + 6y = 0, \tag{1.42}$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 - 5r + 6 = 0. \tag{1.43}$$

On a : $\triangle = (-5)^2 - 4(6) = 1$, les racines de l'équation (1.43) sont : $r_1 = 2, r_2 = 3$.

Alors la solution générale de l'équation homogène associée (1.42) *est :*

$$y(x) = Ae^{2x} + Be^{3x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$

Recherche d'une solution particulière de l'équation (1.41) *:*

D'après le principe de superposition des solutions, pour trouver une solution particulière de l'équation (1.41) *, il nous suffira de trouver une solution particulière de chacune des équations suivantes :*

$$y'' - 5y' + 6y = 2e^{3x}, \tag{1.44}$$

$$y'' - 5y' + 6y = e^{4x}. \tag{1.45}$$

Recherche d'une solution particulière y_{p_1} *de l'équation* (1.44) *:*

On a : $f_1(x) = 2e^{3x}$.

Comme 3 *est une racine de multiplicité* 1 *(racine simple) de l'équation caractéristique* (1.43), *on cherche une solution particulière de l'équation* (1.44) *sous la forme :*

$$y_{p_1}(x) = \lambda x e^{3x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$y'_{p_1}(x) = \lambda e^{3x} + 3\lambda x e^{3x},$$

et

$$y''_{p_1}(x) = 6\lambda e^{3x} + 9\lambda x e^{3x},$$

on remplace y_{p_1}, y'_{p_1} *et* y''_{p_1} *dans l'équation* (1.44) *, on obtient :*

$$\begin{aligned} (1.44) \quad &\Rightarrow \quad y'' - 5y' + 6y = 2e^{3x} \\ &\Rightarrow \quad \lambda e^{3x} = 2e^{3x}, \end{aligned}$$

d'où $\lambda = 2$. *Donc la solution particulière de l'équation* (1.44) *est*

$$y_{p_1}(x) = 2xe^{3x}.$$

Recherche d'une solution particulière y_{p_2} *de l'équation* (1.45) *:*

On a : $f_2(x) = e^{4x}$.

Comme 4 *n'est pas une racine de l'équation caractéristique* (1.43), *on cherche une solution particulière de* (1.45) *sous la forme :*

$$y_{p_2}(x) = ke^{4x}, k \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$y'_{p_2}(x) = 4ke^{4x} \ ,$$

et

$$y''_{p_2}(x) = 16ke^{4x}$$

on remplace y_{p_2}, y'_{p_2} *et* y''_{p_2} *dans l'équation* (1.45) *on obtient :*

$$\begin{aligned}(1.45) \quad &\Rightarrow \quad 16ke^{4x} - 20ke^{4x} + 6ke^{4x} = e^{4x} \\ &\Rightarrow \quad 2ke^{4x} = e^{4x}\end{aligned}$$

d'où $k = \frac{1}{2}$. *Donc* y_{p_2} *la solution particulière de l'équation* (1.45) *est*

$$y_{p_2}(x) = \frac{1}{2}e^{4x}.$$

Alors

$$\begin{aligned}Y(x) &= y(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) \\ &= Ae^{2x} + Be^{3x} + 2xe^{3x} + \frac{1}{2}e^{4x}, A \text{ et } B \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (1.41).

==