Analyse II

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année Ingénieur (ST-TM)
Année universitaire 2024–2025

✠– EXAMEN–✠

Exercice 1 : (**5 pts**)
On considère les intégrales définies :

$$I = \int_0^\pi e^x \cos^2 x \, dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^\pi e^x \sin^2 x \, dx.$$

1. Calculer $I + J$.
2. En appliquant la méthode d'intégration par parties deux fois, calculer $I - J$.
3. En déduire la valeur de I et J.

Indication : $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

Exercice 2 : (**7 pts**)
1. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' - 2xy = (1 - 2x)e^x.$$

2. On considère l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 4y' + 4y = g(x) \qquad E_1.$$

a. Résoudre l'équation homogène (sans second membre) associée à E_1.
b. Trouver une solution particulière de E_1 dans les cas suivants :
- g(x) $= e^{-2x}$.
- g(x) $= e^{2x}$.

Exercice 3 : (**8 pts**)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
3. Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont-elles continues en $(0,0)$? f est-elle de classe C^1 en (0, 0) ?
4. La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?
5. Calculer le gradient de f en $(1,1)$.
6. Exprimer la différentielle $df_{(a,b)}$ pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Bonne Chance

Analyse II

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année Ingénieur (ST-TM)
Année universitaire 2024–2025

✠– Corrigé de l'examen–✠

Exercice 1 : On considère les intégrales : $I = \int_0^\pi e^x \cos^2 x\, dx$ et $J = \int_0^\pi e^x \sin^2 x\, dx$.

1. Calcul de $I + J$:

$I + J = \int_0^\pi e^x \cos^2 x\, dx + \int_0^\pi e^x \sin^2 x\, dx = \int_0^\pi e^x(\cos^2 x + \sin^2 x)\, dx = \int_0^\pi e^x\, dx = e^x\Big|_0^\pi = e^\pi - e^0 = \boxed{e^\pi - 1}$. 1

2. Calcul de $I - J$ par intégration par parties :

$I - J = \int_0^\pi e^x(\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx = \int_0^\pi e^x \cos(2x)\, dx$.

Première intégration par parties : $\begin{cases} u = \cos(2x) \implies du = -2\sin(2x)\, dx \\ dv = e^x\, dx \implies v = e^x \end{cases}$. Alors :

$\int_0^\pi e^x \cos(2x)\, dx = e^x \cos(2x)\Big|_0^\pi + 2\int_0^\pi e^x \sin(2x)\, dx = (e^\pi - 1) + 2\int_0^\pi e^x \sin(2x)\, dx$ 0.5

Deuxième intégration par parties pour le terme restant $(2\int_0^\pi e^x \sin(2x)\, dx)$:

$\begin{cases} u = \sin(2x) \implies du = 2\cos(2x)\, dx \\ dv = e^x\, dx \implies v = e^x \end{cases}$. Alors :

0.5

$\int_0^\pi e^x \sin(2x)\, dx = e^x \sin(2x)\Big|_0^\pi - 2\int e^x \cos(2x)\, dx = -2\int e^x \cos(2x)\, dx$. En substituant dans la première équation :

$\int_0^\pi e^x \cos(2x)\, dx = (e^\pi - 1) - 4\int_0^\pi e^x \cos(2x)\, dx \Rightarrow 5\int_0^\pi e^x \cos(2x)\, dx = (e^\pi - 1)$

$\Rightarrow I - J = \int_0^\pi e^x \cos(2x)\, dx = \boxed{\frac{e^\pi - 1}{5}}$ 1

3. Calcul de I et J

Nous avons le système :

$$\begin{cases} I + J = e^\pi - 1 \\ I - J = \frac{e^\pi - 1}{5} \end{cases}$$

En additionnant les deux équations :

$$2I = (e^\pi - 1) + \frac{e^\pi - 1}{5} = \frac{6}{5}(e^\pi - 1) \implies I = \boxed{\frac{3}{5}(e^\pi - 1)}$$ 1

En soustrayant la seconde équation de la première :

$$2J = (e^\pi - 1) - \frac{e^\pi - 1}{5} = \frac{4}{5}(e^\pi - 1) \implies J = \boxed{\frac{2}{5}(e^\pi - 1)}$$ 1

Exercice 2 :

1. Résolution de l'équation différentielle $y' - 2xy = (1 - 2x)e^x$.

• Solution de l'équation homogène $y' = 2xy = 0$.

Il est clair que $y_h = 0$ est une solution. Pour $y \neq 0$, on a $\dfrac{y'}{y} = 2x \Rightarrow \dfrac{1}{y}\, dy = 2x\, dx \Rightarrow$ $\int \dfrac{1}{y}\, dy = \int 2x\, dx \Rightarrow \ln|y| = x^2 + c$, avec $c \in \mathbb{R} \Rightarrow |y| = e^c \cdot e^{x^2} \Rightarrow y = \pm e^c \cdot e^{x^2}$, avec la solution triviale $y = 0$, on obtient $y_h = ke^{x^2}$, avec $k \in \mathbb{R}$. 1

• Solution particulière de $y' - 2xy = (1-2x)e^x$. (variation de la constante).
Posons $y_p = k(x)e^{x^2} \Rightarrow y_p\prime = k'(x)e^{x^2} + 2xk(x)e^{x^2}$. En remplaçant y et y' dans l'équation $y' - 2xy = (1-2x)e^x$, on obtient $k'(x)e^{x^2} = (1-2x)e^x \Rightarrow k'(x) = (1-2x)e^{(x-x^2)} \Rightarrow$ $k(x) = \int (1-2x)e^{(x-x^2)}\, dx = e^{x-x^2} \Rightarrow y_p = e^{(x-x^2)} \cdot e^{x^2} = e^x$. 1

• La solution générale est $y_g = y_h + y_p = ke^{x^2} + e^x$, avec $k \in \mathbb{R}$. 0.5

2. On considère l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 4y' + 4y = g(x) \qquad E_1.$$

a. Solution de l'équation homogène $y'' - 4y' + 4y = 0$.
Posons $y = e^{rx} \Rightarrow y' = re^{rx}$ et $y'' = r^2e^{rx}$, donc $(r^2 - 4r + 4)e^{rx} = 0 \Rightarrow$ 1
$r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow (r-2)^2 = 0 \Rightarrow r = 2$. Comme l'équation caractéristique associée à l'équation homogène admet une solution réelle double, alors la solution homogène est donnée par $y_h = (Ax + B)e^{2x}$, $A, B \in \mathbb{R}$. 1

b. Solution particulière de E_1. 0.5
• La solution particulière pour $g(x) = e^{-2x}$ est de la forme $y_1 = a \cdot e^{-2x} \Rightarrow$ $y_1' = -2a \cdot e^{-2x}$ et $y_1'' = 4a \cdot e^{-2x}$. Remplaçant y'', y' et y dans E_1, on trouve $4a \cdot e^{-2x} + 8a \cdot e^{-2x} + 4a \cdot e^{-2x} = e^{-2x} \Rightarrow 16a \cdot e^{-2x} = e^{-2x} \Rightarrow 16a = 1 \Rightarrow a = \dfrac{1}{16}$.
Alors $\boxed{y_1 = \dfrac{e^{-2x}}{16}}$. 0.75

0.5
• La solution particulière $g(x) = e^{2x}$ est de la forme $y_2 = bx^2 \cdot e^{2x} \Rightarrow$
$y_2' = 2bx \cdot e^{2x} + 2bx^2 \cdot e^{2x} = 2b(x^2 + x) \cdot e^{2x}$ et
$y_2'' = 2b \cdot e^{2x} + 4bx \cdot e^{2x} + 4bx \cdot e^{2x} + 4bx^2 \cdot e^{2x} = 2b(2x^2 + 4x + 1) \cdot e^{2x}$. Remplaçant y'', y' et y dans E_1, on trouve $(2b(2x^2 + 4x + 1) - 8b(x^2 + x) + 4bx^2) \cdot e^{2x} = e^{2x} \Rightarrow$ $(4bx^2 + 8bx + 2b - 8bx^2 - 8bx + 4bx^2) = 1 \Rightarrow 2b = 1 \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$. Alors $\boxed{y_2 = \dfrac{x^2 \cdot e^{2x}}{2}}$. 0.75

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. **Continuité de f sur $\mathbb{R}^2$:**

   Pour $(x,y) \neq (0,0)$, f est une fraction de fonctions polynomiales avec un dénominateur $x^2 + y^2 \neq 0$, donc elle est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. 0.5
   Étudions la continuité en $(0,0)$. On cherche :
   $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^2}$.
   En coordonnées polaires : $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, alors
   $f(x,y) = \frac{r\cos\theta(r\sin\theta)^3}{r^2} = r^2\cos\theta\sin^3\theta$. Donc,
   $\lim_{r\to 0} f(x,y) = \lim_{r\to 0} r^2\cos\theta\sin^3\theta = 0$ (indépendante de θ). Comme $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, alors f est continue sur $\mathbb{R}^2$. 1

2. **Dérivées partielles en $(0,0)$:** Par définition on a :
   $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$, 0.5
   $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$. 0.5

3. **Continuité des dérivées partielles et classe C^1 :**

   On a :
   $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3(x^2+y^2)-xy^3(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \boxed{\frac{y^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}}$, 0.5

   $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3xy^2(x^2+y^2)-xy^3(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \boxed{\frac{xy^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}}$. 0.5

   • Pour $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, on a :
   $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$.
   En coordonnées polaires, avec $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, on obtient :
   $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{r^3\sin^3\theta(r^2\sin^\theta - r^2\cos^2\theta)}{r^4} = r\sin^3\theta(\sin^2\theta-\cos^2\theta)$. Ainsi : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \xrightarrow[r\to 0]{} 0$.
   Comme $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est continue en $(0,0)$. 0.75
   • Pour $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y))$, on a :
   $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{xy^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$. En coordonnées polaires, avec $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, on obtient :
   $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta(3r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)}{r^4} = r\cos\theta\sin^2\theta(3\cos^2\theta+\sin^2\theta)$. Ainsi : $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \xrightarrow[r\to 0]{} 0$. Comme $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est
   0.75 continue en $(0,0)$. Comme les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues en $(0,0)$, alors $f \in C^1$ en $(0,0)$. 0.5

4. **Différentiabilité de f en $(0,0)$:** 0.5
   Comme $f \in C^1$ en $(0,0)$, alors f est différentiable en $(0,0)$. On peu aussi vérifier la différentiablité de f en $(0,0)$ comme suit : f est continue en $(0,0)$, ses dérivées partielles existent et sont nulles. On pose
   $R(x,y) = f(x,y) - (f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y) = f(x,y)$. En coordonnées polaire :
   $R(x,y) = f(x,y) = r^2\cos\theta\sin^3\theta$, donc $\frac{R(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = r\cos\theta\sin^3\theta$. Ainsi, $\frac{R(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \xrightarrow[r\to 0]{} 0$.
   Donc f est différentiable en $(0,0)$.

5. **Gradient en $(1,1)$:** On a : $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{1^3(1-1)}{4} = 0$, $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{1\cdot 1^2(3+1)}{4} = 1$. Donc

$$\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 1$$

6. **Différentielle de f en $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:** Si $(a,b) \neq (0,0)$, alors f est C^∞, donc différentiable, et on a :
   $df_{(a,b)}(h,k) = h\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \Rightarrow df_{(a,b)}(h,k) = h\cdot\frac{b^3(b^2-a^2)}{(a^2+b^2)^2} + k\cdot\frac{ab^2(3a^2+b^2)}{(a^2+b^2)^2}$ 1