

Exercice N°1 : Intervertir l'ordre d'intégration dans les intégrales suivantes :

$$1) \int_1^2 \left[\int_{-3}^2 f(x, y) dy \right] dx \quad 2) \int_{-1}^0 \left[\int_{2x}^{-x} f(x, y) dy \right] dx \quad 3) \int_0^1 \left[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \right] dy$$

$$4) \int_0^2 \left[\int_0^{\sqrt{4y-y^2}} f(x, y) dx \right] dy \quad 5) \int_{-1}^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right] dx.$$

Exercice N°2 : Calculer, par deux méthodes différentes, les intégrales suivantes :

$$1) \iint_D xy dx dy, \text{ où } D = \{(x, y) \text{ tel que } -1 \leq x \leq 1 \text{ et } x^2 \leq y \leq 3\}.$$

$$2) \iint_D x dx dy, \text{ où } D = \{(x, y) \text{ tel que } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ et } -x \leq y \leq \sin x\}.$$

$$3) \iint_D y dx dy, \text{ où } D \text{ est délimité par les droites } y = x, y = -x \text{ et le graphe d'équation } y = \sqrt{4-x^2}, -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}.$$

Exercice N°3 :

1) Calculer l'aire de la figure délimité par la parabole $y^2 = 2x$ et la droite $y = x$.

2) Calculer l'aire de la figure délimité par la courbe d'équation $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ et la droite définie par $y + x = 4$.

3) Calculer l'aire de la partie du cone $x^2 + y^2 = z^2$ découpée par le cylindre $x^2 + y^2 = 2x$.

4) Calculer l'aire de la surface sphérique $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ découpée par le cylindre d'équation $x^2 + 2y^2 = 1$.

Solution :

$$1) \int_1^2 \left[\int_{-3}^2 f(x, y) dy \right] dx = \int_{-3}^2 \left[\int_1^2 f(x, y) dx \right] dy.$$

$$2) \int_{-1}^0 \left[\int_{2x}^{-x} f(x, y) dy \right] dx = \int_0^1 \left[\int_{-1}^{-y} f(x, y) dx \right] dy + \int_{-2}^0 \left[\int_{-1}^{\frac{y}{2}} f(x, y) dx \right] dy.$$

$$3) \int_0^1 \left[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \right] dy = \int_{-1}^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right] dx.$$

$$4) \int_0^2 \left[\int_0^{\sqrt{4y-y^2}} f(x, y) dx \right] dy = \int_0^2 \left[\int_{2-\sqrt{4-x^2}}^2 f(x, y) dy \right] dx.$$

$$5) \int_{-1}^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right] dx = \int_0^1 \left[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \right] dy.$$

Solution exo2 :

Première intégrale.

Méthode 1 :

On pose $\int \int_D xy dx dy = A$.

$$1) A = \int_{-1}^1 \left[\int_{x^2}^3 xy dy \right] dx = \int_{-1}^1 \underbrace{\left(x \frac{9 - x^4}{2} \right)}_{\text{résultat de l'intégrale entre croché}} dx = 0.$$

Méthode 2 :

Dans cette situation, le domaine d'intégration sus-cité n'est pas régulier.

$$1) A = \int_0^3 \left[\int_1^1 xy dx \right] dy + \int_0^1 \left[\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} xy dx \right] dy =$$

Comme $\int_1^1 xy dx = 0$, et $\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} xy dx = 0$, donc $A = 0$.

Deuxième intégrale.

Méthode 1 :

On pose $\int \int_D x dx dy = B$.

$$1) B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_{-x}^{\sin x} x dy \right] dx, \text{ Calculons l'intégrale entre croché.}$$

$$\int_{-x}^{\sin x} x dy = x(\sin x + x).$$

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \sin x + x^2) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx = -x \cos x + \sin x + \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

$$B = \frac{\pi^3}{24} + 1.$$

Méthode 2 :

Dans cette situation, le domaine d'intégration sus-cité n'est pas régulier car il est limité par trois graphes d'équations $x = \arcsin y$, $x = -y$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} 1) B &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left[\int_{-y}^{\frac{\pi}{2}} x dx \right] dy + \int_0^1 \left[\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} x dx \right] dy. \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left[\frac{\pi^2}{8} - \frac{y^2}{2} \right] dy + \int_0^1 \left[\frac{\pi^2}{8} - \frac{(\arcsin y)^2}{2} \right] dy. \\ &= \frac{\pi^2}{24} + \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 (\arcsin y)^2 dy. \end{aligned}$$

Deux fois par partie :

$$\int_0^1 (\arcsin y)^2 dy = y(\arcsin y)^2 + 2\sqrt{1-y^2} \arcsin y - 2 \Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{4} - 2.$$

Ce qui donne, $B = \frac{\pi^3}{24} + 1$.

troisième intégrale.

Méthode 1 :

$$\text{On pose : } C = \iint_D y dx dy$$

Dans cette situation, le domaine d'intégration sus-cité n'est pas régulier car il est limité par trois graphes d'équations $y = x$, $y = -x$ et $y = \sqrt{4-x^2}$, pour cela on partage le domaine D en deux domaines réguliers D_1 et D_2 tel que :

$$D_1 = \{(x, y) \text{ tel que } -\sqrt{2} \leq x \leq 0 \text{ et } -x \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \text{ tel que } 0 \leq x \leq \sqrt{2} \text{ et } x \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$$

$$\begin{aligned} \iint_D y dx dy &= \iint_{D_1} y dx dy + \iint_{D_2} y dx dy \\ C &= \int_{-\sqrt{2}}^0 \left[\int_{-x}^{\sqrt{4-x^2}} y dy \right] dx + \int_0^{\sqrt{2}} \left[\int_x^{\sqrt{4-x^2}} y dy \right] dx, \end{aligned}$$

$$C = \int_{-\sqrt{2}}^0 [2-x^2] dx + \int_0^{\sqrt{2}} [2-x^2] dx$$

$$C = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2-x^2) dx = \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

Méthode 2 :

De même, dans cette situation, le domaine d'intégration sus-cité n'est pas régulier car il est limité par quatre graphes d'équations $x = -y$, $x = y$, $x = -\sqrt{4-y^2}$ et $x = \sqrt{4-y^2}$, pour cela on partage le domaine D en deux domaines réguliers D_1 et D_2 tel que :

$$D_1 = \{(x, y) \text{ tel que } -y \leq x \leq y \text{ et } 0 \leq y \leq \sqrt{2}\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \text{ tel que } -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2} \text{ et } \sqrt{2} \leq y \leq 2\}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \iint_D y dx dy &= \iint_{D_1} y dx dy + \iint_{D_2} y dx dy \\ C &= \int_0^{\sqrt{2}} \left[\int_{-y}^y y dx \right] dy + \int_{\sqrt{2}}^2 \left[\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} y dx \right] dy. \end{aligned}$$

$$C = \int_0^{\sqrt{2}} [2y^2] dy + \int_{\sqrt{2}}^2 [2y\sqrt{4-y^2}] dy.$$

$$C = \frac{4\sqrt{2}}{3} + \int_{\sqrt{2}}^2 [2y\sqrt{4-y^2}] dy.$$

Pour calculer $\int_{\sqrt{2}}^2 [2y\sqrt{4-y^2}] dy$, on pose $y = 2 \sin t$.

cette intégrale se ramène à la forme suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{2}}^2 [2y\sqrt{4-y^2}] dy &= 16 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^2 \sin t dt \\ &= -16 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^2 d(\cos t) \\ &= \frac{-16}{3} (\cos t)^3 \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Ce qui fait, $C = \frac{8\sqrt{2}}{3}$.

Solution Exo 3 :

Considérons la surface D définie comme suit :

$$1) D = \{(x, y) \text{ tel que } 0 \leq x \leq 2 \text{ et } x \leq y \leq \sqrt{2x}\}.$$

$$\begin{aligned} \text{Aire}(D) &= \int \int_D dx dy = \int_0^2 \left[\int_x^{\sqrt{2x}} dy \right] dx \\ &= \int_0^2 (\sqrt{2x} - x) dx = \frac{2\sqrt{2}}{3} x\sqrt{x} - \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 \end{aligned}$$

$$\text{Aire}(D) = \frac{2}{3}.$$

2) l'aire de la figure D délimité par la courbe d'équation $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ et la droite définie par $y + x = 4$.

$$D = \{(x, y) \text{ tel que } 0 \leq x \leq 4 \text{ et } (2 - \sqrt{x})^2 \leq y \leq 4 - x\}.$$

$$\begin{aligned} \text{Aire}(D) &= \int \int_D dx dy = \int_0^4 \left[\int_{(2-\sqrt{x})^2}^{4-x} dy \right] dx \\ \text{Aire}(D) &= \int \int_D dx dy = \int_0^4 (4\sqrt{x} - 2x) dx = \frac{8x\sqrt{x}}{3} - x^2 \Big|_0^4 = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

3) l'aire de la surface (gauche) S du cône $x^2 + y^2 = z^2$ découpée par le cylindre

$$x^2 + y^2 = 2x. \tag{1}$$

NB : le cylindre en question coupe le cône en deux surfaces symétriques S_1 et S_2 avec $S_1 = \{(x, y, z) \text{ tel que } z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}\}.$

$$S_2 = \left\{ (x, y, z) \text{ tel que } z = g(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2} \right\}.$$

Aire (S_1)=Aire (S_1). il suffit de calculer, par exemple, Aire (S_1).

L'équation $x^2 + y^2 = 2x$ signifie $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ (l'équation de la base du cylindre).

$$\text{Aire}(S_1) = \int \int_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

Où D la projection de S_1 sur le plan (OXY).

En outre, $D =$ disque de centre $(1, 0)$ de rayon 1.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \text{Aire}(S_1) &= \int \int_D \sqrt{2} dx dy. \\ &= \sqrt{2} \int \int_D dx dy = \sqrt{2} \text{Aire}(D) = \pi\sqrt{2}. \end{aligned}$$

En fin, Aire(S) = 2Aire(S_1) = $2\sqrt{2}\pi$.

4) l'aire de la surface sphérique $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ découpée par le cylindre

$$x^2 + 2y^2 = 1. \tag{2}$$

Dans cette situation, le cylindre de base $x^2 + 2y^2 = 1$ coupe la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en deux surfaces symétriques S_1 et S_2 avec

$$S_1 = \left\{ (x, y, z) \text{ tel que } z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \right\}.$$

$$S_2 = \left\{ (x, y, z) \text{ tel que } z = g(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \right\}.$$

Aire (S_1)=Aire (S_1). il suffit de calculer, par exemple, Aire (S_1).

$$\text{Aire}(S_1) = \int \int_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

Où D la projection de S_1 sur le plan (OXY).

En outre, $D =$ domaine fermé limité par l'ellipse d'équation $x^2 + 2y^2 = 1$, autrement dit : $D = \{(x, y) \text{ tel que } x^2 + 2y^2 \leq 1\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

D'où :

$$\text{Aire}(S_1) = \int \int_D \sqrt{\frac{1}{1 - x^2 - y^2}} dx dy.$$

Dans le but de calculer cette intégrale, on pose le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

Dans ce cas, $\text{Aire}(S_1) = \int \int_D r \sqrt{\frac{1}{1-r^2}} dr d\theta$.

Le domaine D en coordonnées polaires est définie ainsi :

$$D = \left\{ (\theta, r) \text{ tel que } 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta}} \right\}.$$

$$\text{Aire}(S_1) = \int \int_D r \sqrt{\frac{1}{1-r^2}} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta}}} r \sqrt{\frac{1}{1-r^2}} dr \right] d\theta.$$

L'intégrale entre croché :

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta}}} r \sqrt{\frac{1}{1-r^2}} dr = -\sqrt{1-r^2} \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{\cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta}}} = \frac{-\sin \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta}} + 1.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \text{Aire}(S_1) &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta}} + 1 \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin \theta}{\sqrt{2 - \cos^2 \theta}} + 1 \right) d\theta. \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d \cos \theta}{\sqrt{2 - \cos^2 \theta}} + \int_0^{2\pi} 1 d\theta. \end{aligned}$$

L'intégrale $\int_0^{2\pi} \frac{d \cos \theta}{\sqrt{2 - \cos^2 \theta}}$ possède la forme $\int_0^{2\pi} \frac{dX}{\sqrt{2 - X^2}}$

Pour calculer cette intégrale poser $X = \sqrt{2} \sin t$.