Sommaire

Figures

Ce chapitre est un chapitre **pratique** destiné à permettre de calculer l'intégrale
- d'une fonction continue de 2 variables sur une partie fermée bornée du plan, ou
- d'une fonction continue de 3 variables sur une partie fermée bornée de l'espace.

On ne se posera aucun problème de nature théorique et **tous les théorèmes seront admis**.

1. Intégrales doubles

1.1. Description hiérarchisée d'une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$

Définition : On appelle description hiérarchisée du domaine Δ une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$: l'existence de 2 réels a et b et de 2 applications continues sur $[a,b]$, notées u et v tels que $a < b$ et $\forall x \in [a,b]$, $u(x) \leqslant v(x)$, avec

$$(x,y) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [a,b] \\ y \in [u(x), v(x)] \end{cases}$$

Ce qui peut s'illustrer par la figure 1, page suivante.
On fera attention à ne pas commettre l'erreur du débutant qui cherche les bornes extrèmes pour les 2 variables indépendamment les unes des autres, et transforme tous les domaines en rectangle...

Exemple : On va prendre le domaine du plan défini par : $y \geqslant 0, \quad x \geqslant y, \quad x \leqslant 1.$
Il est élémentaire de faire une figure de ce domaine, qui est un triangle.

En travaillant sur cette figure, on obtient facilement une description hiérarchisée : $\begin{cases} x \in [0,1] \\ y \in [0,x] \end{cases}$

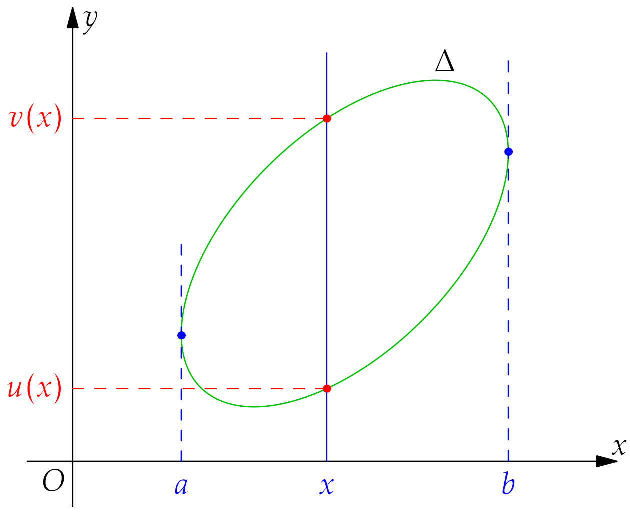

Figure 1 – **Intégrale double**

1.2. Intégrale double de f continue sur Δ, un fermé borné de $\mathbb{R}^2$

Définition : f continue sur Δ, un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, si on dispose d'une description hiérarchisée de Δ, on appelle intégrale double de f sur Δ :

$$\mathrm{I} = \iint_{\Delta} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

En un mot, on transforme cette intégrale double en 2 intégrales simples emboîtées

Exemple : On va intégrer la fonction $(x,y) \to f(x,y) = xy$ sur $\mathrm{D} : \begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x+y \leqslant 1 \end{cases}$

On cherche d'abord une description hiérarchisée du domaine : $\begin{cases} x \in [0,1] \\ y \in [0,1-x] \end{cases}$, ce qui donne :

$$\mathrm{I} = \iint_{\mathrm{D}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{1-x} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-x(1-x)^3}{6} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{6}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{(1-x)^4}{24} \right]_0^1 = \frac{1}{24}$$

1.3. Théorème de Fubini : inversion des bornes

Théorème :

Si on a par ailleurs : $(x,y) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} y \in [c,d] \\ x \in [\alpha(y), \beta(y)] \end{cases}$ avec $c < d$ et $\forall y \in [c,d]$, $\alpha(y) \leqslant \beta(y)$, alors :

$$\mathrm{I} = \iint_{\Delta} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Ceci est illustré sur la figure 2, ci-dessous.

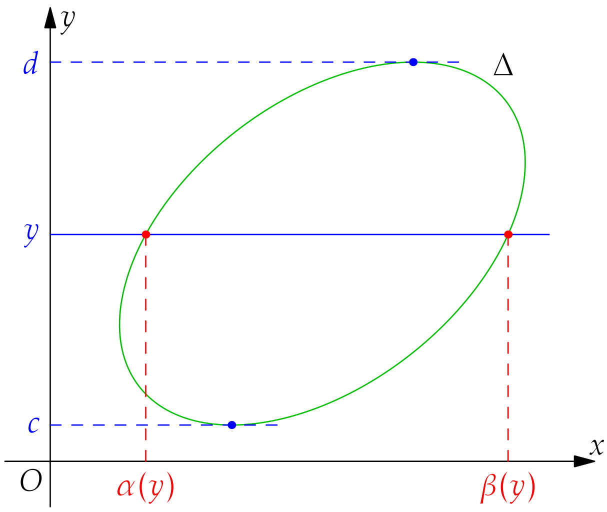

Figure 2 – **Théorème de Fubini : inversion de l'ordre des intégrations**

> On peut ainsi changer l'ordre d'intégration, le calcul est différent, mais le résultat est le même.

1.4. Un cas particulier

On va se placer dans un cas très particulier puisque : $(x,y) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [a,b] \\ y \in [c,d] \end{cases}$

Le domaine est un rectangle. Et d'autre part : $\forall (x,y) \in \Delta,\quad f(x,y) = \varphi(x)\,\psi(y)$
Alors, par linéarité des intégrales simples sur un intervalle :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \iint_{\Delta} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \left(\int_c^d \varphi(x)\,\psi(y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_a^b \left(\varphi(x) \int_c^d \psi(y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \varphi(x) \left(\int_c^d \psi(y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \left(\int_c^d \psi(y)\,\mathrm{d}y \right) \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \times \int_c^d \psi(y)\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Ainsi, dans ce cas : $\displaystyle\iint_\Delta \varphi(x)\,\psi(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \times \int_c^d \psi(y)\,\mathrm{d}y$

1.5. Propriétés

a/ Linéarité

Théorème : f, g continues sur Δ, un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, on dispose d'une description hiérarchisée de Δ. λ et μ deux réels. Alors :

$$\iint_\Delta \lambda\, f(x,y) + \mu\, g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lambda \iint_\Delta f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \mu \iint_\Delta g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

b/ Positivité

Théorème : f continue, **positive**, sur Δ, un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, on dispose d'une description hiérarchisée de Δ. Alors : $\displaystyle\iint_\Delta f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geqslant 0$

c/ Additivité selon les domaines

Théorème : f continue, sur Δ_1 et Δ_2, deux fermés bornés de $\mathbb{R}^2$, on dispose d'une description hiérarchisée de Δ_1 et Δ_2. De plus $\Delta_1 \cap \Delta_2$ est **au plus** une courbe. Alors :

$$\iint_{\Delta_1\cup\Delta_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Delta_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\Delta_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Cela permet d'exploiter d'éventuelles symétries (de la fonction et du domaine).

Théorème : Si f est continue et **positive** sur Δ, avec, de plus, $\mathrm{D} \subset \Delta$, alors :

$$\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint_\Delta f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

1.6. Changement de variables

Théorème : $\varphi : \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ de classe $\mathscr{C}^1$, $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ deux ouverts de $\mathbb{R}^2$.
D et Δ deux fermés bornés de $\mathbb{R}^2$, $\mathrm{D} \subset \mathscr{U}$, et, $\Delta \subset \mathscr{V}$.
De plus : $\varphi(\mathrm{D}) = \Delta$.
On suppose que les points de Δ qui ont plusieurs antécédents sont de surface nulle.
On note : $(x,y) = \varphi(u,v)$, $\dfrac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(u,v)}$ le jacobien de φ en (u,v), et, $\left|\dfrac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(u,v)}\right|$ la valeur absolue du jacobien.
Alors : $\displaystyle\iint_\Delta f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathrm{D}} g(u,v)\left|\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

On notera la **valeur absolue** du jacobien et la pseudo-simplification.

On rappelle que : $\dfrac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

Notons qu'on fait un changement de variable :
- pour simplifier le domaine, **ce qui est nouveau**
- ou pour simplifier le calcul des primitives emboîtées.

Notons enfin que **le domaine change** et donc **sa description hiérarchisée aussi.**

1.7. Changement de variables en coordonnées polaires

Théorème : On pose $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ $(x,y) \in \mathrm{D} \Leftrightarrow (\rho,\theta) \in \Delta$, et $f(x,y) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = g(\rho,\theta)$

$$\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Delta} g(\rho,\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \iint_{\Delta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

Ceci est illustré sur la figure 3, ci-dessous.

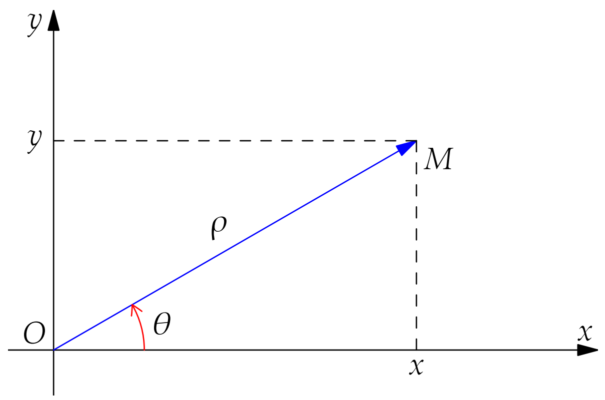

Figure 3 – **Coordonnées Polaires**

Démonstration : En effet $\dfrac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho \geqslant 0$ ■

La figure 4, ci-dessous, indique le mode de calcul.

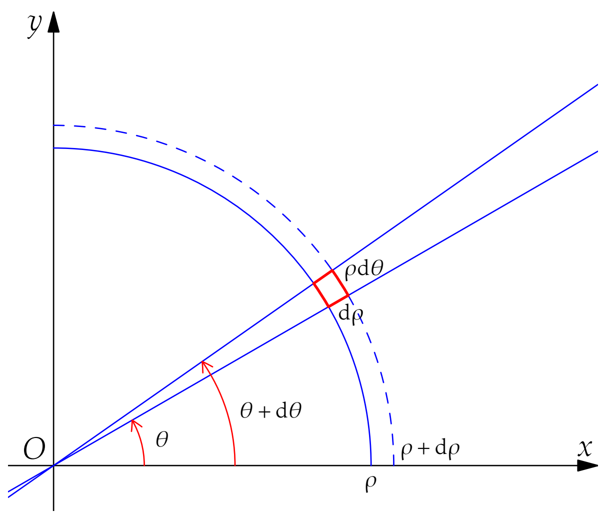

Figure 4 – $\displaystyle\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Delta} g(\rho,\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$

Exemple : On va intégrer la fonction $(x,y) \to f(x,y) = xy$ sur D : $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x^2+y^2 \leqslant 1 \end{cases}$

On cherche d'abord une description hiérarchisée du domaine en polaires : $\begin{cases} \theta \in [0,\pi/2] \\ \rho \in [0,1] \end{cases}$, ce qui donne, compte tenu que $xy = \rho^2 \cos\theta \sin\theta$:

$$\mathrm{I} = \iint_{\mathrm{D}} xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho^3 \cos\theta \sin\theta \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{I} = \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \int_0^1 \rho^3 \,\mathrm{d}\rho = \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{8}$$

2. Intégrales triples

2.1. Description hiérarchisée de Δ, intégrale triple de f continue sur Δ un fermé borné de $\mathbb{R}^3$

Δ un fermé borné de $\mathbb{R}^3$, une description hiérarchisée de Δ est de la forme :

$$(x,y,z) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [a,b] \\ y \in [u(x),v(x)] \\ z \in [\alpha(x,y),\beta(x,y)] \end{cases}$$

On peut avoir les variables dans un autre ordre, l'important est que les bornes de chacune ne soient définies qu'en fonction des précédentes.
On définit alors l'intégrale triple de f continue sur Δ par :

$$\iiint_{\Delta} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

La figure 5, page ci-contre, donne une description hiérarchisée du domaine.

2.2. Changement de variables

Sous des hypothèses équivalentes à la dimension 2,
$(x,y,z) = \varphi(u,v,w)$, $(x,y,z) \in \mathrm{D} \Leftrightarrow (u,v,w) \in \Delta$, et $f(x,y,z) = g(u,v,w)$, on a alors :

$$\iiint_{\mathrm{D}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\Delta} g(u,v,w) \left| \frac{\mathrm{D}(x,y,z)}{\mathrm{D}(u,v,w)} \right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

On notera la **valeur absolue** du jacobien et la pseudo-simplification.

2.3. Coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad (x,y,z) \in \mathrm{D} \Leftrightarrow (\rho,\theta,z) \in \Delta, \text{ et } f(x,y,z) = f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) = g(\rho,\theta,z)$$

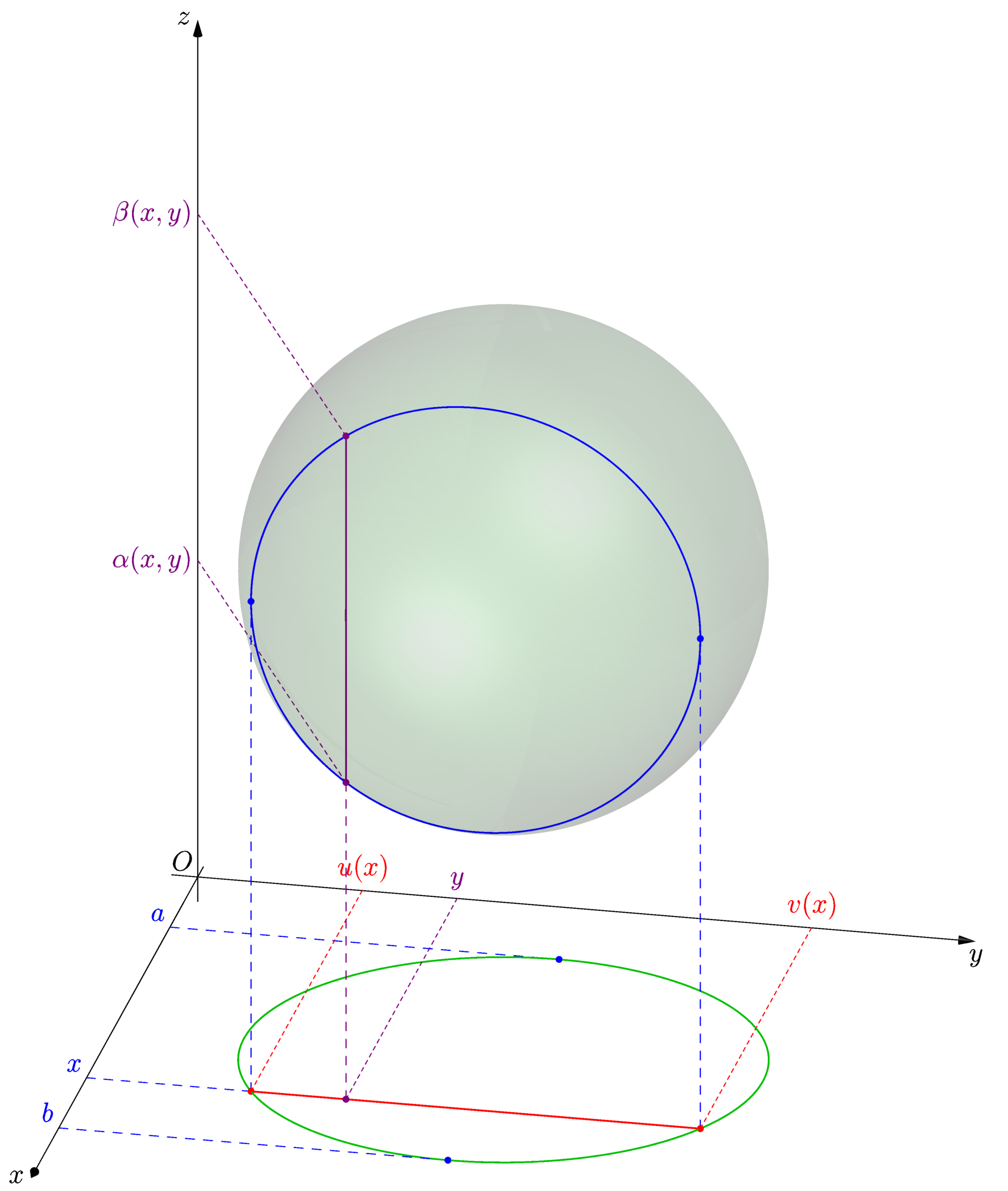

Figure 5 – **Intégrale triple**

On regardera la figure 6, page suivante.

$$\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_\Delta g(\rho,\theta,z)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

Le calcul du jacobien est facile $\dfrac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,z)} = \rho$ et on a encore $\rho \geqslant 0$.
La figure 7, page 9, indique le mode de calcul.

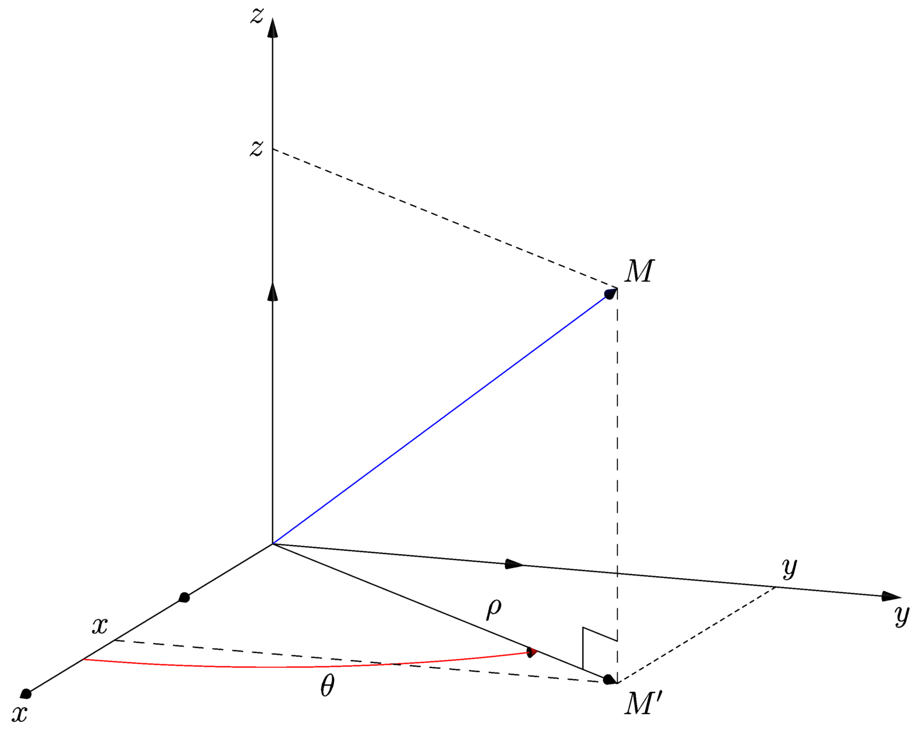

Figure 6 – **Coordonnées Cylindriques**

2.4. Coordonnées sphériques

On notera sur la figure 8 la définition des coordonnées sphériques.

> Cette notation est la notation des mathématiciens : les physiciens utilisent l'angle entre Oz et OM qui appartient donc à $[0, \pi]$.
> Dans la formule, au niveau de la valeur absolue du jacobien, ils échangent ainsi $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$.
> Attention, parfois, ils changent aussi le nom des angles...

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ z = \rho\sin\varphi \end{cases} \quad (x,y,z) \in \mathrm{D} \Leftrightarrow (\rho,\theta,\varphi) \in \Delta, \text{ et } f(x,y,z) = g(\rho,\theta,\varphi)$$

On regardera la figure 8, page 10.

$$\iiint_{\mathrm{D}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\Delta} g(\rho,\theta,\varphi)\rho^2\cos\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

Le calcul du jacobien est facile : $\dfrac{\mathrm{D}(x,y,z)}{\mathrm{D}(\rho,\theta,\varphi)} = \rho^2\cos\varphi$, et on a bien : $\cos\varphi \geqslant 0$.
La figure 9, page 11, indique le mode de calcul.
Les coordonnées sphériques du physicien sont illustrées sur la figure 10, page 12.
Dans ce cas, le calcul du jacobien donne : $\dfrac{\mathrm{D}(x,y,z)}{\mathrm{D}(\rho,\theta,\varphi)} = \rho^2\sin\theta$, et on a bien : $\sin\theta \geqslant 0$.

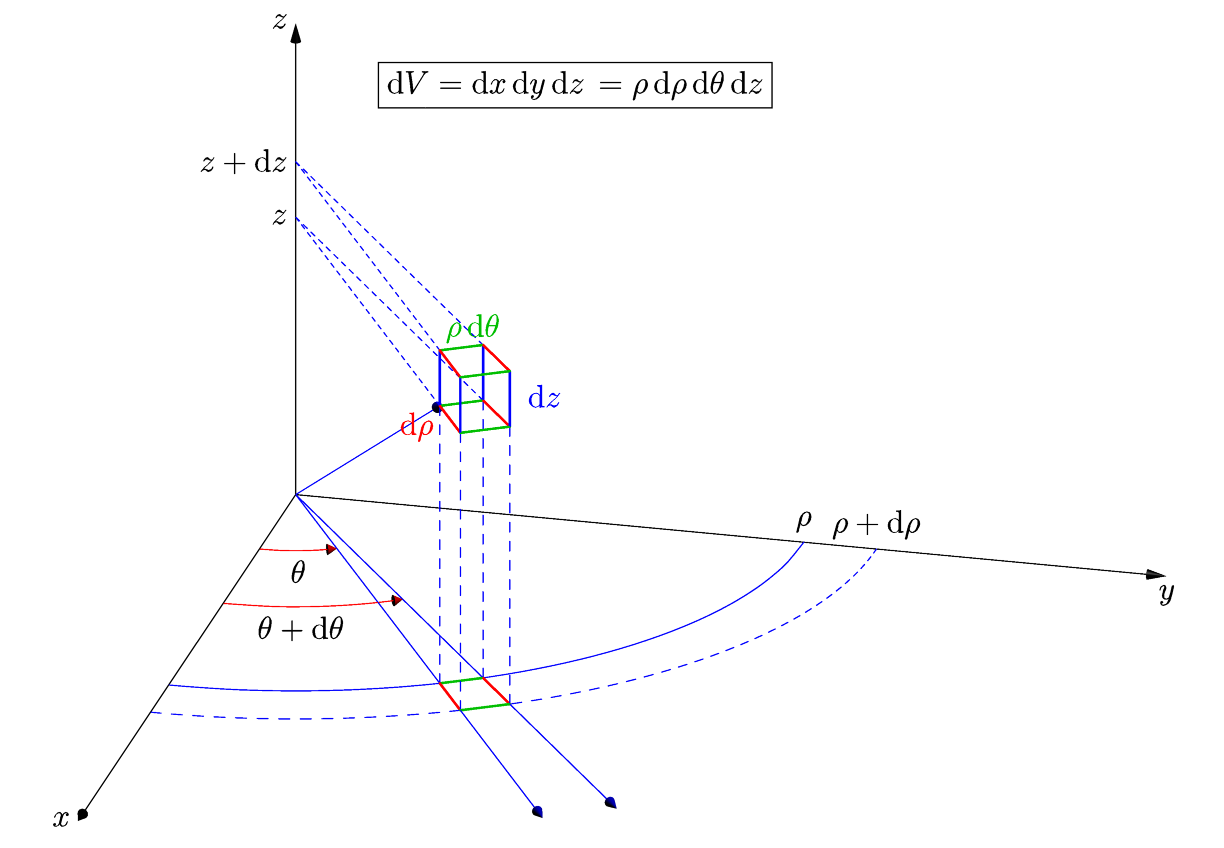

Figure 7 – $\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Delta g(\rho,\theta,z)\rho\,d\rho\,d\theta\,dz$

3. Calculs divers

3.1. Aire ou volume de Δ

Il suffit de calculer $\iint_\Delta dx\,dy$ pour l'aire d'une partie fermée bornée du plan et $\iiint_\Delta dx\,dy\,dz$ pour le volume d'une partie fermée bornée de l'espace.

Remarque : Dans le cas d'une courbe définie en coordonnées polaires et où ρ ne change pas de signe et où θ décrit, par exemple, $[0, 2\pi]$, l'aire intérieure à la courbe est : $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} \rho^2(\theta)\,d\theta$.

3.2. Masse

Si on a $\mu(x,y,z)$ la masse volumique du solide en un point donné,

$$M = \iiint_\Delta \mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

donne la masse. Pour une plaque, on peut faire un calcul équivalent avec la densité surfacique $\sigma(x,y)$ et une intégrale double,

$$M = \iint_\Delta \sigma(x,y)\,dx\,dy$$

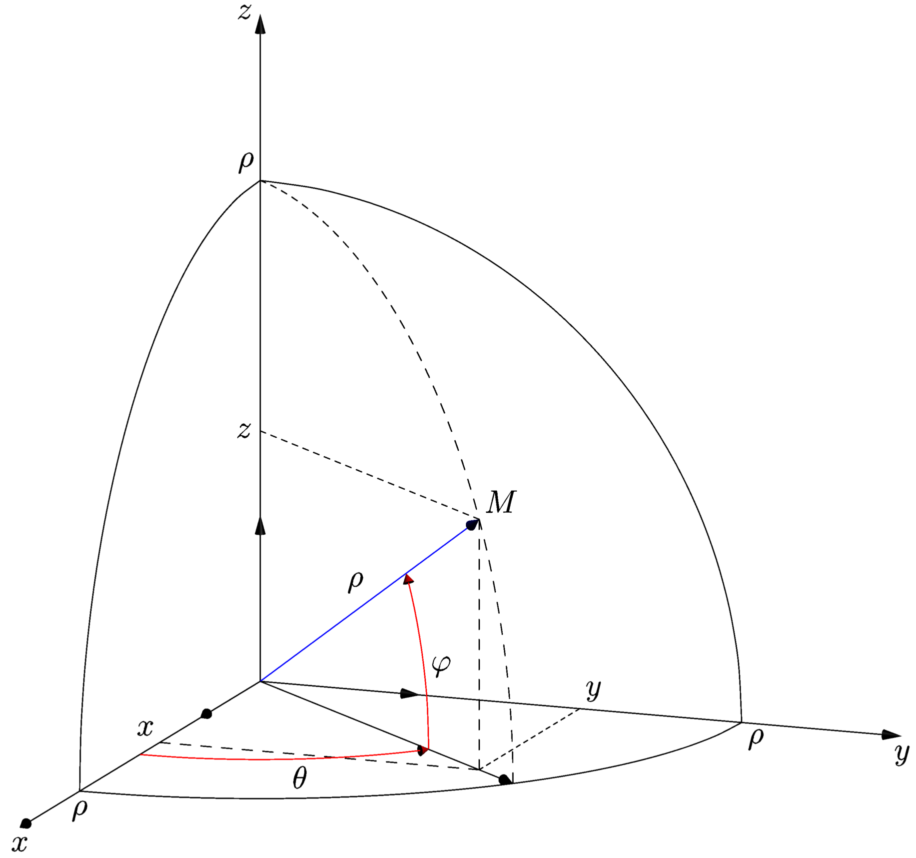

Figure 8 – **Coordonnées Sphériques du mathématicien**

3.3. Centre d'inertie

Avec les mêmes notation, et P de coordonnées (x, y, z) on a :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \iiint_\Delta \overrightarrow{OP}\, \mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

ou en densité surfacique :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \iint_\Delta \overrightarrow{OP}\, \sigma(x, y)\, dx\, dy$$

Ce qui donne pour la première coordonnée par exemple :

$$x_G = \frac{1}{M} \iiint_\Delta x\, \mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

ou encore, dans le cas d'une densité surfacique :

$$x_G = \frac{1}{M} \iint_\Delta x\, \sigma(x, y)\, dx\, dy$$

3.4. Moments d'inertie

Pour un solide, un moment d'inertie peut se calculer par rapport à un point, une droite ou un plan qu'on appelle dans tous les cas A.

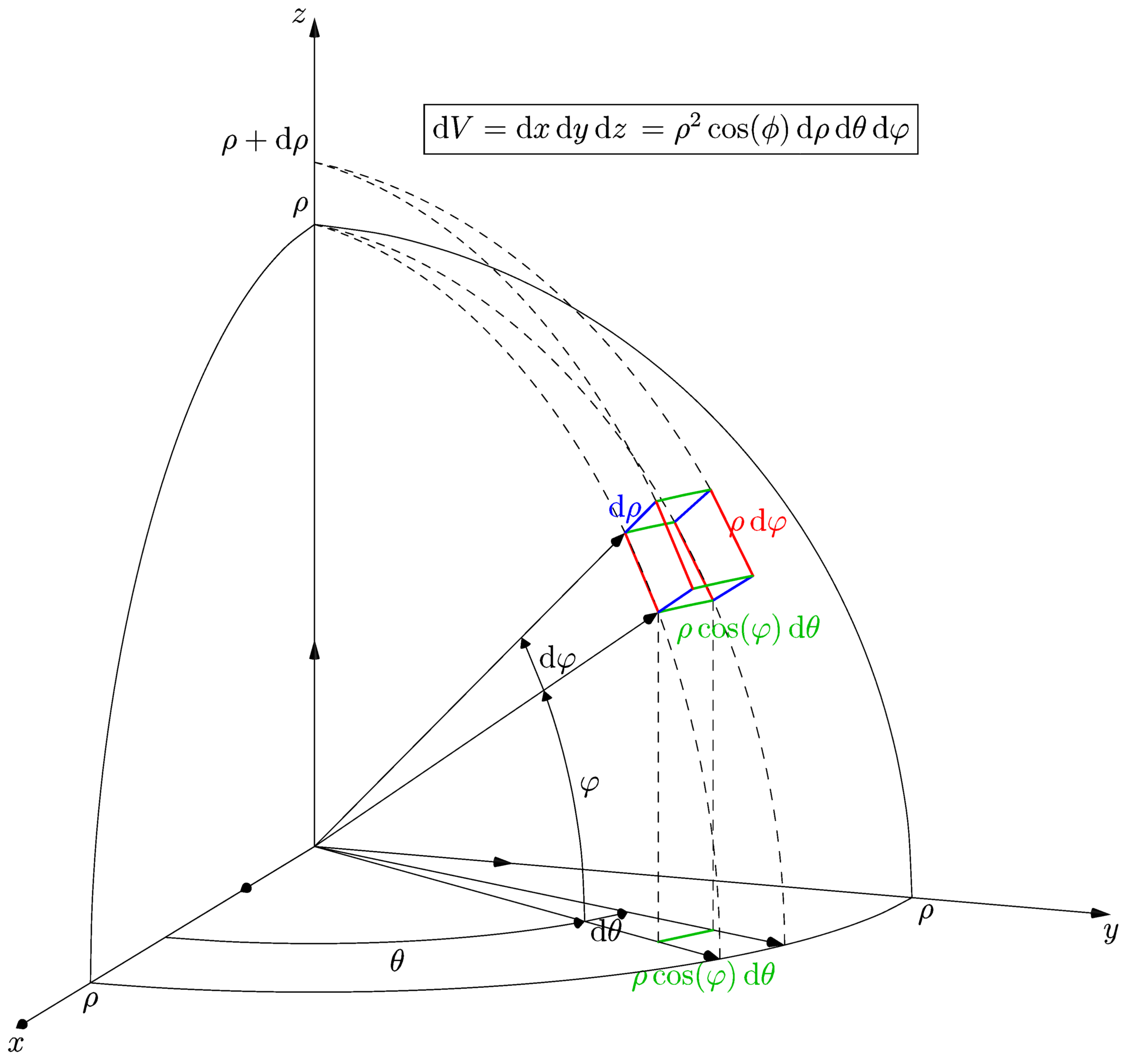

Figure 9 – $\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_\Delta g(\rho,\theta,\varphi)\rho^2\cos\varphi\;\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

On note $d\left((x,y,z),\mathrm{A}\right)$ la distance du point courant à A.
Toujours avec les mêmes notations, on a :

$$\mathrm{J}_\mathrm{A} = \iiint_\Delta d\left((x,y,z),\mathrm{A}\right)^2\;\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y\;\mathrm{d}z$$

On peut faire, une dernière fois, le même type de calcul pour une plaque :

$$\mathrm{J}_\mathrm{A} = \iint_\Delta d\left((x,y),\mathrm{A}\right)^2\;\sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y$$

Pour un volume, le moment d'inertie par rapport à l'axe Oz est donc :

$$\mathrm{J}_{\mathrm{O}z} = \iiint_\Delta \left(x^2+y^2\right)\;\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y\;\mathrm{d}z$$

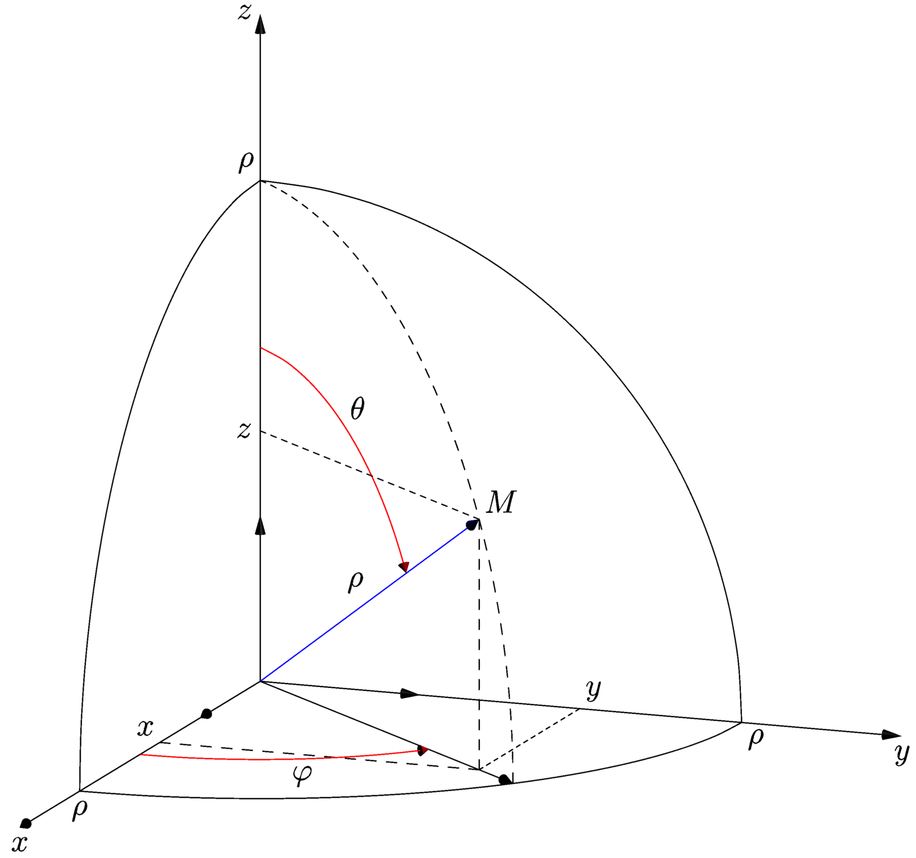

Figure 10 – **Coordonnées Sphériques des physiciens**

3.5. Colbert, lycée numérique

a/ Maple

C'est le package « `student` » qui possède les mots clefs permettant de calculer des intégrales doubles ou triples.
Les deux commandes sont « `Doubleint` » et « `Tripleint` ». Ce sont des formes inertes, il faut leur appliquer « `value` » pour avoir le calcul effectif.
Pas de faux espoirs cependant, il nous faut une description hiérarchisée du domaine pour que ce soit utilisable...

b/ Calculatrices

Il faut calculer les intégrales multiples comme des intégrales simples emboîtées...