

Exercice N°1

Représenter, dans le plan, les ensembles suivants :

$$A = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z + i| = 2\}, B = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } z = 1 - i + it, t \in \mathbb{R}\}$$

$$C = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z + i| \leq 2\}, D = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } 1 \leq |z + i| \leq 2\}$$

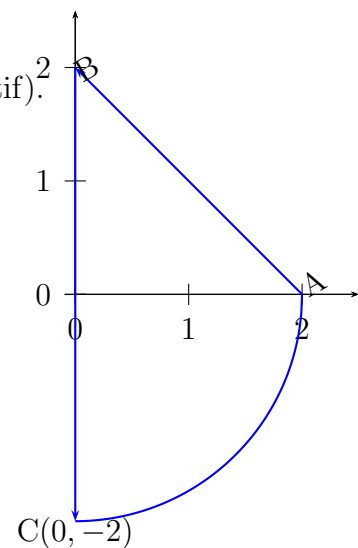
Exercice N°2

Calculer les intégrales curvilignes suivantes :

$$1) \int_{(ABCA)} \operatorname{Re}(z)|z|^2 dz$$

$$2) \int_{(ABCA)} z \operatorname{Arg}(z) dz$$

(Sachant que le chemin d'intégration $(ABCA)$ orienté dans le sens positif).



$$1) \int_{(OABO)} \operatorname{Re}(z)|z| dz, 2) \int_{(OABO)} z \operatorname{Arg}(z) dz$$

Solution

$$A = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z + i| = 2\} = \{M(x, y) \text{ tq } |z - (-i)| = 2\}$$

Le nombre complexe $z = x + iy$ Au sens géométrique se représente par le point $M(x, y)$ ou le vecteur \overrightarrow{OM}

Le nombre complexe $z_0 = -i$ Au sens géométrique devient $M_0(0, -1)$ ou $\overrightarrow{OM_0}$

le module $|z|$ Au sens géométrique devient $\|z\|$

Grâce à cette représentation, on écrit :

$$A = \left\{ M \text{ tq } \left\| \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} \right\| = 2 \right\}$$

$$A = \left\{ M \text{ tq } \left\| \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{M_0O} \right\| = 2 \right\}$$

$$A = \left\{ M \text{ tq } \left\| \overrightarrow{M_0M} \right\| = 2 \right\}$$

L'ensemble A est un cercle de centre M_0 de rayon 2.

De la même manière,

$$B = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } z - (1+i) = it, \quad 0 \leq t \leq 1\} = \left\{ M(x, y) \text{ tq } \overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{OM_0}t, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Avec $M_1(1, 1)$ et $M_0(0, 1)$.

La condition $\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{OM_0}t$ signifie $\overrightarrow{M_1M}$ parallèle à $\overrightarrow{OM_0}$, en rajoutant la condition $t \in \mathbb{R}$ l'ensemble B est une droite passant par le point M_1 dont le vecteur directeur est $\overrightarrow{OM_0}$

L'ensemble $C = \left\{ M \text{ tq } \left\| \overrightarrow{M_0M} \right\| \leq 2 \right\}$ est un disque de centre $M_0(0, -1)$ de rayon 2

Dans D , on trace deux disques D_1 de centre $(0, -1)$ de rayon 2 et le disque D_2 de centre $(0, -1)$ de rayon 1

L'ensemble D est défini comme étant l'ensemble des points M appartenant à D_1 et n'appartiennent pas à D_2 .

Exercice 2

$$\int_{(ABCA)} \operatorname{Re}(z)|z|^2 dz = \int_{[AB]} \operatorname{Re}(z)|z|^2 dz + \int_{[BC]} \operatorname{Re}(z)|z|^2 dz + \int_{(CA)} \operatorname{Re}(z)|z|^2 dz$$

$z = x + iy \in [AB] \Leftrightarrow M(x, y) \in [AB] \Leftrightarrow y = -x + 2.$

$$z = x + iy \implies dz = dx + idy, \text{ donc } \int_{[AB]} \operatorname{Re}(z)|z|^2 dz = \int_{[AB]} x(\sqrt{x^2 + y^2})^2(dx + idy)$$

Comme $y = -x + 2$, $dy = -dx$:

$$\int_{[AB]} x(x^2 + y^2)(dx + idy) = \int_2^0 x(2x^2 - 4x + 4)(1 - i)dx = (1 - i) \int_2^0 (2x^3 - 4x^2 + 4x)dx$$

$z = x + iy \in [BC] \Leftrightarrow M(x, y) \in [BC] \Leftrightarrow x = 0$ et y varie de 2 à -2.

$dz = dx + dy = dy$ car $x = 0$.

$$\int_{[BC]} \operatorname{Re}(z)|z|^2 dz = \int_2^{-2} 0 dy = 0 \text{ car sur } [BC] \text{ on a } \operatorname{Re}(z) = x = 0.$$

$z = x + iy \in (CB) \Leftrightarrow M(x, y) \in (CB) \Leftrightarrow x = 2 \cos \theta, \quad y = 2 \sin \theta$, sans oublier que $\theta = \text{Arg}(z)$ et θ varie de $\frac{3\pi}{2}$ à 2π .

$dx = -2 \sin \theta d\theta$ et $dy = 2 \cos \theta d\theta$ donc :

$$\int_{(CA)} \text{Re}(z)|z|^2 dz = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (8 \cos \theta)(-2 \sin \theta + i2 \cos \theta) d\theta. \text{ car}$$

$$dz = dx + i dy = (-2 \sin \theta + i2 \cos \theta) d\theta \text{ et } |z| = 2.$$