<u>Exercice N°1 :</u> (8.5Pts)

I- Soit le système de trois charges électriques ponctuelles disposées aux points **A**, **B** et **C** sur le périmètre d'un cercle de rayon **R** et de centre **O** comme illustré sur la figure 1 .

1- Trouver l'expression du champ électrique $\vec{E}_1(O)$ créé au centre du cercle.
2- Déterminer l'expression du potentiel électrique $V_1(O)$ résultant au centre du cercle.
3- Déterminer l'énergie interne de ce système de trois charges.

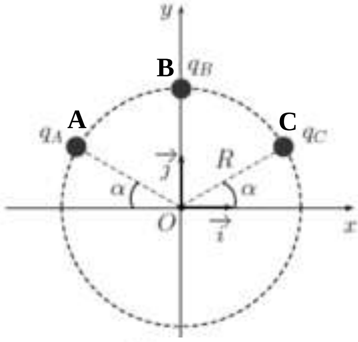


Figure 1

II. Une charge électrique est répartie de manière uniforme, avec une densité de charge linéique $\lambda > 0$ sur le demi-cercle inférieur du cercle précédent (voir figure 2).

1- Trouver l'expression du champ électrique $\vec{E}_2(O)$ créé au centre du cercle.
2- Pour quelle valeur de λ obtient-on $\vec{E}_1(O) = \vec{E}_2(O)$?
3- Déterminer l'expression du potentiel électrique $V_2(O)$ résultant au centre du cercle.
4- Pour quelle valeur de λ obtient-on $V_1(O) = V_2(O)$.
5- Déterminer l'expression du vecteur champ électrique total $\vec{E}(O)$ résultant au centre du cercle pour $\lambda = \frac{3q}{\pi R}$.

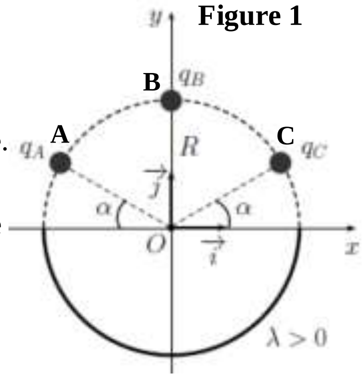


Figure 2

<u>On donne :</u> $q_A = q_B = q_C = q, = 30^0$, $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ $(Constante\ de\ Coulomb)$

<u>Exercice N°2:</u> (6.5Pts)

Une sphère conductrice, de rayon $\mathbf{R_1}$ et de centre **O**, porte une charge $\mathbf{Q_1 > 0}$, uniformément répartie sur sa surface avec une densité de charge $\boldsymbol{\sigma_1}$**.** Cette sphère est entourée d'une autre sphère conductrice creuse, concentrique à la première, de rayon intérieur $\mathbf{R_2}$ et de rayon extérieur $\mathbf{R_3}$ ($\mathbf{R_1 < R_2 < R_3}$) . La sphère creuse porte une charge $\mathbf{Q_2 < 0}$, uniformément répartie sur sa surface intérieure avec une densité $\boldsymbol{\sigma_2}$ et telle que $\mathbf{Q_2 = -Q_1}$ (Figure 3)

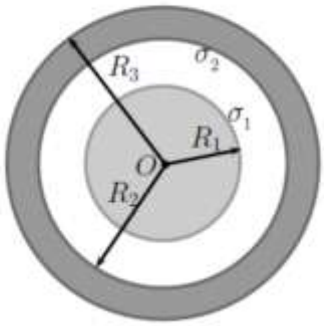


Figure 3

1- Déterminer la relation entre σ_1 et σ_2.
2- Déterminer le champ électrique en tout point **M (r)** de l'espace (pour : $\mathbf{r < R_1, R_1 < r < R_2}$ **et** $\mathbf{r > R_2}$).
3- En déduire le potentiel électrostatique en tout point M (r) de l'espace ($\mathbf{r < R_1, R_1 < r < R_2}$ **et** $\mathbf{r > R_2}$) sachant que $V(r \to \infty) = 0$.

<u>Exercice N°3 :</u> (05Pts)

I- Soit une sphère ***conductrice A*** de rayon ***a*** portant une charge positive **+ *Q*.** Nous la plaçons au centre d'une coquille sphérique ***conductrice B*** de rayon intérieur ***b*** et de rayon extérieur ***c***, et portant initialement une charge **–2*Q*** .

- Trouver les charges Q_{Bint} et Q_{Bext} des surfaces intérieure et extérieure de la coquille sphérique *B* à l'équilibre électrostatique**. Justifier**

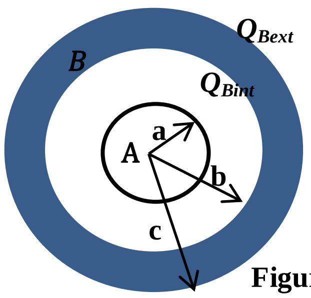


Figure 4

II- On considère l'association de trois condensateurs illustrée par la figure 5:

1- Sachant que la capacité équivalente entre A et B est
$C_{AB} = 1.2\mu F$ et que $C_1 = C_2 = 2\mu F$, calculer C_3.
2- On applique la tension $U_{AB} = V_A - V_B = 240V$.
- Déterminer la charge prise par chaque condensateur ainsi que la tension aux bornes de chacun d'entre eux.
3- Quelle est l'énergie électrique de ce système.

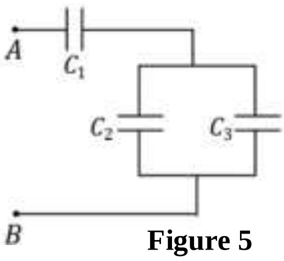


Figure 5

Bon courage

Université A. Mira de Bejaia **2024/2025**
Département de technologie **Durée 1h30**
1ère année ST LMD

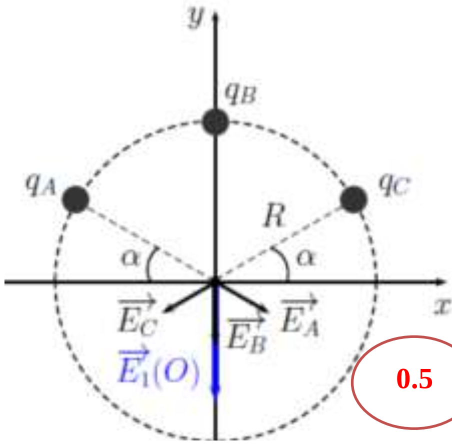
Corrigé

Recommandations

- ***Veuillez appliquer le barème tel quel.***
- ***Il ne faut pas attribuer de note pour les formules et les expressions parachutées***

Exercice N° 1 (8.5Pts)

I-



0.5

1. Le champ électrique résultant au centre du cercle est :

$$\vec{E}_1(O) = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C$$

Avec : $\begin{cases} \vec{E}_A = K\frac{q_A}{r^2{}_{AO}}\vec{u}_{AO} = K\frac{q}{R^2}[\cos\alpha\ \vec{\imath} - \sin\alpha\ \vec{\jmath}] & 0.5 \\ \vec{E}_B = K\frac{q_B}{r^2{}_{BO}}\vec{u}_{BO} = -K\frac{q}{R^2}\vec{\jmath} & 0.5 \\ \vec{E}_C = K\frac{q_A}{r^2{}_{CO}}\vec{u}_{CO} = K\frac{q}{R^2}[-\cos\alpha\ \vec{\imath} - \sin\alpha\ \vec{\jmath}] & 0.5 \end{cases}$

Soit :

0.25 0.25

$$\vec{E}_1(O) = K\frac{q}{R^2}(-1 - 2\sin\alpha)\vec{\jmath} \Rightarrow \boldsymbol{\vec{E}_1(O)} = \frac{\boldsymbol{-q}}{\boldsymbol{2\pi\varepsilon_0 R^2}}\boldsymbol{\vec{\jmath}} \quad , \sin\alpha = \frac{1}{2}\ et\ K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

2. Le potentiel électrique résultant au centre du cercle est :

$$V_1(O) = V_A + V_B + V_C$$

Avec :

0.25

$$V_A = V_B = V_B = \frac{Kq}{R} \Rightarrow \boldsymbol{V_1(O)} = \frac{\boldsymbol{3Kq}}{\boldsymbol{R}} = \frac{\boldsymbol{3Kq}}{\boldsymbol{4\pi\varepsilon_0 R}} \quad 0.25$$

3. L'énergie interne du système de trois charges est :

$$U = K\left[\frac{q_A \cdot q_B}{r_{AB}} + \frac{q_A \cdot q_C}{r_{AC}} + \frac{q_B \cdot q_C}{r_{BC}}\right] \quad 0.25$$

Avec :

$$\begin{cases} r_{AB} = R & , ABO\ triangle\ équilatéral \\ r_{BC} = R & , ACO\ triangle\ équilatéral \\ r_{AC} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = R\sqrt{3} & 0.25 \end{cases}$$

Soit :

$$U = K\left[\frac{q_A \cdot q_B}{R} + \frac{q_A \cdot q_C}{R\sqrt{3}} + \frac{q_B \cdot q_C}{R}\right] \Rightarrow \boldsymbol{U} = \frac{\boldsymbol{q^2}}{\boldsymbol{4\pi\varepsilon_0 R}}\left[\boldsymbol{2} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\sqrt{3}}}\right] \quad 0.5$$

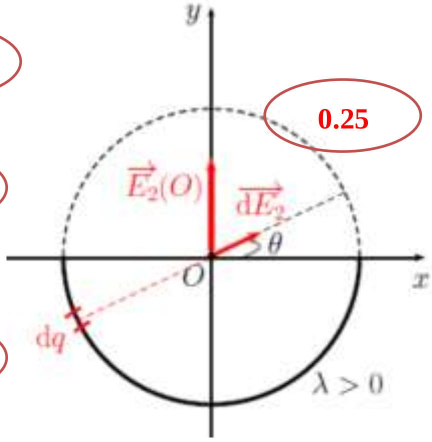
II.

1. Le champ électrique $\vec{E}_2(O)$ créé par cette distribution linéique :

Le vecteur champ électrique élémentaire créé au point O par l'élément de charge dq est :

$$\overrightarrow{dE}_2(O) = \frac{k.dq}{r^2}\vec{u}_r = \frac{k.dq}{R^2}(\cos\alpha\ \vec{\imath} - \sin\alpha\ \vec{\jmath})$$ 0.5

Avec : $\begin{cases} dq = \lambda.dl = \lambda.R.d\theta \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$ 0.25



Soit : $\begin{cases} dE_{2x} = \frac{k\lambda}{R}\cos\theta\,.d\theta \\ \\ dE_{2y} = \frac{k\lambda}{R}\sin\theta\,.d\theta \end{cases}$ 0.25

Ainsi : $\begin{cases} E_{2x} = \frac{k\lambda}{R}\int_0^\pi \cos\theta\,.d\theta = 0 \\ \\ E_{2y} = \frac{k\lambda}{R}\int_0^\pi \sin\theta\,.d\theta = \frac{2k\lambda}{R} \end{cases}$ 0.5

Remarque : On aurait pu directement déduire que, pour des raisons de symétrie, la composante horizontale du champ électrique était nulle.

Le champ électrique résultant en O est alors :

$$\boldsymbol{\vec{E}_2(O) = \frac{2k\lambda}{R}\vec{\jmath} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\vec{\jmath}}$$ 0.5

2.

$$E_1(O) = E_2(O) \Rightarrow \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow \boldsymbol{\lambda = \frac{q}{R}}$$ 0.25

3. Le potentiel électrique $V_2(O)$ créé par cette distribution linéique :

Le potentiel électrique élémentaire créé au point O par l'élément de charge dq est :

$$dV_2(O) = \frac{kdq}{R}$$ 0.25

Avec : $\begin{cases} dq = \lambda.dl = \lambda.R.d\theta \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$

Soit : $dV_2(O) = k.\lambda.d\theta \Rightarrow V_2(O) = k\lambda\int_0^\pi d\theta$ 0.25

Alors :

$$\boldsymbol{V_2(O) = \frac{\lambda}{4\varepsilon_0}}$$ 0.25

4.

$$V_1(O) = V_2(O) \Rightarrow \frac{3Kq}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\lambda}{4\varepsilon_0} \Rightarrow \boldsymbol{\lambda = \frac{3q}{\pi R}}$$ 0.25

5. Le champ électrique total $\vec{E}(O)$

D'après le principe de superposition, le champ électrique résultant au centre du cercle O est :

$$\vec{E}(O) = \vec{E}_1(O) + \vec{E}_2(O) = \left[\frac{-q}{2\pi\varepsilon_0 R^2} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\right]\vec{j}$$ 0.5

Sachant que $= \frac{3q}{\pi R}$, l'expression du champ électrique total devient :

$$\vec{E}(O) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left[-1 + \frac{3}{\pi}\right]\vec{j} = -\frac{0.05q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{j}$$ 0.5

<u>Exercice N° 2 (6.5Pts) :</u>

1. On sait que :

$$Q_2 = -Q_1 \ \ tel\ que \begin{cases} Q_1 = \iint \sigma_1 . dS_1 = \sigma_1 . S_1 = \sigma_1 . 4\pi {R_1}^2 \\ Q_2 = \iint \sigma_2 . dS_2 = \sigma_2 . S_2 = \sigma_2 . 4\pi {R_2}^2 \end{cases}$$ 0.5

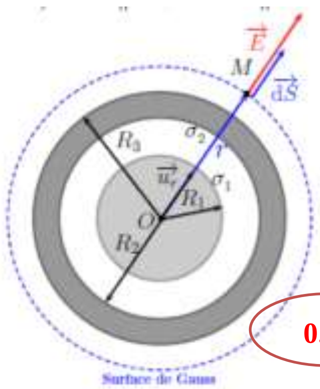
Soit :

$$\sigma_1 . {R_1}^2 = -\sigma_2 . {R_2}^2 \Rightarrow \boldsymbol{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = -\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2}$$ 0.5

2.

La distribution de charge sur les deux sphères possédant une symétrie sphérique, le champ électrostatique qui en résulte aura la même symétrie et sera radial :

$$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$$ 0.25



0.25

En raison de cette symétrie, on choisit comme surface de Gauss adaptée une sphère de rayon r et de centre O.
En tout point de la surface de Gauss (r constant), E (r) est constant.

Le théorème de Gauss s'écrit :

$$\Phi = \iint_{S_G} \vec{E} . \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$ 0.25

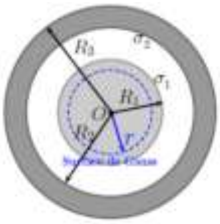
Tel que : $\iint_{S_G} \vec{E} . \vec{dS} = \iint_{S_G} E(r) . dS = E(r) \iint_{S_G} dS = E(r). S_G\text{K} \Rightarrow \boldsymbol{\iint_{S_G} \vec{E} . \vec{dS} = E(r). 4\pi r^2}$ 0.25

Le théorème de Gauss permet d'écrire :

$$E(r). 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boldsymbol{E(r) = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$ 0.25

Pour le calcul du champ électrique, on distingue trois régions :

Région 1 : $r < R_1$

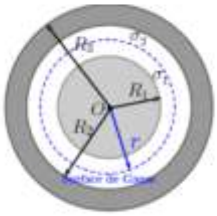


$$\boldsymbol{Q_{int}} = \mathbf{0} \Rightarrow E_1(r) = 0$$ 0.25

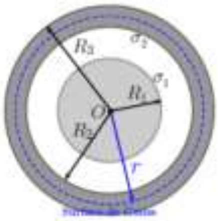
Région 2 : $R_1 < r < R_2$

0.25 0.25

$$\boldsymbol{Q_{int}} = \boldsymbol{Q_1} = \sigma_1 . 4\pi {R_1}^2 \Longrightarrow E_2(r) = \frac{\sigma_1 . 4\pi {R_1}^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Longrightarrow \boldsymbol{E_2(r)} = \frac{\boldsymbol{\sigma_1 . {R_1}^2}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} . \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r^2}} = \frac{\boldsymbol{\sigma_2 . {R_2}^2}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}$$



Région 3 : $r > R_2$



$$\boldsymbol{Q_{int}} = \boldsymbol{Q_1} + \boldsymbol{Q_2} = \mathbf{0} \Longrightarrow E_3(r) = 0$$ 0.25

3. Le potentiel électrostatique dans les différentes régions :
   Le potentiel électrostatique se déduit du champ électrique selon la relation :

$$\mathrm{dV} = -\vec{E} . \overrightarrow{dr} \Longrightarrow dV = -E(r) . dr \Longrightarrow \boldsymbol{V} = -\int \boldsymbol{E(r)} . \boldsymbol{dr}$$ 0.5

Région 1 : $r < R_1$

$$E_1(r) = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{V_1} = \boldsymbol{C_1}$$ 0.25

Région 2 : $R_1 < r < R_2$

0.25 0.25

$$\boldsymbol{E_2(r)} = \frac{\boldsymbol{\sigma_1 . {R_1}^2}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} . \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r^2}} \Longrightarrow \boldsymbol{V_2} = \frac{\boldsymbol{\sigma_1 . {R_1}^2}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} \int \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r^2}} . \boldsymbol{dr} \Longrightarrow \boldsymbol{V_2} = \frac{\boldsymbol{\sigma_1 . {R_1}^2}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} . \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{C_2}$$

Région 3 : $r > R_2$

$$E_3(r) = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{V_3} = \boldsymbol{C_3}$$ 0.25

La détermination des constantes d'intégration C_1, C_2 et C_3 se fait en appliquant les conditions de continuité du potentiel électrique lors du passage d'une région à une autre :

$$V_1(r = R_1) = V_2(r = R_1)$$ 0.25

$$V_2(r = R_2) = V_3(r = R_2)$$

Sachant que : $V(r \to \infty) = 0 \Longrightarrow V_3(\to \infty) = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{C_3 = 0}$ 0.25

Soit :

$$\frac{\sigma_1 . R_1{}^2}{\varepsilon_0} . \frac{1}{R_2} + C_2 = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{C_2 = -\frac{\sigma_1 . R_1{}^2}{\varepsilon_0} . \frac{1}{R_2} = -\frac{\sigma_2 . R_2}{\varepsilon_0}}$$ 0.25

Et

$$C_1 = \frac{\sigma_1 . R_1}{\varepsilon_0} + C_2 \Longrightarrow C_1 = \frac{\sigma_1 . R_1}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2 . R_2}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \boldsymbol{C_1 = \frac{\sigma_1 . R_1 - \sigma_2 . R_2}{\varepsilon_0}}$$ 0.25

Les expressions du potentiel électrique sont :

0.25

$$\boldsymbol{V_1(r) = \frac{\sigma_1 . R_1 - \sigma_2 . R_2}{\varepsilon_0}}$$

$$\boldsymbol{V_2(r) = \frac{\sigma_2 . R_2}{\varepsilon_0}\left(\frac{R_2}{r} - 1\right)}$$ 0.25

$$\boldsymbol{V_3(r) = 0}$$ 0.25

<u>Exercice N° 3 (5Pts) :</u>

I. – A l'équilibre électrostatique :

$$\boldsymbol{Q_A = +Q \quad \Rightarrow Q_{Bint} = -Q \;\; (Influence\ totale)}$$ 0.5

Comme le conducteur B est isolé, alors sa charge reste constante :

$$\boldsymbol{Q_A = Cst \Rightarrow Q_{Bint} + Q_{Bext} = -2Q \Rightarrow Q_{Bext} = -Q}$$ 0.75

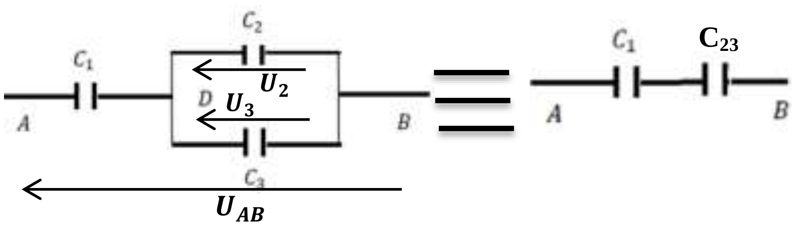
II.

1. La capacité C_3

$$\frac{1}{C_{AB}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1 + C_3} \to \frac{1}{C_{AB}} - \frac{1}{C_1} = \frac{1}{C_1 + C_3} \to \frac{C_1 - C_{AB}}{C_1 . C_{AB}} = \frac{1}{C_1 + C_3} \to C_1 + C_3 = \frac{C_1 . C_{AB}}{C_1 - C_{AB}} \to C_3 = \frac{C_1 . C_{AB}}{C_1 - C_{AB}} - C_1$$

0.75

$$\Rightarrow \boldsymbol{C_3 = 1\mu F}$$



2. Charges et tensions **:**

$$\boldsymbol{U_{AB} = \frac{Q_{AB}}{C_{AB}} \Longrightarrow Q_{AB} = U_{AB} . C_{AB} = 288\mu C}$$ 0.5

Les condensateurs C_1 et ($C_{23} = C_2 + C_3$)portent aussi la charge Q_{AB} :

Donc :

$$Q_1 = C_1 U_1 = Q_{AB} \Longrightarrow U_1 = \frac{Q_{AB}}{C_1} = \mathbf{144V} \quad 0.5$$

Et

$$U_2 = U_3 = U_{AB} - U_1 = \mathbf{96V} \quad 0.5$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} Q_2 = C_2 U_2 = \mathbf{192\mu C} \quad 0.5 \\ \qquad\qquad \boldsymbol{et} \\ Q_3 = C_3 U_3 = \mathbf{96\mu C} \quad 0.5 \end{cases}$$

3.L'énergie électrique emmagasinée dans le système :

$$W = \frac{1}{2} C_{AB} {U_{AB}}^2 = \mathbf{3.45\ 10^{-2} J} \quad 0.5$$