Université Abderrahmae MIRA Béjaia | Mai 2025
Faculté de Thechnologie | 10H30-12H00
Département de Technologie
1ère année ST-LMD

Examen de MATHS 2

Exercice 1 : (4 pts) Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} \qquad\qquad g(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$$

a) Calculer $I_1 = \int_1^e f(x)dx$.
b) Soit $I_2 = \int_1^e g(x)dx$. Calculer $I_1 + I_2$ et déduire la valeur de I_2.

Exercice 2 : (6 pts)

I. Soit $x \in]1, +\infty[$ et considérons l'équation différentielle

$$y' - \frac{1}{x}y = \ln x \qquad\qquad (E_1)$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E_1).
2. Résoudre l'équation non homogène (E_1).

II. Soit l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' - 6y' + 9y = -2e^{3x} \qquad\qquad (E_2)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène correspondante.
2. Déterminer la constante α pour que $y_p(x) = \alpha x^2 e^{3x}$ soit une solution particulière de (E_2).
3. Déterminer la solution générale de (E_2).

Exercice 3 : (8 pts)
On considère le système linéaire

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} 2x - y - 2z = -6 \\ -x + 2y - 2z = -3 \\ -2x - 2y - z = -9 \end{cases}$$

1. Écrire le système linéaire $(\mathcal{S})$ sous forme matricielle $A \cdot X = b$.
2. Calculer A^2 puis déduire A^{-1}.
3. En déduire la solution du système $(\mathcal{S})$.
4. Résoudre par la méthode de Gauss le système linéaire $(\mathcal{S})$.

Questions de cours : (02 pts)
1. Donner la définition de la norme euclidienne d'un vecteur X dans $\mathbb{R}^n$.
2. Soient les fonctions : $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ et $g(x,y) = \ln(xy)$.
Déterminer le domaine de définition D_f de f et D_g de g.

Bon courage

Université A. MIRA-Béjaia
Faculté de Technologie **Mai 2025**
Département de Technologie **Durée :01 heure 30**

Corrigé d'examen de MATHS 2

Exercice 1. (**04 pts**)
Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} \qquad g(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$$

a) Calculons $I_1 = \int_1^e f(x)dx$

$$\begin{aligned}\int_1^e f(x)dx &= \int_1^e \frac{x}{x^2+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_1^e \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\left(e^2+1\right) - \ln 2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{e^2+1}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

b) Soit $I_2 = \int_1^e g(x)dx$. Calculons $I_1 + I_2$

$$\begin{aligned}I_1 + I_2 &= \int_1^e f(x)dx + \int_1^e g(x)dx \\ &= \int_1^e (f(x)+g(x))dx \\ &= \int_1^e \left(\frac{x}{x^2+1} + \frac{x^3}{x^2+1}\right)dx \\ &= \int_1^e \frac{x+x^3}{x^2+1}dx \\ &= \int_1^e \frac{x\left(1+x^2\right)}{x^2+1}dx \\ &= \int_1^e xdx \\ &= \frac{1}{2}x^2\Big|_1^e \\ &= \frac{1}{2}\left(e^2-1\right) \\ &= \frac{e^2-1}{2}\end{aligned}$$

En déduire la valeur de I_2.
On a

$$
\begin{aligned}
&I_1 + I_2 = \frac{e^2-1}{2} \\
&\text{donc } I_2 = \frac{e^2-1}{2} - I_1 \\
&= \frac{e^2-1}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{e^2+1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(e^2 - 1 - \ln\frac{e^2+1}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Exercice 2. (06 pts)

I. Soit $x \in]1, +\infty[$ et considérons l'équation différentielle

$$y' - \frac{1}{x}y = \ln x \qquad (E_1)$$

1. Résolution de l'équation homogène associée à (E_1).

$$y' - \frac{1}{x}y = 0 \Longleftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \Longleftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

On suppose que $y \neq 0$, car $y = 0$ est une solution triviale de l'équation homogène, d'où

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dy}{y} &= \int \frac{dx}{x} \\
\Leftrightarrow \ln|y| &= \ln x + c \\
\Leftrightarrow |y| &= e^{\ln x + c} = e^c x \\
\Leftrightarrow y_{hom} &= Kx, \text{ avec } K = \pm e^c.
\end{aligned}
$$

2. Résolution de l'équation non homogène (E_1).
On fait varier la constante K comme fonction de x, d'où

$$y' = K'x + K,$$

puis on remplace dans (E_1), on obtient

$$K'x + K - \frac{1}{x}Kx = \ln x \Leftrightarrow K'x = \ln x \Leftrightarrow dK = \frac{\ln x}{x}dx \Rightarrow K = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent :

$$y_{gle} = x\left(\frac{1}{2}(\ln x)^2 + \lambda\right), \lambda \in \mathbb{R}.$$

II. Soit l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' - 6y' - 9y = -2e^{3x} \qquad (E_2)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène :

$$y'' - 6y' - 9y = 0 \qquad (EH_2)$$

Équation caractéristique

$$r^2 - 6r + 9 = 0 \qquad (EC_2)$$

On a $\Delta = 0$, d'où l'équation (EC_2) admet une solution réelle double $r_0 = 3$, donc la solution homogène est

$$y_{hom}(x) = (A + Bx)e^{3x}, A,\ B \in \mathbb{R}.$$

2. Déterminons la constante α pour que $y_p(x) = \alpha x^2 e^{3x}$ soit une solution particulière de (E_2).
On dérive deux fois y_p et on remplace dans l'équation (E_2),

$$y_p' = \alpha e^{3x}(3x^2 + 2x),\ \ y_p'' = \alpha e^{3x}(9x^2 + 12x + 2)$$

$$(E_2) \Longrightarrow 2\alpha e^{3x} = -2e^{3x}$$

alors par identification on a

$$\alpha = -1,$$

par conséquent la solution particulière de (E_2) est

$$y_p(x) = -x^2 e^{3x}.$$

3. Déterminons la solution générale de (E_2).

$$y_{gle}(x) = y_{hom}(x) + y_p(x) = (A + Bx)e^{3x} - x^2 e^{3x}, A,\ B \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3. (08 pts)
1. Écriture matricielle $A \cdot X = b$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

2. Calculons A^2

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 9I$$

Comme $A^2 = 9I$ alors $A\left(\frac{1}{9}A\right) = \left(\frac{1}{9}A\right)A = I$ donc $A^{-1} = \frac{1}{9}A$.

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

3. En déduire la solution du système $(\mathcal{S})$.
On a $A\,X = b \Rightarrow X = A^{-1}b$, donc

$$\begin{pmatrix} \text{x} \\ \text{y} \\ \text{z} \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4. Résolution par la méthode du pivot de Gauss
La matrice augmentée du système est :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & -6 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \\ -2 & -2 & -1 & -9 \end{array}\right)$$

Appliquons la méthode du pivot de Gauss sur cette matrice augmentée :

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & -6 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \\ -2 & -2 & -1 & -9 \end{array}\right) \\
\sim &\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & -12 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \end{array}\right)) \quad (\text{avec } L_2 \leftarrow L_1 + 2L_2, \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \\
\sim &\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & -9 & -27 \end{array}\right) \quad (\text{puis } L_3 \leftarrow L_3 + L_2)
\end{aligned}$$

On obtient un système équivalent à $(\mathcal{S})$ compatible,

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = -6 \\ \quad 3y - 6z = -12 \\ \quad\quad -9z = -27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 3 \\ y = \dfrac{1}{3}(-12 + 6 \times 3) \Longrightarrow y = 2. \\ x = \dfrac{1}{2}(-6 + 2 + 2 \times 3) \Longrightarrow x = 1. \end{cases}$$

D'où, $\mathcal{S} = \{(1, 2, 3)\}$.

Questions de cours (02 pts)

1. La définition de la norme euclidienne d'un vecteur X dans $\mathbb{R}^n$.
On appelle norme euclidienne de X dans $\mathbb{R}^n$ (ou longueur de X)

$$\|X\| = \langle X, X \rangle^{\frac{1}{2}} = (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

2. Soient les fonctions : $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ et $g(x, y) = \ln(xy)$.
Déterminons le domaine de définition D_f de f et D_g de g.
On a

$$\begin{aligned} D_f &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 - x^2 - y^2 \geq 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\} \text{ (disque de centre } (0,0) \text{ et de rayon r=1)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_g &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy > 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x > 0 \text{ et } y > 0) \text{ ou} (x < 0 \text{ et } y < 0)\}. \end{aligned}$$