Université A- mira de Bejaia
Faculté des sciences économiques, commerciales et des sciences de gestion
Département SEGC(LMD)
Module stat I
Enseignante : Dr. BERRAH

Chapitre 5 : Les moments et les paramètres de forme

Les paramètres de forme sont des indicateurs sans unité qui permettent de caractériser la forme d'une distribution statistique sans avoir besoin de la représenter graphiquement. Ils offrent une description plus précise de la distribution en complément des mesures de tendance centrale et de dispersion.

On distingue généralement deux types de paramètres de forme, celle de l'asymétrie et celle de l'aplatissement.

Ces paramètres de forme sont calculés à partir des moments de la distribution, qui sont des mesures mathématiques utilisées pour les déterminer.

1. Les moments

Les moments sont principalement utilisés pour déterminer les formules des paramètres de forme. On définit le moment d'ordre k par rapport à une valeur quelconque X_0 comme suit :

$$M_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i (X_i - X_0)^k}{N} = \sum_{i=1}^{n} fi(X_i - X_0)^k$$

Avec k : ordre du moment, prenant les valeurs : $\{0,1,2,...,n\}$ et X_0 : origine du moment.

1.1. Moments non centrés (notés : m_k)

Lorsque la valeur X_0 est nulle, on définit les moments non centrés, sous la formule suivante :

$$m_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i^k}{N} = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i^k$$

On peut déterminer quelques moments non centrés en fonction de la valeur de k:

- Si k=0 $\Rightarrow m_0 = 1$.
- Si k=1 $\Rightarrow m_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i X_i}{N} = \overline{X}$: Moyenne arithmétique, moment du 1er ordre.

- Si k=2 $\Rightarrow m_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i X_i^2}{N}$: Carré de la moyenne quadratique, moment du 2ème ordre.

1.2. Moments centrés (notés : μ_k)

Lorsque la valeur X_0 est égale à la moyenne arithmétique ($X_0 = \overline{X}$), on définit les moments centrés. Son expression devient alors :

$$\mu_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i (X_i - \overline{X})^k}{N} = \sum_{i=1}^{n} fi(X_i - \overline{X})^k$$

On peut déterminer quelques moments centrés en fonction de la valeur de k:

- Si k=0 $\Rightarrow \mu_0 = 1$.
- Si k=1 $\Rightarrow \mu_1 = 0$.
- Si k=2 $\Rightarrow \mu_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i (X_i - \overline{X})^2}{N} = \sum_{i=1}^{n} fi(X_i - \overline{X})^2 = V(X)$: la variance.

- Propriétés :

Les moments centrés peuvent décrire en fonction des moments simples, comme suit :

- $\mu_2 = m_2 - m_1^2$
- $\mu_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3$
- $\mu_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4$
- …………. …… ……….. ………….. ……… …….

2. Les caractéristiques de forme

Il s'agit de savoir si telle distribution est symétrique et moins aplatie ou non.

2.1. La mesure de l'asymétrie

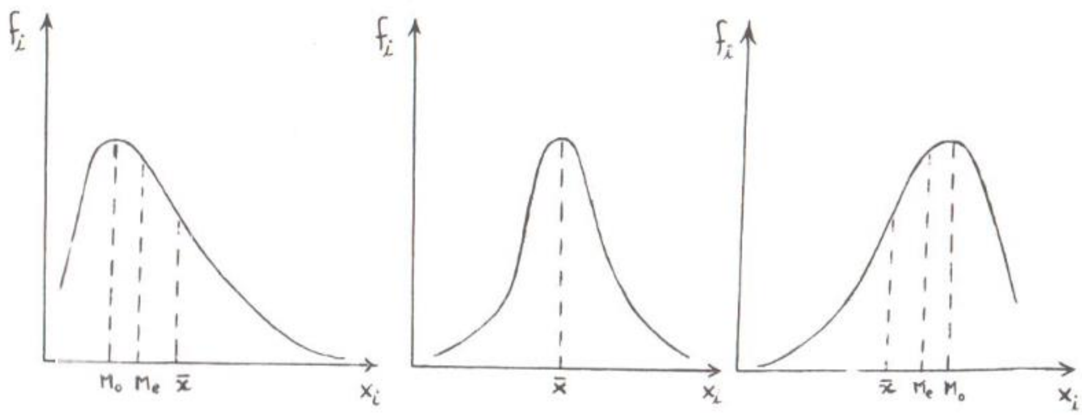
L'asymétrie permet de caractériser la manière dont les observations se répartissent autour d'une mesure de tendance centrale. Elle indique si la distribution est symétrique ou asymétrique.

Dans une distribution parfaitement symétrique, les trois mesures de tendance centrale (moyenne, médiane et mode) sont égales.

Moyenne = Médiane = Mode.

Ainsi Q1 et Q3, D1 et D9 et C1 et C99 sont équidistants par rapport à la médiane. C'est-à-dire : $\begin{cases} Q3 - Mé = Mé - Q1 \\ D9 - Mé = Mé - D1 \\ C99 - Mé = Mé - C1 \end{cases}$

En général, l'asymétrie des courbes de fréquences des distributions statistiques est étudiée par rapport aux courbes de fréquence suivantes :



Assymétrie : obliquité à gauche
$M_o < M_e < \bar{x}$

Symétrie
$M_o = M_e = \bar{x}$

Assymétrie : Obliquité à droite
$M_o > M_e > \bar{x}$

Les principaux coefficients utilisés pour mesurer l'asymétrie d'une distribution statistique sont les suivants :

1. Coefficient de Yule

Le coefficient de Yule est utilisé pour mesurer l'asymétrie d'une distribution en tenant compte de la position relative des quartiles par rapport à la médiane. Il est défini par la formule suivante :

$$C_y = \frac{Q_3 - M_é - (M_é - Q_1)}{Q_3 - Q_1} = \frac{Q_3 - 2M_é + Q_1}{Q_3 - Q_1}$$

Ce coefficient est toujours compris entre -1 et 1, lorsque :

$C_y = 0 \rightarrow$ La courbe est symétrique.

$C_y \succ 0 \rightarrow$ La courbe est étalée à droite.

$C_y \prec 0 \rightarrow$ La courbe est étalée à gauche.

2. Coefficients de Pearson : Pearson propose deux coefficients pour mesurer l'asymétrie :

-Le premier coefficient : consiste à mesurer l'asymétrie d'une distribution par comparaison entre les valeurs de la moyenne et du mode. Il se note : $\beta_1 = \frac{\overline{X} - M_0}{\sigma(X)}$

$\beta_1 = 0 \rightarrow$ La distribution est symétrique.

$\beta_1 \succ 0 \rightarrow$ La distribution est étalée à droite.

$\beta_1 \prec 0 \rightarrow$ La distribution est étalée à gauche.

-Le deuxième coefficient : Il est calculé à partir des moments centrés d'ordre 3 et d'ordre 2 de la série statistique. Il est définit par **:** $\beta_2 = \frac{\mu_3^2(X)}{\mu_2^3(X)}$

$\beta_2 = 0 \rightarrow$ La distribution est symétrique

$\beta_2 \neq 0 \rightarrow$ Dans ce cas il dépend la valeur de signe $\mu_3(X)$

- $\mu_3 \succ 0 \rightarrow$ la distribution est étalée à droite.
- $\mu_3 \prec 0 \rightarrow$ la distribution est étalée à gauche.

3. Coefficient de Fisher : il est définit par : $\gamma_1 = \frac{\mu_3(X)}{\sigma^3(X)}$

Nous constatons que le coefficient de Fisher n'est autre que la racine carrée du coefficient β_2 de Pearson.

Les conclusions sont les mêmes que précédemment : si $\gamma_1 = 0$, La distribution est symétrique ; si γ_1 est positif, la distribution est étalée à droite , si γ_1 est négatif, la distribution est étalée à gauche.

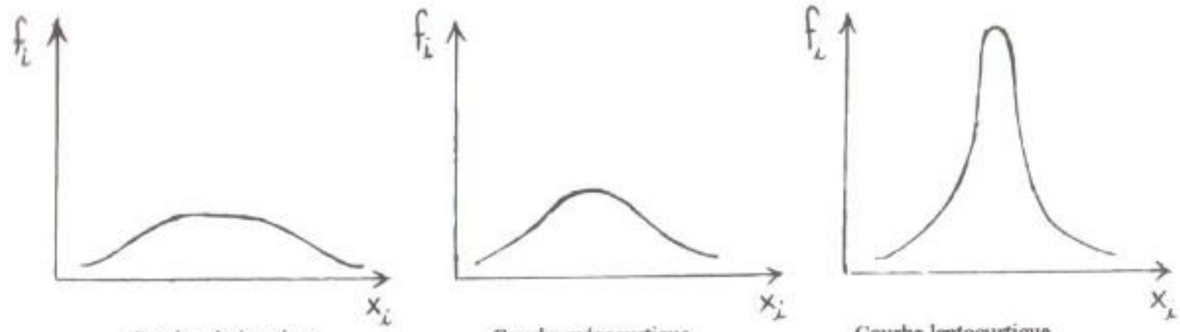
2.2. La mesure de l'aplatissement

L'aplatissement a pour objet de faire apparaitre si une faible variation de la variable entraine ou non une forte variation des fréquences relatives.

Une courbe de fréquences est considérée plus ou moins aplatie par rapport à la courbe des fréquences de la loi normale.

Ainsi, une distribution est dite aplatie si une forte variation de la variable entraine une faible variation de la fréquence relative (et inversement).

En général, les formes d'aplatissement de références sont les suivantes :



Courbe platicurtique — Courbe mésocurtique (normale ou enclôche) — Courbe leptocurtique

Les principaux coefficients utilisés pour mesurer le degré d'aplatissement sont les suivants :

1. Coefficient de Pearson

Il est de la forme : $\beta_3 = \frac{\mu_4(X)}{\mu_2^2(X)} = \frac{\mu_4(X)}{\sigma^4(X)}$

En général, nous savons toujours l'intégralité : $\mu_4 \succ \mu_2^2$

Le coefficient β_3 est toujours supérieur à 1, car $\mu_4 \succ \mu_2^2$.

Si $\beta_3 = 3$, la courbe de la distribution est normale.

Si $\beta_3 \succ 3$, la courbe de la distribution est leptocurtique (moins aplatie que la courbe normale).

Si $\beta_3 \prec 3$, la courbe de la distribution est platicurtique (plus aplatie que la courbe normale).

2. Coefficient de Fisher

Il est donné par la formule suivante : $\gamma_2 = \beta_3 - 3 = \frac{\mu_4(X)}{\sigma^4(X)} - 3$

Sens de l'aplatissement :

Si $\gamma_2 = 0$, la courbe de la distribution est normale.

Si $\gamma_2 \succ 0$, la courbe de la distribution est leptocurtique.

Si $\gamma_2 \prec 0$, la courbe de la distribution est platicurtique.

Exemple : Le revenu journalier des employés d'une entreprise est distribué selon le tableau suivant :

Revenu	[90 - 150[	[150 - 250[	[250 - 550[
Effectifs	5	3	2

1- Calculer le coefficient d'asymétrie de Pearson β_1 et interpréter le résultat.
2- Calculer le coefficient d'aplatissement de Pearson β_3 et interpréter le résultat.

Solution :

1-Le coefficient d'asymétrie de Pearson β_1 : il se note : $\beta_1 = \frac{\overline{X} - M_0}{\sigma(X)}$

Donc pour calculer ce coefficient, on doit d'abord calculer la moyenne arithmétique, le mode et l'écart-type.

La moyenne arithmétique :

X	n_i	c_i	$n_i \times c_i$
[90 ; 150 [	5	120	600
[150 ;250 [	3	200	600
[250; 550 [	2	400	800
Total	10	-	2000

D'où la moyenne arithmétique :

$$\overline{X} = \frac{\sum_i n_i \times c_i}{N} = \frac{2000}{10} = 200$$

Le mode : Dans ce cas les amplitudes (a_i) sont inégales, donc le mode se calcule à partir les valeurs des effectif corrigés (nic).

X	ni	ai	nic= ni/ai
[90 ; 150 [	5	60	0.08
[150 ;250 [	3	100	0.03
[250; 550 [	2	300	0.007
Total	10		-

La classe modale = [90 ; 150 [,

$$M_O = A_i + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} ai = 90 + \frac{0.08}{0.08 + 0.05} 60 = \mathbf{126.92}$$

L'écart-type

X	ni	ci²	ni.ci²
[90 ; 150 [	5	14400	72000
[150 ;250 [	3	40000	120000
[250; 550 [	2	160000	320000
Total	10		512000

$$V(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i c_i^2}{N} - \overline{X}^2 = \frac{512000}{10} - (200)^2 = 11200$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{11200} = 105.83.$$

Donc : $\beta_1 = \frac{\overline{X} - M_0}{\sigma(X)} = \frac{200 - 126.92}{105.83} = 0.69$

On remarque que $\beta_1 > 0$, donc la courbe des fréquences est oblique à gauche (ou étalée à droite).

2-Le coefficient d'aplatissement de Pearson β_3 : il est de la forme : $\beta_3 = \frac{\mu_4(X)}{\mu_2^2(X)} = \frac{\mu_4(X)}{\sigma^4(X)}$

Donc pour calculer ce coefficient, on doit d'abord calculer $\mu_4(x)$: $\mu_4 = \frac{1}{n} \sum n_i (c_i - \overline{X})^4$.

X	ni	$c_i - \bar{X}$	$\left(c_i - \bar{X}\right)^4$	ni $\left(c_i - \bar{X}\right)^4$	
[90 ; 150 [[150 ;250 [[250; 550 [	5 3 2	-80 0 200	40960000 0 1600000000	204800000 0 3200000000	$\mu_4 = \frac{1}{n}\sum n_i\left(c_i - \bar{X}\right)^4$ $= \frac{1}{10} 3404800000 = 340480000$.
Total	10			3404800000	

Donc : $\beta_3 = \frac{\mu_4(X)}{\mu_2^2(X)} = \frac{\mu_4(X)}{\sigma^4(X)} = \frac{340480000}{(105.83)^4} = 2.71$

On remarque que $\beta_3 < 3$, donc la courbe des fréquences est platicurtique.

Exemple : soit la série suivante. Calculez les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement de Pearson.

xi	0	1	2	3
fi	0,216	0,432	0,288	0,064

Solution :

Le tableau s'écrit de la manière suivante :

xi	fi	fi.xi	$X_i - \bar{X}$	$f_i(X_i - \bar{X})^2$	$f_i(X_i - \bar{X})^4$
0	0,216	0	-1,2	0,311	0,448
1	0,432	0,432	-0,2	0,017	0,00069
2	0,288	0,576	0,8	0,184	0,11796
3	0,064	0,192	1,8	0,207	0,6718
Total	1	1,2	-	0,72	1,238

1- Le coefficient d'asymétrie de Pearson.

On utilise le premier coefficient de Pearson : $\beta_1 = \frac{\bar{X} - M_0}{\sigma(X)}$

On calcule d'abord, $\bar{X}$, M_O et $\sigma(X)$:

La moyenne arithmétique : $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i \cdot x_i}{N} = \sum_{i=1}^{n} fi.xi = 1,2$.

Le mode : M_O= 1.

L'écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{f_i(X_i - \bar{X})^2} = \sqrt{0,72}$.

$\Rightarrow \quad \beta_1 = \dfrac{1{,}2-1}{\sqrt{0{,}72}} = 0{;}23 \succ 0$, donc la distribution est étalée à droit.

2- Le coefficient d'aplatissement de Pearson : $\beta_3 = \dfrac{\mu_4(X)}{\mu_2^2(X)} = \dfrac{\mu_4(X)}{\sigma^4(X)}$

$\Rightarrow \beta_3 = \dfrac{f_i(X_i - \overline{X})^4}{\left(f_i(X_i - \overline{X})^2\right)^2} = \dfrac{1{,}238}{\left(\sqrt{0{,}72}\right)^4} = 2{,}38 \prec 3$, donc la courbe des fréquences est platicurtique.

Série des exercices

Exercice 1 : Soit la distribution suivante :

Classes	[15 - 25[	[25 - 35[	[35 - 45[	[45- 55[	[55 - 65[	[65 - 75[	[75 - 85[
Effectifs	5	15	32	40	66	25	17

1- Calculer ses moments centrés d'ordre 2,3 et 4.
2- Calculer le coefficient d'asymétrie de Ficher.
3- Calculer le coefficient d'aplatissement de Pearson.

Exercice 2 : Soit la distribution de lots fabriqués par une usine selon le nombre de pièces défectueuses :

Nombre de pièces défectueuses	5	6	7	8	9	10
Nombre de lots	5	7	8	11	16	13

1- Calculer la valeur des indicateurs d'asymétrie et commenter les résultats.
2- Calculer la valeur des indicateurs d'aplatissement et commenter les résultats.