Université Abderrahmane MIRA Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
1ère année ST-LMD

Juin 2025
10H30-12H00

Corrigé de l'examen de rattrapage MATHS 2

Exercice 1 : (7 pts)

I. Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{1}{x \ln x}\, dx \qquad\qquad \int x e^{x}\, dx$$

1.$\int \frac{1}{x \ln x}\, dx$ (par changement de variable)

Posons $t = lnx$, alors $dt = 1/xdx$, on obtient :

$$\int \frac{1}{x \ln x} = \int \frac{1}{t} dt = ln|t| + C = ln|lnx| + C, C \in \mathbb{R}$$

2.$\int x \arctan x\, dx$

On pose :

$$u = \arctan x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$dv = x\, dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{x^2}{2}$$

En appliquant la formule d'intégration par parties :

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

On obtient :

$$\int x \arctan x\, dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

Simplifions l'intégrale :

$$\int \frac{x^2}{2(1+x^2)}\, dx = \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{1}{2}\,(x - \arctan x)$$

Donc, le résultat final est :

$$\int x \arctan x\, dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2}(x - \arctan x) + C$$

Ce qui donne, après simplification :

$$\boxed{\int x \arctan x\, dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctan x + C}$$

II. Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x}e^x$$

1. Calculer $f'(x)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^x + \frac{1}{x}e^x = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)e^x$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x-1}{x^2}e^x$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante, pour $x > 0$:

$$xy' - y = (x-1)e^x \qquad (E_1)$$

(E_1) est une équation linéaire du 1^er^ ordre non homogène.

Équation homogène associée :

$$xy' - y = 0 \qquad (E_H)$$

La solution générale de (E_H) est donnée par :

$$y_H(x) = Ke^{\int \frac{1}{x}dx} = Ke^{\ln x} = Kx, \quad K \in \mathbb{R}$$

Variation de la constante :

Posons $y(x) = K(x) \cdot x$, alors :

$$y'(x) = K(x) + xK'(x)$$

On remplace dans (E_1) :

$$xy'(x) - y = x\left(K(x) + xK'(x)\right) - xK(x) = x^2K'(x)$$

On a donc :

$$x^2K'(x) = (x-1)e^x \quad \Rightarrow \quad K'(x) = \frac{x-1}{x^2}e^x$$

D'après la question 1), une primitive est :

$$K(x) = \frac{1}{x}e^x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Finalement, la solution générale de (E_1) est :

$$y(x) = x \cdot K(x) = x\left(\frac{1}{x}e^x + C\right) = e^x + Cx$$

Exercice 2 : (5 pts)
Soit l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' + 2y' + y = x^2 \qquad\qquad (E_2)$$

1) Résolution de l'équation homogène associée à (E) :

$$y\rfloor + 2y' + y = 0 \qquad E_H$$

L'équation caractéristique :

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

r = -1 est une racine double de l'équation caractéristique, donc la solution homogène est :

$$y_H(x) = (C_1x + C_2)e^{-x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

2) Résolution d'une solution particulière :

On cherche une solution de la forme :

$$y_p(x) = ax^2 + bx + c$$

Alors :

$$y_p'(x) = 2ax + b, \qquad y_p''(x) = 2a$$

On remplace dans (E_2) :

$$2a + 2(2ax + b) + (ax^2 + bx + c) = x^2$$

On regroupe :

$$ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b + c = x^2$$

Par identification :

$$a = 1$$

$$4a + b = 0b = -4$$

$$2a + 2b + c = 0c = 6$$

Donc :

$$y_p(x) = x^2 - 4x + 6$$

est solution de (E_2).
3. En déduire la solution générale de (E_2), puis déterminer la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = x^2 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

La solution générale de (E_2) :

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x)$$

$$y(x) = (C_1 x + C_2)e^x + x^2 - 4x + 6, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

\# **Problème de Cauchy :** $y'' + 2y' + y = x^2$, avec conditions initiales :

$$y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y'(0) = 0$$

D'après la question précédente :

$$y(x) = (C_1 x + C_2)e^x + x^2 - 4x + 6$$

$$y(0) = (C_1 \cdot 0 + C_2) \cdot e^0 + 0 - 0 + 6 = C_2 + 6 \Rightarrow C_2 = -6$$

$$y'(x) = C_1 e^x + (C_1 x + C_2)e^x + 2x - 4$$

$$y'(0) = C_1 + C_2 - 4 = 0 \Rightarrow C_1 - 6 - 4 = 0 \Rightarrow C_1 = 10$$

Par suite, la solution du problème de Cauchy est :

$$y(x) = (10x - 6)e^x + x^2 - 4x + 6$$

Exercice 3 : (8 pts)
On considère le système linéaire

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} x - 3y + 4z = 8 \\ x - 2y + 4z = 7 \\ x - 3y + 5z = 9 \end{cases}$$

1. Écrire le système linéaire $(\mathcal{S})$ sous forme matricielle $A \cdot X = b$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

2. Résoudre le système par une méthode de votre choix.
Utiliser l'inverse de la matrice A on a

$$\det(A) = 1 \cdot ((-2) \cdot 5 - 4 \cdot (-3)) - (-3) \cdot (1 \cdot 5 - 4 \cdot 1) + 4 \cdot (1 \cdot (-3) - (-2) \cdot 1)$$

$$= 1 \cdot (-10 + 12) + 3 \cdot (5 - 4) + 4 \cdot (-3 + 2) = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = 2 + 3 - 4 = \boxed{1}$$

et

$$\text{Com A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{Com A}^T = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donc

$$X = A^{-1}.b$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ou bien avec Cramer :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1, \quad y = -1, \quad z = 1$$

Ou bien avec Gauss :

3. On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} x - 3y + 4z - 7 & y \\ 0 & x - 3y + 5z - 8 \end{pmatrix}$$

Déterminer les réels x, y, z tels que :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1}M = MM^{-1} = Id_2$$

On obtient :

$$\begin{cases} x - 3y + 4z - 7 = 1 \\ x - 3y + 5z - 8 = 1 \\ x - 2y + 4z - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y + 4z = 8 \\ x - 3y + 5z = 9 \\ x - 2y + 4z = 7 \end{cases}$$

D'après la question précédente, on obtient :

$$x = 1, \quad y = -1, \quad z = 1$$

Bon courage