

Chapitre 2

Avant le traitement d'une série chronologique, il convient de s'assurer de la stationnarité des variables retenues car la stationnarité constitue une condition nécessaire pour éviter les régressions fallacieuses, de telles régressions se réalisent lorsque les variables ne sont pas stationnaires, l'estimation des coefficients par la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO) ne converge pas vers les vrais coefficients et les tests usuels des t de Student et f Fisher ne sont plus valides.

De manière formalisée, le processus stochastique Y_t est stationnaire si¹ :

- ✓ $E(y_t) = E(y_{t+m}) = \mu \forall t \text{ et } \forall m$, la moyenne est constante et indépendante du temps ;
- ✓ $\text{var}(y_t) < \infty \forall t$, la variance est finie et indépendante du temps ;
- ✓ $\text{cov}(y_t, y_{t+k}) = E[(y_t - \mu)(y_{t+k} - \mu)] = \gamma_k$, la covariance est indépendante du temps

Le processus non stationnaire

Dans le cas d'une série aléatoire, dans le temps, sa variance et son espérance modifiée, la série est dite alors non stationnaire. Pour analyser la non stationnarité, deux types de processus à distinguer :

➤ **Le processus TS (Trend Stationary)** s'écrit comme suite $X_t = f_t + \varepsilon_t$ où f_t est une fonction polynômiale de temps et ε_t est un bruit blanc. Le processus TS, le plus simple, est représenté par la fonction polynômiale de degré 1 c'est-à-dire $X_t = \alpha + \beta_t + \varepsilon_t$.

Le processus TS représente une non-stationnarité de type déterministe car $E(X_t) = \alpha + \beta_t$ dépend du temps. Ce dernier peut être stationnariser en retranchant à X_t la valeur estimée $\hat{\alpha} + \hat{\beta}_t$ par la méthode des MCO, la série stationnaire est $X_{ts} = X_t - \hat{X}_t$.²

➤ **Le processus DS (Differency Stationary)** : provient non pas de la présence d'une composante déterministe tendancielle, mais d'une source stochastique car la tendance ainsi que la variance sont variables dans le temps. En effet, la meilleure méthode pour stationnariser un tel processus est l'utilisation de la différenciation, c'est à dire qu'un processus aléatoire est stationnaire en différence (DS) ou encore intégré d'ordre « d » si l'on peut l'écrire sous la forme : $(1 - D)^d X_t = \beta + \varepsilon_t$, Où ε_t est un processus stationnaire, β une constante réelle encore appelée dérive, D l'opérateur décalage et d l'ordre d'intégration³.

Test de stationnarité

Il existe plusieurs tests de racine unitaire tels que les tests de Dickey-Fuller simple et Dickey-Fuller Augmenté, test de Phillips et Perron, test de Kwiatkowski et Phillips... qui

¹ BOURBONNAIS Régis, « économétrie : cours et exercices corrigés », 9^{ème} édition dunod, Paris, 2015, p239.

² Régis BOURBONNAIS, « Econométrie, manuel et exercices corrigés », Edition Dunod, Paris, 2005, p229.

³ Idem, p229.

permettent non seulement de détecter l'existence d'une non-stationnarité mais aussi de déterminer de quel type de non-stationnarité (processus TS ou DS). C'est donc la bonne méthode pour stationnariser la série. Nous n'étudierons ici que les tests de Dickey-Fuller et le test de Phillips et Perron.

Test Dickey-Fuller simple (1979)

Les tests de Dickey et Fuller sont construits à partir de trois modèles de base :

$X_t = \rho_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$ [1] qui est un modèle autorégressif d'ordre 1,

$X_t = \rho_1 X_{t-1} + c + \varepsilon_t$ [2] qui est un modèle AR(1) avec constante ;

$X_t = \rho_1 X_{t-1} + \beta_t + c + \varepsilon_t$ [3] qui est un modèle AR(1) avec tendance.

L'hypothèse nulle du test est la présence de racine unitaire, soit la non-stationnarité de type stochastique. Le test consiste à tester :

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 1 \\ H_1 : \rho < 1 \end{cases}$$

Le principe des tests est simple : si dans ces trois modèles $|\rho_1| = 1$, l'hypothèse nulle H_0 est retenue et la chronique X_t est donc non stationnaire quel que soit le modèle retenu. Si $|\rho_1| < 1$ la série X_t est stationnaire⁴.

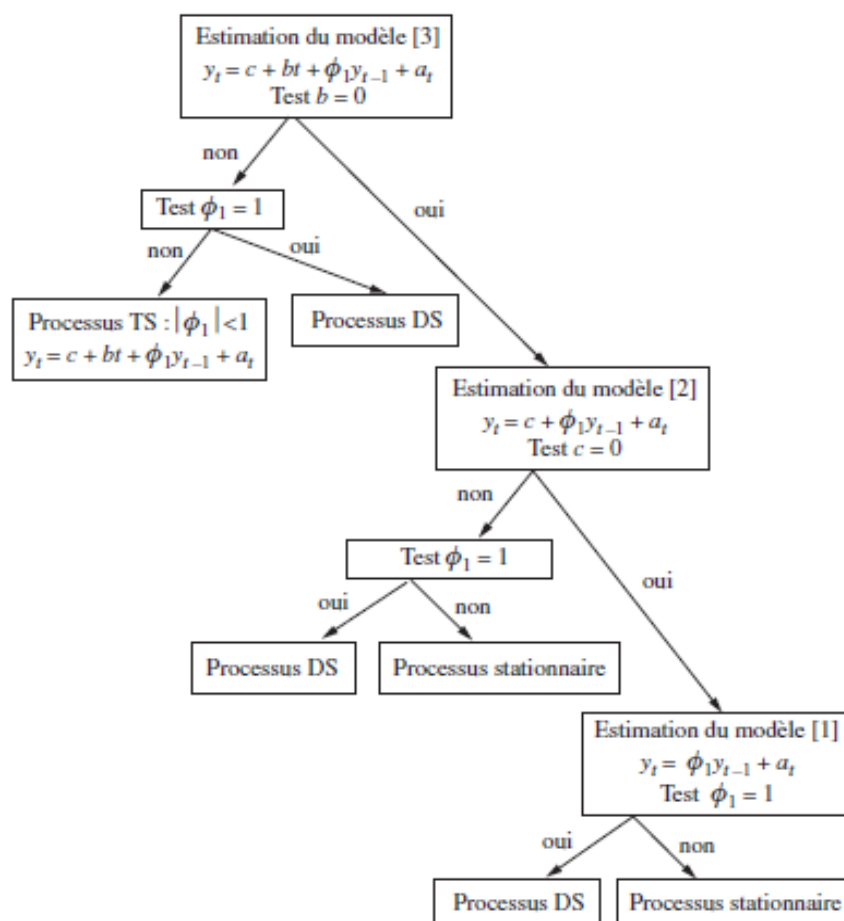


Schéma 1 – Stratégie simplifiée des tests de racine unitaire

⁴ Cem ERTUR, « Méthodologies de test de la racine unitaire », LATEC, Université de Bourgogne, 1998, pp6-8.

Tout d'abord, on commence à étudier le modèle général [3]. On regarde si β est significativement différent de zéro ou non. Si β est significativement égal à zéro on passe à l'étude de modèle [2] et on cherche à savoir si C est significativement différent de zéro ou pas. Si C est significativement non différent de zéro, on étudie le modèle [1]. Enfin on applique le test de Dickey-Fuller pour savoir si la série est stationnaire ou non.

On estime par la méthode des MCO, le paramètre ρ noté $\hat{\rho}$ pour les trois modèles. L'estimation des coefficients et des écart-types des modèles par cette méthode fournit $t_{\hat{\rho}_t}$ (statistique ADF) qui est calculée comme suite $t_{\hat{\rho}_t} = \frac{\hat{\rho}}{\delta \hat{\rho}}$

Les règles de décision sont les suivantes :

- Si $t_{\hat{\rho}_t} < t_{ADF}$ où t_{ADF} désigne la valeur critique donnée par la table de DF ; donc on accepte l'hypothèse H_1 c'est-à-dire celle de l'absence de racine unitaire. La série X_t dans ce cas est non-stationnaire ;
- Si $t_{\hat{\rho}_t} \geq t_{ADF}$, on accepte l'hypothèse H_0 , la série est stationnaire.

Test Dickey-Fuller augmenté(1981)

Dickey-Fuller étendent ensuite cette procédure de test à des processus purement autorégressifs d'ordre p connu. Il s'agit alors des tests ADF pour « Augmented Dickey-Fuller ». Cette procédure de test est fondée sur l'estimation par les MCO sous l'hypothèse alternative de trois modèles autorégressifs d'ordre p obtenus en soustrayant X_{t-1} aux deux membres des modèles [4], [5] et [6] et en ajoutant $p-1$ retards en différences premières ⁵:

$$\text{Modèle [4]} \Delta X_t = \rho X_{t-1} - \sum_{j=2}^p \Phi_j \Delta X_{t-j+1} + \varepsilon_t$$

$$\text{Modèle [5]} \Delta X_t = \rho X_{t-1} - \sum_{j=2}^p \Phi_j \Delta X_{t-j+1} + c + \varepsilon_t$$

$$\text{Modèle [6]} \Delta X_t = \rho X_{t-1} - \sum_{j=2}^p \Phi_j \Delta X_{t-j+1} + c + \beta_t \varepsilon_t$$

Avec $\varepsilon_t \rightarrow i. i. d.$

Le test se déroule de la même manière que le test DF simple, sauf que les tables statistiques se diffèrent. La valeur de p peut être déterminée selon les critères de Akaike⁶ ou Schwarz⁷ ou encore, en partant d'une valeur suffisamment importante de p . On estime un modèle à $p-1$ retards, puis $p-2$ retards, jusqu'à ce que le coefficient du $p^{ième}$ retards soit significatif.

⁵ Idem, p8.

⁶ La statistique de Akaike est donnée par $Aic = \log \hat{\sigma}_e^2 + \frac{2(p+q)}{T}$.

⁷ La statistique de Schwarz est la suivante $Sc = \log \hat{\sigma}_e^2 + (p+q) \frac{\log T}{T}$.

7. TABLES DE DICKEY-FULLER¹
Modèle [1] sans tendance et sans terme constant
Modèle [2] sans tendance et avec terme constant
Modèle [3] avec tendance et avec terme constant

Tables de la distribution du t_{ϕ_1}

Nombre observations	Probabilités								
n	0,01	0,025	0,05	0,10	0,90	0,95	0,975	0,99	
25	-2,66	-2,26	-1,95	-1,60	0,92	1,33	1,70	2,16	Modèle [1]
50	-2,62	-2,25	-1,95	-1,61	0,91	1,31	1,66	2,08	
100	-2,60	-2,4	-1,95	-1,61	0,91	1,29	1,64	2,03	
250	-2,58	-2,23	-1,95	-1,62	0,89	1,29	1,63	2,01	
500	-2,58	-2,23	-1,95	-1,62	0,89	1,28	1,62	2,00	
∞	-2,58	-2,23	-1,95	-1,62	0,89	1,28	1,62	2,00	
25	-3,75	-3,33	-3,00	-2,63	-0,37	0,00	0,34	0,72	Modèle [2]
50	-3,58	-3,22	-2,93	-2,60	-0,40	-0,03	0,29	0,66	
100	-3,51	-3,17	-2,89	-2,58	-0,42	-0,05	0,26	0,63	
250	-3,46	-3,14	-2,88	-2,57	-0,42	-0,06	0,24	0,62	
500	-3,44	-3,13	-2,87	-2,57	-0,43	-0,07	0,24	0,61	
∞	-3,43	-3,12	-2,86	-2,57	-0,44	-0,07	0,23	0,60	
25	-4,38	-3,95	-3,60	-3,24	-1,14	-0,80	-0,50	-0,15	Modèle [3]
50	-4,15	-3,80	-3,50	-3,18	-1,19	-0,87	-0,58	-0,24	
100	-4,04	-3,73	-3,45	-3,15	-1,22	-0,90	-0,62	-0,28	
250	-3,99	-3,69	-3,43	-3,13	-1,23	-0,92	-0,64	-0,31	
500	-3,98	-3,68	-3,42	-3,13	-1,24	-0,93	-0,65	-0,32	
∞	-3,96	-3,66	-3,41	-3,12	-1,25	-0,94	-0,66	-0,33	

Tables de la distribution des t_c et t_b (test bilatéral)

	Modèle [2]			Modèle [3]					
	Constante c			Constante c			Tendance b		
n	2 %	5 %	10 %	2 %	5 %	10 %	2 %	5 %	10 %
25	3,41	2,97	2,61	4,05	3,59	3,20	3,74	3,25	2,85
50	3,28	2,89	2,56	3,87	3,47	3,14	3,60	3,18	2,81
100	3,22	2,86	2,54	3,78	3,42	3,11	3,53	3,14	2,79
250	3,19	2,84	2,53	3,74	3,39	3,09	3,49	3,12	2,79
500	3,18	2,83	2,52	3,72	3,38	3,08	3,48	3,11	2,78
∞	3,18	2,83	2,52	3,71	3,38	3,08	3,46	3,11	2,78

Source : BOURBONNAIS Régis, 9^e édition, 2015, *Éléments d'analyse des séries temporelles*, P374