INTRODUCTION A LA PROGRAMMATION LINEAIRE

1. Recherche opérationnelle ou science de la gestion

La modélisation et la résolution des problèmes de gestion à l'aide des méthodes quantitatives et statistiques, appuyées d'un support informatique, sont utilisées dans le milieu industriel, dans le domaine hospitalier, à différents paliers du gouvernement, dans les institutions bancaires et organismes financiers, dans les sociétés d'assurance, etc. Les problèmes sont nombreux et variés et font souvent appel à diverses techniques qui relèvent d'un domaine qui a pris son essor au cours de la seconde guère mondiale pour résoudre divers problèmes de nature militaire et qui a été identifié alors « recherche opérationnelle ». Ce type d'activité scientifique était assuré par des groupes multidisciplinaires de mathématiciens et de scientifiques qui étaient confrontés à l'analyse d'opérations militaires.

Plusieurs principes et techniques ont par la suite été adaptés à un environnement industriel pour analyser et résoudre des problèmes de gestion de plus en plus complexes. Au début des années cinquante, la venue des ordinateurs a permis une progression rapide de diverses techniques d'optimisation, permettant ainsi l'analyse des problèmes de plus grande taille avec une grande rapidité. Ce secteur d'activité a rapidement gagné du terrain vers les années soixante pour être intégré dans certains programmes d'ingénierie et de gestion. C'est pour cette raison qu'on retrouve également l'appellation « science de la gestion » pour identifier ce secteur d'activité qui devient toutefois plus axé sur l'utilisation de modèles décisionnels comme outils d'aide à la décision.

- Les modèles en science de la gestion

Un modèle est un moyen utilisé pour représenter et comprendre la réalité ; il est utilisé pour représenter les propriétés fondamentales d'un certain phénomène. Un modèle permet donc de simuler de façon aussi fidèle que possible le comportement des composants ou des éléments du phénomène étudié.

Les modèles de recherche opérationnelle (ou science de la gestion) sont classés selon deux grandes catégories[1] : modèles déterministes et modèles stochastiques ou probabilistes. Certains modèles sont toutefois traités de façon plus appropriée comme modèles hybrides, modèles regroupant des éléments des deux catégories (déterministes et probabilistes).

Notons cependant que ces modèles sont nombreux et variés et que nous ne traitons ici que certaines techniques d'optimisation linéaire, en particulier celles associées à la programmation linéaire.

- La programmation linéaire

Plusieurs décisions au sein d'une entreprise sont parfois liées à la façon de rencontrer les objectifs à atteindre et qui sont soumis à certaines contraintes ou restrictions. Les restrictions prennent la forme habituellement de ressources limitées en matières premières, en capacité de production, en main d'œuvre, en capitaux, capacité de stockage, capacité d'écoulement des produits … alors que les objectifs sont associés à maximiser la marge bénéficière ou profit ou à minimiser les coûts ou dépenses. Dans ces cas, le recours à un outil précieux d'aide à la décision est nécessaire à savoir la programmation linéaire qui est un outil important de la science de gestion.

Cependant, la programmation linéaire peut se définir comme un outil mathématique qui permet d'analyser divers types de situations dans lesquelles nous retrouvons une fonction linéaire d'un certains nombre de variables, appelée fonction objectif (on utilise également dans la littérature les termes de fonction économique) que l'on désire optimiser, c'est-à-dire maximiser ou minimiser.

Ces variables appelées variables de décision (dont on veut déterminer les valeurs optimales) sont soumises à des restrictions et contraintes imposées par les ressources limitées de la situation que l'on veut analyser.

Les restrictions ou contraintes qui sont imposées prennent la forme d'équations ou d'inéquations linéaires dans la formulation mathématique d'un modèle de programmation linéaire.

Dans le domaine des sciences de la gestion, on pourrait dire que la programmation linéaire est un outil scientifique qui permet d'obtenir la répartition optimale des ressources de l'entreprise (main d'œuvre, matières premières, capitaux, espace, etc.) pour atteindre un objectif spécifique d'optimisation comme la maximisation des bénéfices ou la minimisation des coûts.

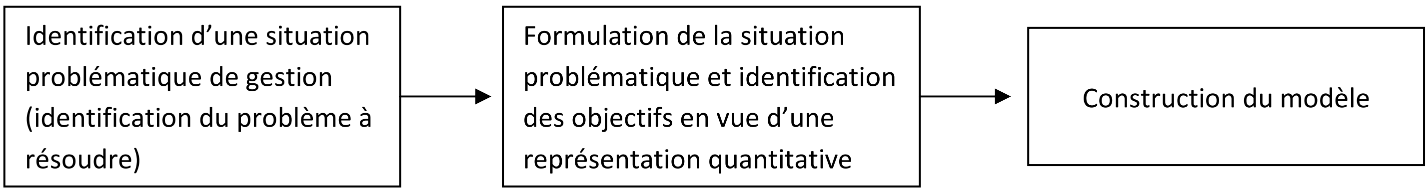
---

[1] Gérald Baillargeon, Outils de la recherche opérationnelle : Programmation linéaire appliquée- outils d'optimisation et d'aide à la décision, les éditions SMG, Quebec, 1996, p. 5

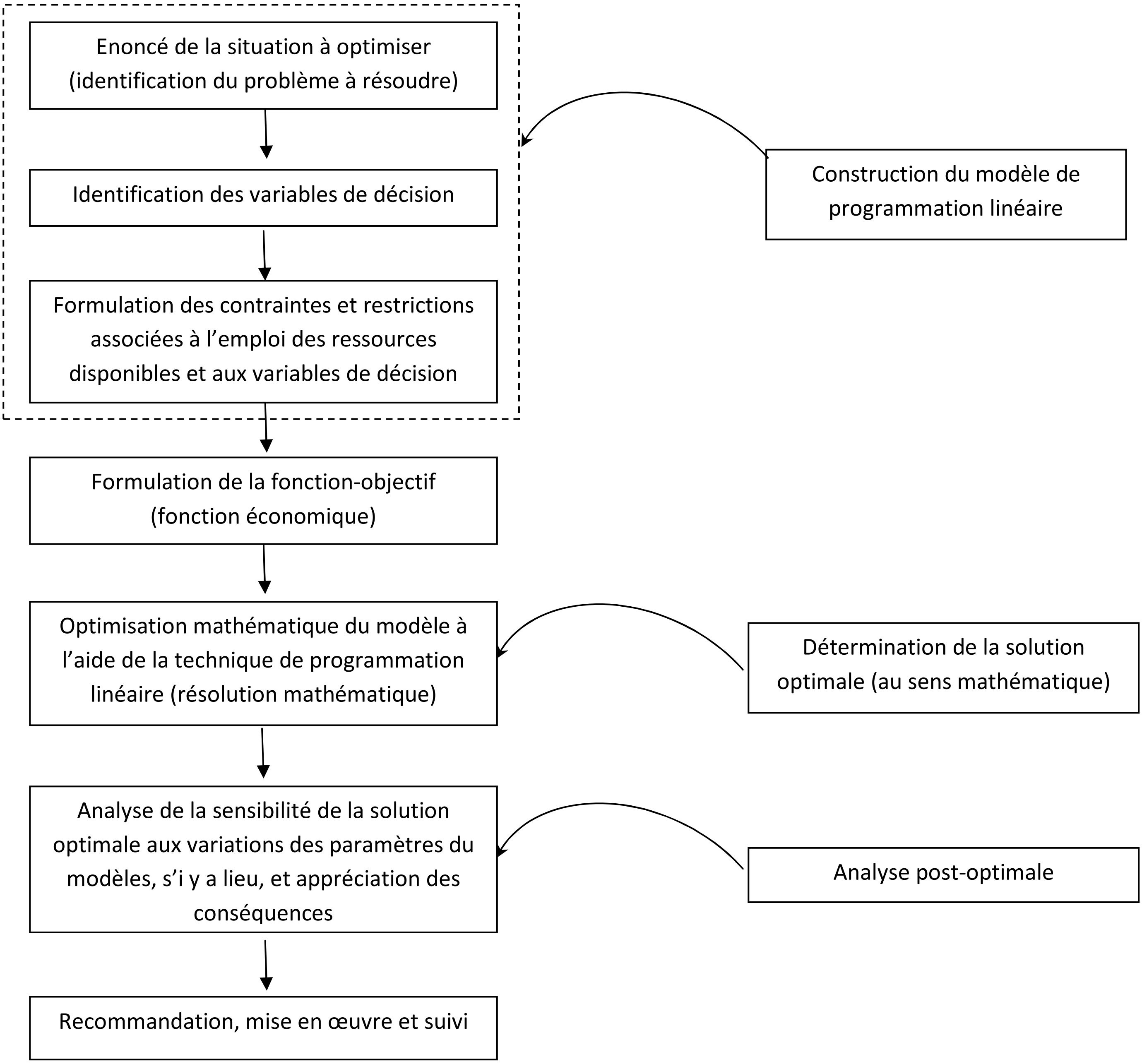
a. Méthodologie de la modélisation en programmation linéaire

Nous voulons présenter une démarche qui permettra, dans la plupart des cas, de structurer sans trop de difficultés un modèle de programmation linéaire. Bien que la démarche semble simple, la modélisation de la situation décisionnelle reste délicate du fait de la complexité de la situation à modéliser ou du problème à résoudre. Heureusement, comme nous allons le constater ultérieurement, la résolution par les techniques appropriées sera l'étape la plus facile, une fois que le modèle est bien structuré (construit).

Le schéma de la figure suivante résume les étapes à suivre dans le processus de modélisation :



Dans le cas où la situation que l'on veut analyser se prête à l'utilisation de la programmation linéaire comme outil d'aide à la décision, la démarche à suivre dans l'application de cette technique d'optimisation (maximisation ou minimisation) est résumée à la figure de la page suivante :



Comme l'indique le schéma précédent, la structure d'un modèle de programmation linéaire comporte trois éléments importants :

- Les variables de décision
- Les contraintes linéaires
- La fonction économique ou fonction objectif.

Explicitons ces différents éléments :

b. Eléments d'un modèle de programmation linéaire :

Lorsque l'on se trouve en face d'un problème qui nous paraît susceptible d'être formulé comme un modèle linéaire, il est recommandé de procéder à une analyse dont les étapes sont les suivantes :

- **Identification des variables de décision.** La première étape dans le processus de modélisation (formulation d'un programme linéaire) est d'identifier correctement toutes les variables de décision (variables d'activité ou inconnues du problème à résoudre). Une définition claire et précise des variables de décision peut faciliter beaucoup la formulation du modèle linéaire. Pour ce faire, il est recommandé de tenter de répondre à deux questions : quelles sont les activités qui sont associées au problème à résoudre ? Quelles sont les inconnues de ce problème ? La réponse à ces deux questions devrait conduire à la bonne définition de ces variables de décision. La précision de ces variables requiert cependant que chaque niveau d'activité doit être représenté une variable de décision unique.

- **Formulation de toutes les contraintes.** Dans la problématique de la situation, il faut être en mesure d'identifier tout genre de restriction (main d'œuvre, espace, matières premières, budget, capacité de production, de vente et de stockage, etc.) qui peut limiter les valeurs que peuvent prendre les variables de décision ainsi identifiées. A chaque restriction, limitation ou exigence correspond habituellement une contrainte qui prend la forme d'une équation ou d'une inéquation linéaire. L'ensemble des contraintes ainsi formulées constitue le domaine (la région) des solutions possibles ou de solutions réalisables (valeurs possibles des variables de décision) au modèle de programmation linéaire.

- **Formulation de la fonction objectif ou fonction économique.** A chaque variable de décision qui a été identifiée correspond un coefficient économique indiquant la contribution unitaire de la variable (activité) correspondante à l'objectif poursuivi. Par la suite, on pourra en déduire la fonction-objectif que l'on veut optimiser (soit maximiser, soit minimiser). Cet objectif correspond généralement à une mesure de performance à atteindre).

c. L'hypothèse de linéarité

Dans un modèle linéaire, la fonction économique (fonction-objectif) est exprimée sous forme de relation linéaire ; de même, les contraintes constituent un système d'équations ou d'inéquations linéaires. Nous connaissons la signification mathématique de l'adjectif linéaire (propriété d'une expression algébrique du premier degré) ; quelles ont les implications de la linéarité dans un contexte technique et économique ?

La linéarité des contraintes et de la fonction économique dans les problèmes de programmation linéaire a pour conséquence les trois axiomes suivants[2] :

- L'axiome de proportionnalité : pour chaque activité (variable de décision), les quantités de ressources utilisées et les profits (ou coûts) nets sont directement proportionnels au niveau de cette activité. Cet axiome implique, en particulier que tous les coefficients de la fonction économique « C_j » sont des constantes. Chaque unité d'activité a donc le même effet sur la fonction économique (à titre d'exemple, con considère que chaque unité fabriquée du produit x rapporte le même profit ou génère le même coût). Dans la pratique, ce n'est pas nécessairement le cas ; on a souvent des profits décroissants (lorsqu'une unité d'activité rapporte moins que l'unité précédente), soit des économies d'échelle (lorsqu'une unité d'activité rapporte plus que l'unité précédente). Dans le programme linéaire, on considère donc que les rendements d'échelle sont constants. Notons en particulier que l'axiome de proportionnalité implique qu'il ne peut pas y avoir de coût de mise en route de la production (coûts fixes) dans la fonction économique d'un programme linéaire.

  Par ailleurs, il se peut qu'il existe dans certains problèmes des non-linéarités mineures. Si l'analyste considère qu'elles peuvent être omises (négligées) sans toutefois modifier sensiblement le modèle, le problème peut être alors traité comme un programme linéaire.
  Les mêmes commentaires sont également valables pour les coefficients technologiques « a_{ij} » (coefficients des variables de décision dans les différentes contraintes exprimées sous forme d'équations ou d'inéquations linéaires).

- L'axiome d'additivité : quels que soient les niveaux d'activité, l'utilisation totale de chaque ressource et la valeur globale de la fonction économique sont égales respectivement à la somme des quantités correspondantes résultant de chaque activité prise séparément (le tout est la somme des parties). Autrement dit, l'axiome d'additivité garantie que les effets d'une activité donnée sont indépendants des niveaux des autres activités (les activités sont indépendantes les unes des autres même si elles sont concurrentielles).

- L'axiome de divisibilité : les variables de décision peuvent prendre des valeurs non négatives quelconques, y compris des valeurs fractionnaires.

[2] Michel Nedzela, Introduction à la science de gestion : méthodes déterministes en recherche opérationnelle, Presses université du Quebec, 1984, p. 66.

La solution optimale que l'on obtient avec les techniques de programmation linéaires comportera, dans beaucoup de cas, des valeurs fractionnaires pour les variables. Pour certains problèmes, ces valeurs fractionnaires n'ont aucune signification ; on ne peut pas, par exemple, fabriquer 3,2 ordinateurs. Par conséquent, si une ou plusieurs variables de décision requiert une valeur entière, on devra alors le préciser dans le modèle et utiliser les techniques de programmation en nombres entiers pour déterminer l'optimum et non pas la technique de programmation linéaire tout court.

Notons également que le modèle de programmation linéaire est caractérisé par l'hypothèse de certitude de ses paramètres. Cette hypothèse stipule en effet que tous les paramètres du modèle (les coefficients c_j des variables de décision dans la fonction économique, les éléments du second membre des contraintes b_i et les coefficients a_{ij} des variables de décision dans les différentes contraintes fonctionnelles) sont connus avec certitude. C'est pourquoi la technique de programmation linéaire est qualifiée de méthode déterministe. Habituellement ces paramètres sont obtenus à partir de données provenant du département de fabrication, du service marketing et du service de comptabilité. S'il y a incertitude quant aux valeurs des paramètres du modèle considéré, il est nécessaire de procéder à l'analyse de sensibilité de la solution optimale obtenue aux variations de ces paramètres. Cette analyse de sensibilité revêt un aspect important de la technique de programmation linéaire.

2. Formulation mathématique du modèle de programmation linéaire

Avant d'aborder divers contextes d'application, précisions d'abord à quoi correspond la structure mathématique du modèle de programmation linéaire.

- Structure d'un modèle de programmation linéaire

Le modèle mathématique de programmation linéaire est généralement présenté en termes suivants :

Maximiser (ou minimiser selon l'objectif poursuivi) la fonction-objectif :

Min (Max) $Z = c_1X_1+c_2X_2+ \dots +c_nX_n = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

Soumise aux contraintes

$a_{11}X_1+a_{12}X_2+a_{13}X_3+ \dots +a_{1n}X_n \ (\leq,=,\geq)\ b_1$

$a_{21}X_1+a_{22}X_2+a_{23}X_3+ \dots +a_{2n}X_n \ (\leq,=,\geq)\ b_2$

:

$a_{i1}X_1+a_{i2}X_2+a_{i3}X_3+ \dots + a_{in}X_n \ (\leq,=,\geq)\ b_i$ $\qquad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j \ (\leq=\geq)\ b_i$

:

$a_{m1}X_1+a_{m2}X_2+a_{m3}X_3+ \dots +a_{mn}X_n \ (\leq,=,\geq)\ b_m$

et aux contraintes de non-négativité

$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \quad X_3 \geq 0, \dots , \quad X_n \geq 0$

Ces différents éléments (paramètres) du modèle ont la signification suivante :

Z représente la valeur de la fonction économique (fonction-objectif). Cette quantité est généralement exprimée en unités monétaires.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ désignent les variables de décision (inconnues ou activités) du modèle.

$c_1, c_2, \dots, c_n$ sont les coefficients des variables de décision dans la fonction économique (contribution unitaire de chaque activité à l'objectif de performance poursuivi)

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ représentent les coefficients des variables de décision (appelées parfois coefficients technologiques) dans les différentes contraintes. Les a_{ij} désignent la quantité de la ressource n° « i » nécessaire pour chaque unité de l'activité « j ».

b_1, b_2, …, b_m représentent les éléments du second membre des contraintes et correspondent fréquemment aux quantités de ressources disponibles durant une période bien définie.

La notation (≤,=,≥) qui est indiquée à la gauche de chaque ressource disponible b_i signifie que chaque contrainte possède l'un des trois signes mentionnés.

Optimiser un modèle de programmation linéaire consiste à déterminer les valeurs des diverses variables de décision X_j (niveau de chaque activité en question) devant respecter toutes les contraintes du modèle et qui maximisent ou minimisent la valeur de la fonction économique Z.

Remarques :

- Les éléments a_{ij}, b_i et c_{ij} sont des quantités connues dans le modèle de programmation linéaire. Ils sont identifiés comme étant les paramètres du modèle qui permettent de mettre en relation les variables de décision aux contraintes et à la fonction économique (fonction-objectif) du modèle.
- Comme nous l'avons mentionné précédemment, chaque contrainte n'a qu'un seul des signes ≤,=,≥ ; d'autre part, le signe de la contrainte peut varier d'une contrainte à l'autre. De plus, le modèle de programmation linéaire ne tient pas compte des différents types d'unités (heures, mètres carrés, dinars, litres, pièces, etc.) qui peuvent exister entre les contraintes. Il est important toutefois qu'il y ait compatibilité d'unités au sein d'une même contrainte (les membres gauche et droit de chaque contrainte doivent être exprimés dans la même dimension).
- Les contraintes du programme linéaire s'appellent aussi contraintes fonctionnelles ou contraintes technologiques par opposition aux restrictions imposées sur les valeurs des variables de décision X_j par les contraintes de non-négativité.
- Dans la structure des contraintes, on constate que chaque unité de la variable de décision X_j (chaque unité de l'activité j) exige a_{ij} unités de la ressource i et que la somme utilisée de la ressource i par l'ensemble des variables de décision X_j (l'ensemble des activités réalisées) donne l'utilisation effective de cette ressource i (la quantité totale utilisée de cette ressource) en sachant que cette ressource est disponible en quantité limitée b_i durant une période considérée.

- Exercice d'application de modélisation :

Une entreprise fabrique deux types de climatiseurs pour desgrandes surfaces : modèle économique et modèle de luxe. Les deux appareils exigent de passer par trois départements pour en assurer l'assemblage final. Au département D_1, le modèle économique exige 2 heures de main d'œuvre tandis que le modèle de luxe exige 2,6 heures. Au département D_2, le modèle économique exige 3,5 heures et le modèle de luxe 1,8 heure. Au Département D_3, le modèle économique requiert 2,5 heures et le modèle de luxe demande 3,8 heures de main d'œuvre pour chaque unité fabriquée.

Le nombre d'heures de main d'œuvre disponibles par semaine pour chaque département est :

Département D_1 : 254 heures

Département D_2 : 280 heures

Département D_3 : 380 heures

Tous les appareils assemblés passent par un quatrième département pour vérification. La capacité de vérification de ce département s'élève à 110 unités de l'un ou l'autre des deux modèles de climatiseurs. Les coûts standards par unité pour chaque modèle sont consignés dans le tableau suivant :

	Modèle économique	Modèle de luxe
Matières premières (composants)	72 $	98 $
Main d'œuvre directe	58 $	65 $
vérification	25 $	32 $

Le tableau suivant donne les détails des frais variables pour chaque type de climatiseur :

	Modèle économique	Modèle de luxe
Assemblage	16 $	28 $
Vérification	6 $	9 $

Le prix de vente unitaire du modèle économique est de 239$ alors que celui du modèle de luxe est de 320$.

Pour satisfaire les besoins du marché, il est essentiel que l'entreprise assemble au moins 40 unités par semaine du modèle économique et au moins 35 unités du modèle de luxe. Bien que l'entreprise soit assurée de vendre toute la production du modèle économique, le service commercial prévoit que les ventes du modèle de luxe ne dépasseront pas 60 unités par semaine. On suppose également qu'il n'y a aucune restriction concernant l'approvisionnement en composants (matières premières) entrant dans l'assemblage de chaque appareil.

L'entreprise aimerait déterminer le programme d'assemblage hebdomadaire à mettre en œuvre qui maximiserait les bénéfices tout en respectant les disponibilités des diverses ressources et les contraintes du marché.

Cette situation peut se structurer selon un modèle de programmation linéaire (programme linéaire). Suivons la démarche suivante pour construire le modèle associé au problème à résoudre :

- Variables de décision

Rappelons que pour bien définir (de manière claire et précise) les variables de décision pour faciliter la formulation mathématique de la situation, il convient de répondre aux questions suivantes :

- Quelles sont les inconnues du problème de l'entreprise ?
- Combien de variables de décision doit-on définir ? (quelles sont les activités qu'assure l'entreprise ?)

Les réponses aux questions soulevées nous amènent à considérer d'une part que l'entreprise assure la conduite de deux activités à savoir la fabrication d'un modèle économique de climatiseur et la fabrication d'un modèle de luxe. Il y a donc deux activités (ou deux variables de décision).

De l'autre part, compte tenu des informations liées à l'assemblage des deux modèles d'appareils, on constate qu'on ignore les quantités à fabriquer par semaine des deux modèles. Ce qui nous conduit à la définition des variables de décision suivantes :

X_1 : le nombre d'unités d'appareils à assembler par semaine du modèle économique
X_2 : le nombre d'unités d'appareils à assembler par semaine du modèle de luxe

- Contraintes

Pour indiquer toutes les contraintes associées au problème à résoudre, il convient également de se poser certaines questions suivantes. Les réponses à ces dernières conduisent à la formulation de toutes les contraintes :

Questions	Réponses
Quelles sont les restrictions associées au processus d'assemblage des appareils fabriquées ?	Pour répondre à cette question, il faut identifier les ressources utilisées par l'entreprise. Les deux principales ressources sont : - Le temps disponible dans chaque département. - La capacité de vérification du quatrième département (de vérification). Il y aura donc 4 contraintes à formuler, une pour chaque département.
Existe-t-il d'autres restrictions sur les variables de décision ?	Oui, les restrictions associées aux besoins du marché à savoir : - Demande minimale de chaque modèle - Vente maximale du modèle de luxe.

Ce qui nous conduit à la formulation des contraintes (sept au total) comme suit :

	Modèle économique	Modèle de luxe	Disponibilités (heures/semaine)
Département D_1	2 heures	2,6 heures	254
Département D_2	3,5 heures	1,8 heure	280
Département D_3	2,5 heures	3,8 heures	380

Département D_1 : $2\ X_1 \quad + \quad 2{,}6\ X_2 \quad \leq \quad 254$

Nombre d'heures de main d'œuvre nécessaires pour l'ensemble des unités du modèle économique assemblées.

Nombre d'heures de main d'œuvre nécessaires pour l'ensemble des unités du modèle de luxe assemblées.

Total général des heures de main d'œuvre utilisées pour l'ensemble des unités des 2 modèles.

De façon similaire, on établit les contraintes pour les départements D_2 et D_3 :

Département D_2 : $3{,}5\ X_1 + 1{,}8\ X_2 \leq 280$

Département D_3 : $2{,}5\ X_1 + 3{,}8\ X_2 \leq 380$

Ensuite, formulons les contraintes relatives à la capacité de vérification au niveau du 4ème département :

$X_1 + X_2 \leq 110$ (le total des modèles assemblés et vérifié ne doit pas excéder la capacité limitée à 110 unités)

Concernant les contraintes rattachées aux exigences du marché, nous formulons les expressions suivantes :

$X_1 \geq 40$: le nombre d'unités assemblées du modèle économique doit dépasser le seuil minimal (40 unités).

$X_2 \geq 35$: le nombre d'unités assemblées du modèle de luxe doit être supérieur au seuil minimal indiqué (35 unités).

$X_2 \leq 60$: le nombre d'unités assemblées du modèle de luxe doit être inférieur au seuil maximal indiqué.

Enfin, indiquons les contraintes de non-négativité des variables de décision :

$X_1 \geq 0$; $X_2 \geq 0$ (les quantités des modèles à assembler doivent être positives ou nulles, donc non négatives).

- **Fonction-objectif ou fonction économique**

On doit exprimer de manière algébrique l'objectif assigné à l'entreprise. Il s'agit de maximiser son bénéfice total résultant de la conduite de ses deux activités à savoir l'assemblage des modèles économiques et des modèles de luxe.

Pour ce faire, on doit d'abord déterminer le bénéfice unitaire pour chaque modèle :

	Modèle économique	Modèle de luxe
Coûts standards/unité	155 car 72+58+25=155	195 car 98+65+32=195
Frais variables/unité	22 du fait que 16+6=22	37 du fait que 28+9=37
Total des coûts/unité	177 du fait que 155+22= 177	232 car 195+37=232
Prix unitaire de vente	239	330
Bénéfice unitaire (prix unitaire de vente – coût total/unité)	62 du fait que 239-177=62	98 du fait que 330-232=98

La fonction-objectif est donc : Maximiser $Z = 62\ X_1 + 98\ X_2$

Le modèle de programmation linéaire (programme linéaire) est donc le suivant :

$\text{Max } Z = 62\ X_1 + 98\ X_2$

Fonction objectif

S/C (sous les contraintes suivantes) :

$$
\begin{aligned}
2\ X_1 + 2{,}6\ X_2 &\leq 254 \\
3{,}5\ X_1 + 1{,}8\ X_2 &\leq 280 \\
2{,}5\ X_1 + 3{,}8\ X_2 &\leq 380 \\
X_1 + X_2 &\leq 110 \\
X_1 &\geq 40 \\
X_2 &\geq 35 \\
X_2 &\leq 60
\end{aligned}
$$

Contraintes fonctionnelles

$X_1 \geq 0\ ;\ X_2 \geq 0$

Contraintes de non-négativité des variables de décision

- <u>Problèmes de formulation (modélisation)</u>

<u>Exercice 1:</u>

Une entreprise fabrique deux types de ceintures : A et B. Le type A est de meilleure qualité que le type B. Le bénéfice net est de 200 DA pour le type A et de 150 DA pour le second type.

Le temps de fabrication pour le type A est le double du temps pour la fabrication du type B et si toutes les ceintures étaient du type B, l'entreprise pourrait en fabriquer 1000 par jours.

L'approvisionnement en cuir est suffisant pour 800 ceintures par jour (type A ou B).

Enfin, 400 boucles de type A et 700 boucles de type B sont disponibles par jour.

Formuler le programme linéaire correspondant en sachant que la boucle A ne peut être utilisée pour la ceinture B et vice versa.

Exercice 2:

Une entreprise industrielle fait le traitement des matières premières dans son usine principale U. Cette entreprise peut se procurer un maximum de 45 000 kilogrammes de matières premières par semaine chez son fournisseur habituel. Les coûts variables (coûts d'achat et de traitement) par kilogramme de matières premières sont de 5$ et le traitement d'un kg de matières premières nécessite 1,5 heure de main d'œuvre.

Chaque kilogramme de matières première permet l'obtention de 3 unités du composé A et 2 unités du composé B. L'entreprise peut décider de vendre le composé A tel qu'il est à raison de 7$ l'unité ou alors décider de le raffiner dans l'atelier U1. Le raffinage du composé A revient à 5$ l'unité et nécessite 3 heures de main d'œuvre. Le produit A raffiné peut être vendu à 15$ l'unité.

De même, on peut vendre le composé B tel quel à raison de 8$ l'unité, ou bien décider de le raffiner dans l'atelier U2. Le raffinage du composé B revient à 4$ l'unité et nécessite seulement une heure de main d'œuvre. Le produit B raffiné peut être vendu à 11$ l'unité.

L'entreprise dispose uniquement de 90 000 heures de main d'œuvre par semaine pour l'ensemble des opérations qu'elle assure (traitement et raffinage).

- Formuler le programme associé au problème à résoudre.
- Montrer que le programme ainsi formulé n'est pas linéaire.

Exercice 3 :

Une entreprise commercialisant un type de produit électroménager désire satisfaire la demande mensuelle qui s'adresse à elle. Elle dispose de 3 entrepôts localisés dans des endroits différents. Ces entrepôts desservent 4 clients (C1, C2, C3 et C4). Les disponibilités du produit fabriqué au niveau des entrepôts, les demandes exprimées par chaque client ainsi que les coûts unitaires de transport (en UM) sont consignés dans le tableau suivant :

	C1	C2	C3	C4	Disponibilités
Entrepôt A	36	30	32	38	600 unités
Entrepôt B	-	36	28	32	200 unités
Entrepôt C	34	38	30	36	400 unités
Demandes	600 u	800 u	400 u	200 u	

On suppose que l'entrepôt B ne peut pas livrer le produit au client C1.

Modéliser le problème à résoudre sous forme d'un programme linéaire.

Exercice 4:

Une entreprise commerciale dispose de deux entrepôts de stockage E_1 et E_2 situés dans deux sites différents. Elle cherche à transporter sa marchandise depuis ces entrepôts vers deux points de vente situées dans les villes côtières V_A, et V_B. L'entreprise peut recourir à deux moyens de transport : les camions et le chemin de fer. Les coûts de transport du produit (en UM et par tonne) dépendent du chemin suivi, ainsi que du moyen de transport utilisé comme indiqués dans les deux tableaux suivants:

Camions	Ville V_A	Ville V_B
Entrepôt E_1	5	7
Entrepôt E_2	4	6

Trains	Ville V_A	Ville V_B
Entrepôt E_1	3	5
Entrepôt E_2	2	4

-

Admettons que les quantités disponibles durant la période « t » sont respectivement de 1000 tonnes et 1400 tonnes pour les entrepôts E_1 et E_2 et que les demandes des villes sont respectivement de 1100 tonnes et 1300 tonnes pour V_A et V_B.

On tiendra compte aussi du contrat entre cette entreprise et la société de chemins de fer portant sur l'obligation de transporter par train un minimum de 800 tonnes de cette marchandise.

Formuler ce problème de transport sous forme d'un programme linéaire.

Exercice 5 :

Une compagnie de navigation possède un navire pour le transport de marchandises. Ce navire dispose de deux compartiments : avant et arrière. La compagnie a reçu une offre pour le transport de deux marchandises : semoule et thé. Elle peut accepter d'acheminer la totalité ou une partie des produits. Les tableaux suivants donnent les indications sur les marchandises disponibles et les capacités du navire en volume (espace en m^3) et en tonnage (poids) :

Marchandise	Qté (en tonnes)	Volume (m^3/t)	Tarif UM/t
Semoule	1900	1,5 m^3	200
Thé	600	4 m^3	600

	Capacité de tonnage (en tonnes)	Capacité en volume (en m^3)
Compartiment avant	1500	3000
Compartiment arrière	1000	2500

Outre les contraintes liées à la capacité du navire, La compagnie doit veiller au maintien de son équilibre. Pour ce faire, le poids contenu dans chaque compartiment doit être proportionnel à la capacité de tonnage.

Formulez le problème à résoudre de la compagnie sous forme d'un programme linéaire.