Université Abderrahmane Mira-Bejaia

Faculté des Sciences Économiques, Commerciales et des Sciences de Gestion

Département Sciences Financières et Comptabilité

Laboratoire (facultatif) ....

Polycopié pédagogique

Dossier numéro (à remplir par l'administration) **:** ....

Titre

Mathématiques financières

Cours destiné aux étudiants de

Licence (spécialité et niveau) : **Deuxième année Licence**

Année : 2021/2022

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE

Ce cours a pour objet de faire connaître à l'étudiant les différentes techniques et les instruments utilisés dans la détermination de l'intérêt et son calcul et dans les opérations d'escompte d'effet de commerce. Il vise également à outiller (fournir) des instruments et techniques relatives au règlement d'un crédit, à son remplacement et son remboursement sous formes d'annuités, mais aussi le mode d'amortissement d'un emprunt sur le court et le long terme. Nous avons souhaité rendre ce cours accessible à tous. Les chapitres proposés sont présentés de manière simple et progressive. Les différents concepts présentés sont abordés par étapes dans l'intention d'en dégager et préciser le sens de façon graduelle.

Le cours comporte sept chapitres complémentaires. Le premier chapitre présente les différents éléments du calcul financier et explique la notion d'intérêts simples, passant par son caractère tout en développant la notion de valeur acquise et de valeur actuelle. Le deuxième chapitre commence par une présentation des effets de commerce. Il se poursuit par un développement de la notion d'escompte des effets de commerce, tout en expliquant la différence entre l'escompte commercial et l'escompte rationnel. Le troisième chapitre traite le problème d'équivalence des effets de commerce. D'abord à travers la détermination de la date d'équivalence et ensuite en présentant l'équivalence de deux ou de plusieurs effets.

Le quatrième chapitre est une introduction aux intérêts composés. Il fournit une présentation détaillée des éléments essentiels d'une opération financière à long terme ou d'intérêts composés. Le cinquième chapitre sera consacré à la définition et à la présentation des caractéristiques des annuités, nous nous essayerons d'expliquer la différence entre annuités constantes et annuités variables. Le sixième chapitre développe la notion d'emprunt indivis. Il fournit les différentes modalités de remboursements d'une partie ou de la totalité du capital emprunté, tout en expliquant la notion d'amortissement. Le dernier chapitre expose les modalités de choix d'investissement, à travers la détermination de la valeur actuelle nette, de taux de rendement interne, de délai de récupération du capital investi et de l'indice de profitabilité.

Chapitre 1 : Les intérêts simples (les opérations financières à court terme)

Introduction

Les intérêts simples s'appliquent aux prêts ou placements à court terme (moins d'un an). En intérêt simple, les intérêts ne s'ajoutent pas en fin de période de capitalisation au capital pour produire intérêts. Ce chapitre a pour but d'initier l'étudiant au mode de calcul et de remboursement des intérêts simples. Il sera questions de définir d'abord la notion d'intérêt simple, de la valeur acquise et de la valeur actuelle puis de cerner les principales différences entre celui-ci et l'intérêt composé.

1. Définition de l'intérêt

L'intérêt désigne la contrepartie de loyer ou la rémunération de l'argent prêté. Cet argent est dit « Capital ou placement ». L'intérêt peut être défini comme la rémunération d'un prêt d'argent. C'est le prix à payer par l'emprunteur au prêteur, pour rémunérer le service rendu par la mise à disposition d'une somme d'argent pendant une période de temps[1].

C'est donc, la rémunération de la location d'argent qui doit se déterminer en fonction d'un pourcentage (taux d'intérêt) appliqué sur le montant prêté ou emprunté et de la durée de mise à disposition de cet emprunt/ prêt. Plus la durée d'un placement est longue plus on a tendance à exiger plus d'intérêt en retour ; et plus le montant prêté est grand plus le montant d'intérêt sera important.

<u>**Exemple :**</u> **A** prête **B** 30000 DA pour huit mois et après cette période, ce dernier remet à A le montant de 45 000 DA. Donc l'intérêt versé à A par Best de 15000 DA.

$$A \xrightarrow{\text{Capital (30000 DA)}} B$$

$$\longleftarrow$$

$$\text{Remboursement} = \text{Capital} + \text{Intérêt}\ (45\,000 = 30\,000 + \text{Intérêt}) \Rightarrow \text{I} = 15\,000\text{DA}$$

2. Formule de l'intérêt simple

Soient :

C : Capital placé ;
t: Taux d'intérêt ;
n: Durée de placement ;
I : L'intérêt.

$$\boxed{\mathbf{I = C \times n \times t/100}}$$

[1] Masiéri W. (2008), « Mathématiques financières », 2ème édition Dunod, Paris, P.4.

2.1. Etude de chacun des éléments de la formule de l'intérêt simple

La formule principale de l'intérêt simple comprenne le montant du capital placé, la durée de placement et le taux d'intérêt.

- **Capital :** Le capital concerne le montant de la somme placée ou prêtée à une date déterminée.

Exemple : Soit un capital placé au taux annuel de 3% pendant 3ans a rapporté 180 DA d'intérêts. Déterminer le capital initialement placé.

$\mathrm{I} = \mathrm{C} \times \mathrm{t}/100 \times \mathrm{n}$

$\mathrm{I} \times 100 = \mathrm{C} \times \mathrm{t} \times \mathrm{n}$

$$\mathrm{C} = \frac{\mathrm{I} \times 100}{\mathrm{t} \times \mathrm{n}} \Rightarrow \mathrm{C} = \frac{180 \times 100}{3 \times 3} \Rightarrow \mathbf{C = 2000\ DA}$$

- **Durée :** La durée qui est notée par « n » peut être exprimée en années, en mois ou en jours.

Exemple 1 : Durée exprimé en années
Soit un capital de 10000 DA placé à intérêt simples à 8,5% pendant 2 ans.

$$\mathrm{I} = \frac{C_0 \times \mathrm{n} \times \mathrm{t}}{100}$$

$$\mathrm{I} = \frac{10000 \times 8{,}5 \times 2}{100} \Rightarrow \quad \mathrm{I} = 1700\ \mathrm{DA}$$

Exemple 2 : Durée exprimé en mois
Un capital de 4700 DA placé à intérêts simples pendant 9 mois à 6%.

$$\mathrm{I} = \frac{C_0 \times \mathrm{n} \times \mathrm{t}}{100 \times 12}$$

$$\mathrm{I} = \frac{4700 \times 6 \times 9}{1200} \Rightarrow \quad \mathrm{I} = 211{,}5\ \mathrm{DA}$$

Remarque :

- L'année financière est comptabilisée à 360 jours.
- Lorsque la durée de placement (ou prêt) est comprise entre 2 dates, on compte les mois pour leur durée réelle, même si l'année est considérée à 360 jours.
- Pour le calcul du nombre de jours, on ne compte pas le jour de départ, mais le jour d'arrivée.

Exemple 3 : **La durée exprimée en jours**

Soit un capital de 4200 DA placé au taux annuel de 2,25% du 12 mars au 17 juillet.

Durée de placement est de :

Mars-avril-mai-juin-juillet.

(31j-12) -30j-31j-30j-17j

19j+30j+31j+30j+17j = 127 jours.

$$I = \frac{4200 \times 2{,}25 \times 127}{36000} = \mathbf{33{,}33\ DA}$$

Remarque :

Selon l'unité utilisée pour caractériser « n » (nombre de périodes). Cette formule générale devient :
I = C x t x n/ 400 (en trimestre) ;
I = C x t x n / 1200 (en mois) ;
I = C x t x n /36000 (en jours) ;
I = C x t x n/ 200 (en semestre) ;
I = C x t x n / 2400 (en quinzaine).

- **Taux d'intérêt :** Le taux d'intérêt est exprimé en pourcentage (%), il indique en fait la somme d'argent rapportée par 100 DA en une période déterminée (en principe une année).

Exemple :

Un capital de 50 000 DA est placé à intérêt simple a produit 520 DA d'intérêt pendant 6 mois. Quel est le taux de placement ?

Solution :
On a comme données, $C_0 = 50\ 000\ \text{DA}, n = 6\ \text{mois}, I = 520\ \text{DA}, t = ?$

$$I = \frac{C_0 \times n \times t}{36000} \Rightarrow t = \frac{I \times 36000}{C \times n}$$

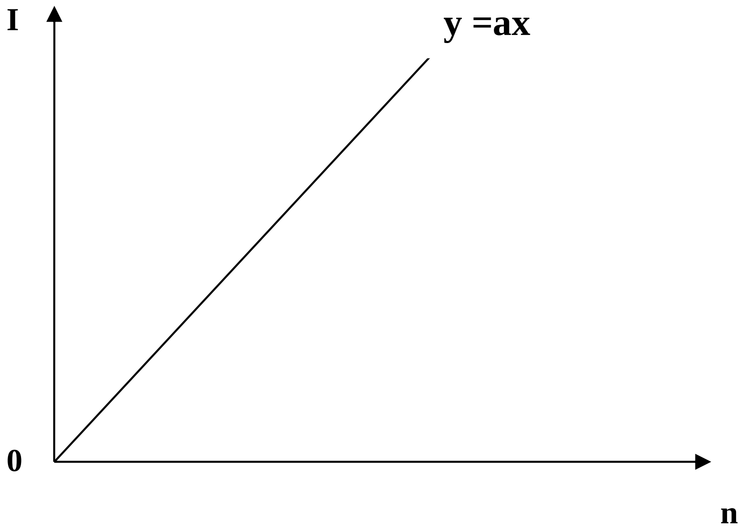
$$t = \frac{520 \times 36000}{50000 \times 36} = 10{,}4\%$$

Vérification :

$$I = \frac{50000 \times 10{,}4 \times 6}{36000} = 520\ \text{DA}$$

- **Représentation graphique de l'intérêt**

$\mathrm{I} = \mathrm{Cin} \implies$ de la forme $\mathrm{Y} = \mathrm{a\,x} + \mathrm{b}$, avec a constante



2.2. Valeur acquise et valeur actuelle

Le calcul des intérêts, d'une manière générale, implique de prendre en considération deux notions : valeur acquise et valeur actuelle.

2.2.1. Valeur acquise

La valeur acquise d'un capital est définie comme la somme du capital et des intérêts simples qu'il a produit[2].

Valeur acquise = Capital initial + Intérêts

$$\mathbf{C_n = C_0 + I}$$

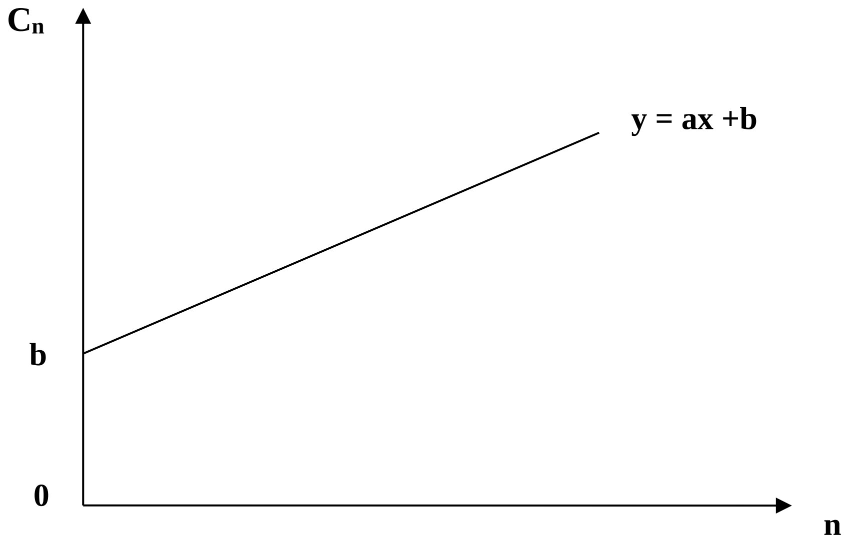
$$\implies \mathrm{C_n} = \mathrm{C_0} + \frac{\mathrm{C_0} \times \mathrm{t} \times \mathrm{n}}{100}$$

$$\textbf{Valeur acquise } (\mathbf{C_n}) = \mathbf{C_0}\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{t \times n}}{\mathbf{100}}\right)$$

[2] Masiéri W. (2008), « Mathématiques financières », 2ème édition Dunod, Paris.

- **Représentation graphique de la valeur acquise**

$C_n = C + I = C + Cin = Cin + C \implies$ de la forme $Y = a\,x + B$



Exemple :

Quelle est la valeur acquise par un capital de 6000 DA placé à 5%, du 20 Mars au 31 Mai ?

Solution :

Nombre de jours : Mars : 31 – 20 = 11j
Avril : 30j
Mai : 31
Nombre de jours = 72 jours.

$$C_n = C_0 + \frac{C_0 \times t \times n}{36000} \implies C_n = 6000 + \frac{6000 \times 5 \times 72}{36000} = 6\,060 \text{ DA}$$

2.2.2. La valeur Actuelle

La valeur actuelle d'un capital C évalué un jour avant son échéance est égal à la différence entre la valeur acquise et le montant de l'intérêt[3].

Valeur actuelle = Valeur acquise – Intérêt

$$\mathbf{C_0 = C_n - I}$$

[3] Masiéri W. (2008), « Mathématiques financières », 2ème édition Dunod, Paris.

$$C_0 = C_n / \left(1 + \frac{t \times n}{100}\right)$$

<u>Exemple :</u> Quelle est la somme qui peut emprunter aujourd'hui au taux de 6%, s'il ne peut rembourser que 5 000 DA dans 10 mois ?

<u>Solution :</u> les données sont les suivantes : $C_n = 5\ 000\ \text{DA}, n = 10\ \text{mois}, t = 6\%,\ C_0 = ?$

$$C_0 = \frac{C_n}{\left(1 + \frac{6 \times 10}{1200}\right)} = \frac{5\ 000}{1{,}05} = 4\ 761{,}90\ \text{DA}.$$

2.3. Méthode des nombres et des diviseurs fixes

La méthode des nombres et des diviseurs fixes est une méthode qui consiste à simplifier le calcul des intérêts simples, elle trouve son utilité dans le calcul de l'intérêt produit par plusieurs capitaux, placés au même taux[4].

Principe :

$$I = \frac{C \times n \times t}{36000}$$

Dans cette formule divisions le numérateur et dénominateur par t.

$$I = \frac{\frac{C \times n \times t}{t}}{\frac{36000}{t}} \quad \Longrightarrow \frac{C \times n}{\frac{36000}{t}}\text{, posons } \frac{\mathbf{36000}}{\mathbf{t}} = \mathbf{D}$$

$$\mathbf{C \times n = Nombre = N \Leftrightarrow \quad I = \frac{N}{D}}$$

- **Calcul de l'intérêt global de plusieurs capitaux**

Soient les capitaux suivants : $C_1, C_2, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . C_K$ placés respectivement pendant : $n_1, n_2, \ldots \ldots \ldots \ldots . n_K$ jours, leurs intérêts respectifs $I_1, I_2, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots I_K$.Soit I le total de ses intérêts, on a $I = I_1 + I_2 + I_3 + \cdots + I_K$

$$I = \frac{N_1}{D} + \frac{N_2}{D} + \frac{N_3}{D} + \cdots + \frac{N_K}{D}$$
$$\mathbf{I = 1/D(N_1 + N_2 + N_3 + \cdots + N_K)}$$

[4] Masiéri W. (2008), « Mathématiques financières », 2ème édition Dunod, Paris, P.12.

$$\mathbf{I} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \mathbf{N_i}}{\mathbf{D}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \mathbf{C_i \times n_i}}{\mathbf{D}}$$

<u>Exemple :</u>

Calculer l'intérêt global produit par les trois (03) capitaux suivants placés à intérêt simple au taux unique 9%.

C_1 = 16 000 DA, pendant 36 jours.
C_2 = 20 000 DA, pendant 60 jours.
C_3 = 30 000 DA, pendant 90 jours.

<u>Solution :</u>

$$\mathbf{I_G = I_1 + I_2 + I_3}$$

$$\mathbf{D = \frac{36000}{t} = \frac{36000}{9} = 4\,000}$$

$$\text{On a : } \quad I = \frac{N}{D} \text{ , avec } N = C \times n$$

$$I_G = \frac{16000 \times 36 + 20000 \times 60 + 30000 \times 90}{\frac{36000}{9}} = \mathbf{1\,119\ DA}.$$

3. Le Taux moyen de placement

Le taux moyen de placement est le taux unique **T** qui appliqué aux capitaux respectifs et pour leurs durées respectives, conduirait au même intérêt total, donc pour K périodes, on a :
En effet, pour k périodes [5]:

$$T = \sum \mathbf{C_i \times t_i \times n_i} / \sum \mathbf{C_i \times n_i}$$

Trois placements sont faits par une même personne aux conditions suivantes :

Capitaux	Taux	Durées
C_1	t_1	n_1
C_2	t_2	n_2
C_3	t_3	n_3

$C_1 \times t_1 \times n_1/36000 + C_2 \times t_2 \times n_2/36000 + C_3 \times t_3 \times n_3/36000 = C_1 \times T \times n_1/36000 + C_2 \times T \times n_2 /36000 + C_3 \times T \times n_3/36000$.

[5] Masiéri W. (2008), « Mathématiques financières », 2ème édition Dunod, Paris.

Exemple :

Déterminer le taux moyen de placements suivants :
$C_1 = 1\ 000$ DA, $n_1 = 20$ jours, $t_1 = 10$ % ;
$C_2 = 2\ 000$ DA, $n_2 = 25$ jours, $t_2 = 9$ % ;
$C_3 = 3\ 000$ DA, $n_3 = 30$ jours, $t_3 = 8$ % ;
$C_4 = 4\ 000$ DA, $n_4 = 35$ jours, $t_4 = 7$ %.

Solution :

$$\text{Le taux moyen de la placement} = \frac{\sum C_i \times t_i \times n_i}{\sum C_i \times n_i}$$

$$T = \frac{C_1 \times t \times n_1 + C_2 \times t \times n_2 + C_3 \times t \times n_3 + C_4 \times t \times n_4}{C_1 \times n_1 + C_2 \times n_2 + C_3 \times n_3 + C_4 \times n_4}$$

$$T = \frac{1000 \times 10 \times 20 + 2000 \times 9 \times 25 + 3000 \times 8 \times 30 + 4000 \times 7 \times 35}{1000 \times 20 + 2000 \times 25 + 3000 \times 30 + 4000 \times 35} = \frac{2\ 350\ 000}{300\ 000}$$

$$T = 7{,}83\ \%.$$

4. Les taux proportionnels

Deux taux sont proportionnels s'ils donnent la même valeur acquise à partir du même capital initial, au bout de la même durée de placement à intérêts simples. On dit que deux taux **t** et **t'** sont proportionnels s'ils représentent le même système intérêt simple exprimé dans deux unités de temps différentes (par exemple, $t/12$ est le taux mensuel proportionnel au taux annuel t). Soient les deux opérations suivantes [6]:

1. Le capital C_0 est placé pendant 1 an au taux d'intérêt annuel t_1. Au bout de 1 an, la valeur acquise est : $C_0(1 + t_1)$

2. Le capital C_0 est placé pendant 12 mois au taux d'intérêt mensuel t_{12}.

Au bout de 1 an, la valeur acquise est : $C_0 (1 + 12 \times t_{12})$.

Les 2 valeurs seront égales si :

$1 + 12 \times t_{12} = 1 + t_1$

Plus généralement, le taux d'intérêt annuel t (on pose $t_1 = t$) proportionnel au taux d'intérêt t_m par période 1/m d'année est égal à $m \times t_m$. Les taux les plus utilisés :

[6] Masiéri W. (2008), « Mathématiques financières », 2ème édition Dunod, Paris.

t semestriel =1/2 t annuel

t trimestriel =1/4 t annuel

t mensuel =1/12t annuel

t journalier =1/360 t annuel (année financière)

t journalier =1/365 *t* annuel ou *t* journalier =1/366*t* annuel (année civile)

<u>Exemple :</u>

On place au taux annuel 5,07%. On calcule le taux proportionnel mensuel. On a t =0,0507%. La période est l'année, la sous -période est le mois donc *p* = 12. Le taux proportionnel mensuel est donc :

$$t_{12} = 0{,}0507/12 = 0{,}004225 = 0{,}4225\%.$$

Si on place 273DA pendant sept mois à intérêts simples au taux annuel 5,07%, la somme à rembourser est donc : $C_7 = 273 \times (1 + 0{,}004225 \times 7) = 281{,}07$ DA.

5. Les intérêts pré et post-comptés et le taux effectif

Deux modes de versement ou de paiement des intérêts sont possibles [7]:

5.1. Les intérêts post-comptés

Les intérêts sont dits post-comptés quand ils sont comptés en fin de période. L'emprunteur dispose de $\mathbf{C_0}$ en début d'emprunt et rembourse$\mathbf{C_n}$en fin d'emprunt.

$$\mathbf{C_n = C_0(1 + t \times n/100)}$$

Quant à la valeur actuelle

$$\mathbf{C_0 = \ C_n/(1 + t \times n/100)}$$

<u>Exemple :</u>

Une personne place pour neuf mois un montant de 2500 DA au taux de 5%. La valeur acquise de cette opération à l'échéance est :$C_n = 2500(1 + 5 \times 9/1200) = 2\,593{,}75$ DA.

5.2. Les intérêts précomptés

Les intérêts sont dits précomptés quand ils sont comptés en début de période. C'est le cas notamment pour les agios et commission d'escompte qui sont décomptés au moment même de la remise de l'effet. La valeur actuelle sera :

$$\mathbf{C_0 = \ C_n(1 - t^* \times n/100)}$$

[7] boissonnade M. (2002), « mathématiques financières », 2ème édition Dunod, Paris, P.20.

La valeur acquise est :

$$\mathbf{C_n = C_0/(1 - t^* \times n/100)}$$

Exemple :

Considérons une opération d'emprunt d'un montant de 100 000 DA, au taux d'intérêt précompté de 6%, débutant le 18/03/N pour terminer le 25/11/N.
La durée de l'emprunt : $n = 252$ jours
L'intérêt est : $100\,000 \times 6 \times 252/36000 = 4\,200$ DA

La valeur actuelle de l'emprunt est : $100\,000 - 4\,200 = 95\,800$ DA.

5.3. Taux d'intérêt effectif

L'intérêt simple est versé soit par avance, au moment du versement du capital, soit lors du remboursement du prêt. Ces deux modalités ne sont pas équivalentes du point de vue financier. Par convention, on appelle taux effectif d'intérêt simple, le taux d'intérêt simple avec règlement des intérêts lors du remboursement du prêt.

Le taux effectif (vu comme une opération à intérêt post compté) d'une opération à intérêt précompté est donc supérieur au taux d'intérêt annoncé.

$$\mathbf{t = t^*/(1 - n \times t^*/100)}$$

Démonstration :

On a : $C_n - C_0 = C_0 \times t \times n/100$
Et : $C_n - C_0 = C_n \times t^* \times n/100$

On déduit :

$$C_n \times t^* \times n/100 = C_0 \times t \times n/100 = C_n(1 - t^* \times n/100)\, t \times n/100$$

D'où :

Le taux effectif (t) = $\mathbf{t^*/(1 - t^* \times n/100)}$

Exemple 1 :

Une personne place à intérêts précomptés la somme de 30 000 DA, pour une durée de 6 mois au taux de 10 %. Quel est le taux effectif de ce placement ?

Solution : Taux précompté $(t^*) = 10\%$, $n = 6$ mois, taux effectif $(t) = ?$

$$t = \frac{t^*}{1 - \frac{t^* \times n}{1\,200}} = \frac{10}{\left(1 - \frac{10 \times 6}{1200}\right)} = 10{,}52\%$$

Exemple 2 :

Une personne emprunte pour 1an un capital de 8 000 DA, à intérêts simples précomptés. Le taux étant de 11%. Calculer :

- Le montant de l'intérêt,
- La somme reçue par l'emprunteur,
- Le taux d'intérêt effectif.

Solution : comme données : $C_0 = 8\,000 \text{ DA}, n = 1\text{an}, t^* = 11\%, t = ?$

- Le montant de l'intérêt

$$I = \frac{C_0 \times t^* \times n}{100} = \frac{8\,000 \times 11 \times 1}{100} = 880 \text{ DA}$$

- La somme reçue par l'emprunteur

$$S = C_0 - I = 8\,000 - 880 = 7\,120 \text{ DA}$$

- Le taux d'intérêt effectif

$$t = \frac{t^*}{1 - \frac{t^* \times n}{100}} = \frac{11}{1 - \frac{11 \times 1}{100}} \Longrightarrow t = 12,35\ \%$$

Remarque :

Toujours, taux d'intérêt effectif $(t) >$ taux d'intérêt précompté (t^*)

Conclusion

Les intérêts simples sont des intérêts calculés uniquement sur le montant d'un capital, sans prendre en compte les intérêts antérieurs. Le montant d'intérêt est déterminé essentiellement par trois facteurs, à savoir le capital placé (la somme prêtée), la durée du prêt et le taux de placement. La notion de taux d'intérêt effectif permet de comparer une situation où l'intérêt est post-compté et une situation où l'intérêt est précompté.

Chapitre 2 : Escompte d’effets de commerce à intérêts simples

Introduction

L’escompte constitue un outil largement utilisé par les entreprises dans leur financement à court terme. Dans ce chapitre, nous nous attacherons, après avoir présenté les effets de commerce, à expliquer et à définir la notion d’escompte et des commissions bancaires.

1. Généralités sur les effets de commerce

Le paiement d’une dette s’effectue par la remise immédiate ou différée : d’espèces, d’un chèque bancaire ou postal ; ou encore par l’établissement d’un effet de commerce. Il existe deux grands types d’effets de commerce [8]:

1.1. La lettre de change (ou traite)

La lettre de change est un document émis par une personne appelée **tireur** (le créancier, c'est-à-dire le fournisseur) qui donne mandat à une autre personne appelée **tiré** (le débiteur, c'est-à-dire le client) de payé à une date donnée, une personne appelée bénéficiaire (généralement le tireur ou une tierce personne). Le tiré reconnaît sa dette vis-à-vis du tireur en acceptant la lettre de change.

1.2. Le billet à ordre

Le billet à ordre est un document émis par une personne appelée souscripteur (le débiteur) qui s’engage à payer, à une date donnée, une somme d’argent à une autre personne, appelée le bénéficiaire (le créancier). Deux possibilités s’offrent au bénéficiaire d’un effet de commerce.

- Il peut le conserver jusqu’à l’échéance, puis le remettre à sa banque pour encaissement. Dans ce cas, l’effet n’est qu’un simple moyen de paiement.
- Il peut également le remettre à sa banque avant l’échéance et en demander l’escompte.

2. Définition de l’escompte

L’escompte est défini comme étant l’opération par laquelle une banque verse par avance (date de présentation à l’escompte) au porteur d’un effet de commerce (lettre de change, billet à ordre) non échu (avant son échéance) le montant de celui-ci, sous déduction d’un intérêt.

[8] Carmen Mermoud (2013), « Mathématiques financières », Gymnase de Burier ; paris.

2.1. L'escompte commercial et la valeur actuelle commerciale

Pour mieux appréhender le concept d'escompte, il convient d'expliquer et définir deux notions fondamentales : l'escompte commercial et la valeur actuelle commerciale[9].

2.1.1. Escompte commercial

L'escompte commercial **est l'intérêt** retenu par la banque sur la valeur nominale (somme inscrite sur l'effet) de l'effet pendant le temps qui s'écoule depuis le jour de la remise à l'escompte jusqu'au jour de l'échéance[10].

Soient :
V : La valeur nominale de l'effet ;
t : Le taux de l'escompte ;
n : La durée de l'escompte ;
$\mathbf{E_c}$ **:** Le montant de l'escompte commercial.

$$\mathbf{E_C = \frac{V \times n \times t}{36000}}$$

Cette expression est peut-être simplifiée en divisant le numérateur et le dénominateur par **t** :

$$E_C = V \times n/(36000/t)$$

Posons : $\mathbf{D = 36000/t}$ donc $\mathbf{E_C = V \times n/D}$

2.1.2. Valeur actuelle commerciale

La valeur actuelle commerciale d'un effet, notée, V_C est la **différence** entre la valeur nominale et l'escompte commercial.

$$\mathbf{V_C = V - E_C}$$

Remplaçons E_C par l'expression établie précédemment en fonction de D :

$$V_C = V - (V \times n/D)$$

D'où

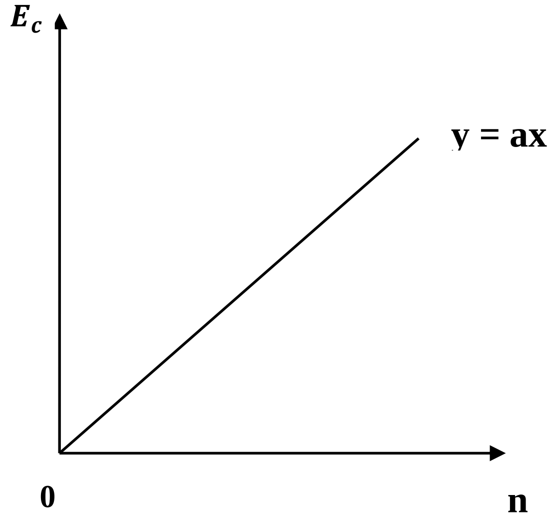
$$\mathbf{V_C = V(D - n/D)}$$

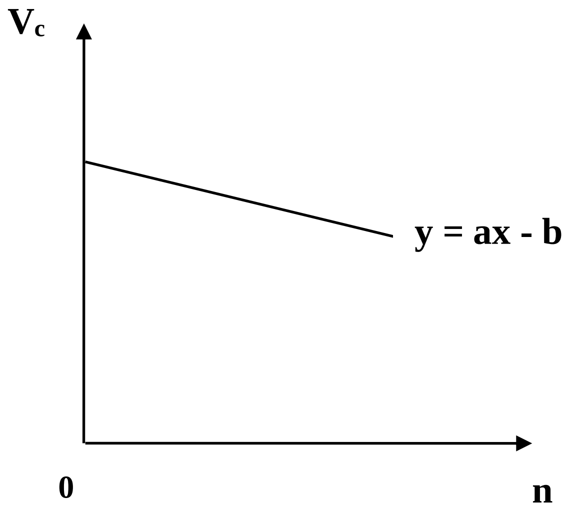
[9] Makhlouf F. (2017), « Mathématiques financières : cours et TD corrigés », Pages Bleues internationales, Alger.
[10] Boissonnade M. (2002), « mathématiques financières », 2ème édition Dunod, Paris, P.20.

- **Représentations graphiques de l'escompte commercial et de la valeur actuelle**

$E_c = \text{Cin}$: de la forme $y = ax$

$V_c = C - E_c = C - \text{Cin} = C(1 - \text{in}) = -\text{Cin} + C$: de la forme: $y = -ax + b = ax - b$





<u>Exemple :</u>

Un effet de 6 000 DA de valeur nominale, cédé le 14 juin et dont l'échéance est le 10 juillet. Le taux d'escompte est 6%.

- Déterminer les montants de la valeur actuelle et de l'escompte commercial.

<u>Solution :</u>

- **Le montant de l'escompte commercial :**

$$E_C = 6000 \times 8 \times 26/36000 = 34{,}66 \text{ DA}$$

Ou bien, avec le diviseur fixe $D = \frac{36000}{t} = \frac{36000}{8} \Longrightarrow$ **D = 4 500**

$\mathbf{E_c = \frac{V \times n}{D}} \Longrightarrow E_c = \frac{6\,000 \times 26}{4500} = 34{,}46$ DA.

- **La valeur actuelle commerciale :**

$V_C = 6000 - 34{,}66 = 5\,965{,}34$ DA.

Avec le diviseur fixe : $V_C = V\left(\frac{D-n}{D}\right) \Rightarrow V_C = 6\,000\left(\frac{4\,500-26}{4\,500}\right) = 5\,965{,}34$ DA.

<u>Remarque :</u>

L'escompte commercial n'est pas logique, puisque l'intérêt n'est pas calculé sur la somme réellement versée par le banquier escompteur (la valeur actuelle commerciale), mais sur la valeur nominale de l'effet, c'est-à-dire sur la somme qui est remboursée à l'échéance. D'où une méthode conforme aux principes de calcul de l'intérêt simple, celle de l'escompte rationnel.

2.2. L’escompte rationnel et la valeur actuelle rationnelle

L’escompte commercial et l’escompte rationnel empruntent des démarches différentes.

2.2.1. Valeur actuelle rationnelle

Désignons par E_r l’escompte rationnel. Par définition, la valeur de l’escompte rationnel s’obtient avec l’expression suivante :

$$\mathbf{E_r = V_r \times n \times t/36000}$$

La valeur actuelle rationnelle d’un effet, notée V_r, est la différence entre la valeur nominale et l’escompte rationnel.

Valeur actuelle rationnelle = Valeur nominale – Escompte rationnel

$$\mathbf{V_r = V - E_r}$$

L’escompte et la valeur actuelle rationnels peuvent également être exprimés par rapport à la valeur nominale.
De l’expression précédente l’on déduit : $\mathbf{V = V_r + E_r}$

Or:$E_r = V_r \times n \times t/36000$

D’où: $V = V_r + [V_r \times n \times t/36000] \Longrightarrow V = V_r[(36000 + n \times t)/36000]$

$$\mathbf{V_r = 36000 \times V/(36000 + n \times t)}$$

Cette expression peut être également simplifiée à l’aide du diviseur D. si l’on divise le numérateur et le dénominateur par **(t),** il vient :

$$V_r = [(36000 \times V/t)]/[(36000/t) + n \times t/t]$$

A présent, remplaçons$36000/t$, on aura :

$$\mathbf{V_r = D \times V/(D + n)}$$

2.2.2. Escompte rationnel

La démarche est la même pour exprimer l’escompte rationnel par référence à la valeur nominale. De l’expression initiale de V_r, l’on déduit :

Escompte rationnel = Valeur nominale – valeur rationnelle

$$\mathbf{E_r = V - V_r}$$

Or, $V_r = 36000 \times V/(36000 + t \times n) \Longrightarrow E_r = V - [36000 \times V/(36000 + t \times n)]$
D'où :

$$\mathbf{E_r = V \times n \times t/36000 + n \times t}$$

L'introduction du diviseur D permet de simplifier cette expression. Si l'on divise le numérateur et le dénominateur par t et que l'on remplace $36000/t$par D, l'expression devient :

$$\mathbf{E_r = V \times n/(D + n)}$$

Exemple :

En utilisant les données de l'exemple précédent : $V = 6000\ \text{DA}, n = 26\ \text{jours}, t = 8\%$

- Calculer le montant de l'escompte commercial ;
- Déterminer la valeur actuelle rationnelle.

Solution :

- **Le montant de l'escompte rationnel :**

$$E_r = \frac{V \times n \times t}{36000 + nt} \Longrightarrow E_r = \frac{6000 \times 26 \times 8}{36000 + 26 \times 8} = 34{,}46\ \text{DA.}$$

Ou bien, en utilisant le diviseur fixe, $D = \frac{36000}{t} = \frac{36000}{8} \Longrightarrow$ **D = 4 500**

$$E_r = \frac{V \times n}{D + n} \Longrightarrow E_r = \frac{6\,000 \times 26}{4500 + 26} = 34{,}46\ \text{DA.}$$

- **La valeur actuelle rationnelle :**

$$V_r = \frac{36000 \times V}{36000 + nt} \Longrightarrow V_r = \frac{36000 \times 6000}{36000 + 26 \times 8} = 5\,965{,}53\ \text{DA.}$$

Ou bien :

$$V_r = \frac{D \times V}{D + n} \Longrightarrow V_r = \frac{4\,500 \times 6000}{4\,500 + 26} = 5\,965{,}53\ \text{DA.}$$

Ou bien :

$$V_r = V - E_r \Longrightarrow V_r = 6\,000 - 34{,}46 = 5\,965{,}53\ \text{DA.}$$

Remarque :

Toujours, Escompte commercial $>$ Escompte rationnel

et

Valeur actuelle commerciale $<$ Valeur actuelle rationnelle

3. Les éléments supplémentaires de l'escompte

Dans la pratique bancaire, la remise d'un effet à l'escompte entraîne des frais financiers supplémentaires, en plus de l'escompte proprement dit. Les frais en question comprennent plusieurs commissions (Exemple : commission d'acceptation et de courrier).

3.1. L'Agio

L'ensemble de l'escompte et des commissions s'appelle **« L'agio ».**

$$\mathbf{Agio\ (TTC) = Escompte + Commissions + T.V.A}$$

- **Les commissions :** Les commissions peuvent être proportionnelles ou fixes, elles permettent à la banque de se rémunérée. On cite :

  - **Les commissions d'endossement :** c'est un pourcentage calculé sur la valeur nominale de l'effet (elles couvrent une éventuelle opération de réescompte auprès de la banque centrale).

$$\mathbf{C_e = V \times t' \times n/36000}$$

  - **Les commissions fixes** (exemple : la commission indépendante du temps, elles peuvent être exprimées en pourcentage ou en pour millage de la valeur nominale ou en K da).

  - **Autres commissions** (exemple : commissions d'acceptation et de manipulation, elles peuvent être exprimées en pourcentage ou en pour millage de la valeur nominale ou en K da).

$$\mathbf{Agio\ (HT) = Escompte + \sum Commissions}$$

3.2. Valeur nette

La valeur nette est la différence entre la valeur et le montant de l'agio.

Valeur nette = Valeur nominale - Agio (TTC)

3.3. Le taux réel de l'escompte

Le taux réel de l'escompte est le taux qu'il faut appliquer pour obtenir l'agio hors taxe. Il existe deux méthodes de calcul de taux réel [11]:

[11] Carmen Mermoud (2013), « Mathématiques financières », Gymnase de Burier

$$1^{er}\ \textbf{Méthode : Taux réel } (t_r) = \text{Agio (HT)} \times 36000/V \times n$$

$$2^{ème}\ \textbf{Méthode : Taux réel } (t_r) = t + t' + 360K/n$$

3.4. Le taux de revient

Contrairement au taux réel de l'escompte, le taux de revient se calcul sur l'agio (TTC).

$$\textbf{Taux de revient } (t'_r) = \text{Agio (TTC)} \times 36000/\text{Valeur nette} \times n$$

Exemple 1 :

Un effet de commerce d'un montant de 5400 DA, échéant le 31 Aout et escompté le 8 juillet aux conditions suivantes : Taux d'escompte 4,5% ; commission d'endossement 0,4%, commission indépendante du temps 1/8%, TVA 19%.

Travail à faire :

1. Calculer le montant de l'agio ;
2. Déterminer la valeur nette ;
3. Calculer le taux réel de l'escompte ;
4. Déterminer le taux de revient.

Solution :

1- Calcul de la valeur de l'escompte et de la valeur nette

Nombre de jours : 54 jours

$\text{Escompte} = 5400 \times 54 \times 4,5/36000 = 36,45 \text{ DA}$

$\text{Commission d'endossement } C_e = 5400 \times 54 \times 0,4/36000 = 3,24\ DA$

$\text{Commissions indépendante du temps} = 1/8\% \times V = 5400/800 = 6,75\ DA$

$\text{Agio(Ht)} = E_C + \text{Commissions}$

$\text{Agio (HT)} = 36,45 + 3,24 + 6,75 = 46,44 \text{ DA}$

$\text{TVA} = (19\%) = 6,75 \times 19/100 = 1,28 \text{ DA}$

$\text{Agio (TTC)} = \text{Agio (HT)} + \text{TVA}$

$\text{Agio (TTC)} = 46,44 + 1,28 = 47,72 \text{ DA}$

2- Détermination de la valeur nette

$\text{Valeur nette} = \text{Valeur nominale} - \text{Agio (TTC)}$

$\text{Valeur nette} = 5\,400 - 47,72 = 5\,352,28 \text{ DA}$

3- Le calcul de taux réel de l'escompte

1^{er} Méthode : $\text{Taux réel } (t_r) = \text{Agio (HT)} \times 36000/V \times n$

$t_r = 46{,}44 \times 36000/5400 \times 54 = 5{,}73\ \%$

2[ème] Méthode : Taux réel $(t_r) = t + t' + 360K/n$
$t_r = 4{,}5 + 0{,}4 + 360/8 \times 54 = 5{,}73\%$

4- Le taux de revient

Taux de revient $(t_r') =$ Agio (TTC) $\times$ 36000/Valeur nette $\times$ n.
Taux de revient $(t_r') = 47{,}72 \times 36000/5352{,}28 \times 54 = 5{,}94\ \%$.

Exemple 2 :

Un commerçant négocié le septembre N, cinq (05) traites toutes à échéance du 12 octobre. Taux d'escompte 12,60%, TVA 19 %. Il reçoit le bordereau suivant :

Valeur nominale	**Echéance**	**Nombre de jours**	**Intérêts**
468,84	12/10/N	(1) 31+1= 32	(2) 10,00
556,57	12/10/N	(1) 31+1=32 (2) 31+1=32	(2) 10,00
714,00	12/10/N	(1) 31+1=32	(2) 10,00
2 103,43	12/10/N	(1) 31+1=32	23,56
3 487,43	12/10/N		39,06
7 330,31			92,62
		Commission de service	75,00
		TVA	(3) 12,75
		Total agios	(4) 180,37 (5) 7 149,94
		Net à votre crédit (valeur au 12/10/N)	

(1) : La durée en nombre de jours, de la date de remise de l'effet à la date d'échéance, est augmentée d'un jour. Pour les effets brûlants (échéances proches), les banques peuvent imposer une durée minimale.

(2) : Les banques peuvent prélever un minimum d'escompte pour les effets d'une valeur minimale peu élevée.

(3) : La TVA est calculée sur le montant de la commission de service, soit $75 \times 0{,}19 = 14{,}75$ DA.

(4) : $92{,}62 + 75 + 14{,}75 = 181{,}87$ DA.

(5) : $7\ 330{,}31 - 181{,}87 = \ 7\ 149{,}94$ DA.

Travail à faire :

1. Déterminer le montant des intérêts ;
2. Calculer le taux de l'escompte ;
3. Déterminer le taux de revient pour le commerçant ;

3 . Calculer le taux de placement pour le banquier.

Solution :

1. Calcul des intérêts

$$\mathrm{I}_1 = \frac{468{,}84 \times 0{,}126 \times 32}{360} = \mathbf{5{,}25\ DA}$$, soit 10 DA (minimum de perception).

$$\mathrm{I}_2 = \frac{556{,}57 \times 0{,}126 \times 32}{360} = \mathbf{6{,}23\ DA}$$, soit 10 DA (minimum de perception).

$$\mathrm{I}_3 = \frac{714 \times 0{,}126 \times 32}{360} = \mathbf{7{,}99\ DA}$$, soit 10 DA (minimum de perception).

$$\mathrm{I}_4 = \frac{2\ 103{,}47 \times 0{,}126 \times 32}{360} = \mathbf{23{,}56\ DA}.$$

$$\mathrm{I}_5 = \frac{3487{,}43 \times 0{,}126 \times 32}{360} = \mathbf{39{,}06\ DA}.$$

2. Calcul du taux réel d'escompte

Le taux d'escompte est le taux de l'opération en elle-même. Appliqué à la valeur nominale de l'effet sur le nombre de jours, il permet d'obtenir le montant de l'agio effectivement payé.

On a la durée = 31 jours, la valeur nominale = 7 330,31 DA.

$$7\ 330{,}31 - 7\ 149{,}94 = \frac{7\ 330 \times t \times 31}{360} \Longrightarrow t = \frac{360 \times 180{,}37}{7\ 330{,}31 \times 31}\ 0{,}2857, soit\ t = 28{,}57\%.$$

Remarque :

Le taux est élevé du fait des frais et commissions.

3. Calcul du taux de revient pour le commerçant

Le taux de revient dépend de la somme effectivement prêtée et de la somme effectivement remboursée.

- **Avec frais et commissions :**

Somme effectivement prêtée = 7 149,94 DA.

Somme effectivement remboursée = 7 330,31 DA.

Année civile = 365 jours.

$$7\,330{,}31 - 7\,149{,}94 = \frac{7\,149{,}94 \times t \times 31}{365} \Rightarrow t = \frac{365 \times 180{,}37}{7149{,}94 \times 31}\ 0{,}297, soit\ t = 29{,}70\%.$$

En année n : $\mathrm{C} - \mathrm{V_c} = \mathrm{V_c tn} \Rightarrow \frac{\mathrm{C} - \mathrm{V_c}}{\mathrm{V_c n}} = t$

En mois n : $\mathrm{C} - \mathrm{V_c} = \frac{V_c tn}{12} \Rightarrow \frac{12(\mathrm{C} - \mathrm{V_c})}{\mathrm{V_c n}}$

En jours n (année commerciale) : $\mathrm{C} - \mathrm{V_c} = \frac{V_c tn}{360} \Rightarrow \frac{360(\mathrm{C} - \mathrm{V_c})}{\mathrm{V_c n}}$

- **Sans frais et commissions :**

$$7\,330{,}31 - 7\,250{,}78 = \frac{7\,250{,}78 \times \mathrm{t} \times 31}{365} \Rightarrow \mathrm{t} = \frac{365 \times 78{,}53}{7250{,}78 \times 31} = 0{,}1291$$

soit $\mathrm{t} = 12{,}91\%$.

$$\mathrm{C} - \mathrm{V_c} = \mathrm{V_c tn} \quad \Rightarrow \mathrm{C} - (\mathrm{C} - \mathrm{Cin}) = (\mathrm{C} - \mathrm{Cin})\mathrm{tn}$$

$$\mathrm{Cin} = (\mathrm{C} - \mathrm{Cin})\mathrm{tn}$$

$$\frac{\mathrm{Cin}}{(\mathrm{C} - \mathrm{Cin})\mathrm{n}} = \mathrm{t} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{Cin}}{\mathrm{Cn} - \mathrm{Cin}^2} = \mathrm{t}$$

$$\frac{\mathrm{Cin}}{\mathrm{Cn}(1 - \mathrm{in})} = \mathrm{t} \Rightarrow \frac{\mathbf{i}}{\mathbf{1 - in}} = \mathbf{t}$$

Donc, si n est exprimée en année : $\mathrm{t} = \frac{\mathrm{i}}{(1 - \mathrm{in})}$

Si n est exprimée en mois : $\mathrm{t} = \frac{\mathrm{i}}{\left(1 - \frac{\mathrm{in}}{12}\right)}$

Si n est exprimée en jours (année commerciale) : $\mathrm{t} = \frac{\mathrm{i}}{\left(1 - \frac{\mathrm{in}}{360}\right)}$

En appliquant les données de l'exemple : $\mathrm{t} = \frac{0{,}126}{\left(1 - \frac{0{,}126 \times 31}{360}\right)}$ = 0,1274, soit t = 12,74 %

4. Calcul du taux de placement du banquier

On calcul d'abord, le taux de placement du banquier avec frais et commissions ensuite sans frais et commission. Généralement, le taux avec frais et commission est supérieur au taux de placement sans frais et commissions.

- **Avec frais et commissions :**

L'opération de prêt rapporte au banquier 92,62 DA, car la commission de service équivalent à une récupération de frais réellement engagés (année civile = 365 jours).

$$\frac{7\,149,94 \times t \times 31}{365} = 92{,}62 \Longrightarrow t = \frac{365 \times 92{,}62}{7149{,}94 \times 31} = 0{,}1525, \text{soit } t = 12{,}25\%.$$

- **Sans frais et commissions :**

$$E_C = \frac{Cin}{365} = \frac{7\,330{,}31 \times 0{,}126 \times 31}{365} = 78{,}44\ DA.$$

$V_C = C - E_C = 7\,330{,}31 - 78{,}44 = 7\,251{,}87$ DA.

$$\frac{7\,251{,}87 \times t \times 31}{365} = 78{,}44 \text{ DA} \Longrightarrow t = \frac{365 \times 78{,}44}{31 \times 7251{,}87} = 0{,}1273, \text{soit } t = 12{,}73\%.$$

$$V_c \times t \times n = E_c \Leftrightarrow (C - E) \times t \times n = Cin$$

$$\Longrightarrow t = \frac{Cin}{(C - E_c)n} = \frac{Cin}{Cn - Cin^2} = \frac{Cin}{Cn(1 - in)} = \frac{i}{1 - in}$$

Lorsque la durée est exprimée en année : $t = \frac{i}{1-in}$

La durée est exprimée en mois : $t = \frac{i}{1-\frac{in}{12}}$

La durée est exprimée en jours (année commerciale) : $t = \frac{i}{1-\frac{in}{365}}$

On applique les données précédentes : $t = \frac{0{,}126}{1-\frac{0{,}126\times 31}{365}} \approx 0{,}1273$, soit $t = 12{,}73$ %.

<u>Remarque :</u>

Généralement, pour le calcul du taux d'escompte, du taux de revient, du taux de placement, en prend en considération les sommes effectivement versées, la durée réelle de l'opération, les frais réellement engagés ou le gain réellement réalisé pour le banquier.

Conclusion

L'escompte est, généralement, une opération à intérêt précompté, puisqu'en contrepartie de l'apport de la créance, le banquier paie immédiatement le montant de l'effet appelé valeur nominale diminué des intérêts et des commissions constituant la rémunération de la banque. L'escompte ne comporte pas le transfert du risque de défaillance du tiré ou du souscripteur, car en cas d'incident de paiement, la banque débitera le compte du bénéficiaire du montant refusé.

Chapitre 3 : Equivalence des effets de commerces

Introduction

Dans ce chapitre nous nous attacherons, après avoir exposé les fondements de l'escompte, à expliquer la notion d'équivalence des effets de commerce. En premier lieu, l'accent sera mis sur la définition de la notion d'équivalence. Nous expliquons, en deuxième lieu, la notion de la date d'équivalence, et enfin, en dernier lieu, nous présenterons l'équivalence d'un effet avec plusieurs effets ainsi que l'échéance moyenne et l'échéance commune.

1. Notion d'équivalence

Généralement, lorsque le porteur d'un effet de commerce (débiteur) éprouve un certain nombre de difficultés à s'acquitter de ses engagements à l'échéance prévue, il arrive fréquemment que le créancier accepte un arrangement par un report de la date d'échéance, un remplacement de plusieurs paiements ou effets ou bien un choix entre plusieurs modes de règlement. A cet effet, la notion d'équivalence permet de résoudre ce type de problème, c'est-à-dire qu'elle a le souci de ne léser personne[12].

2. Equivalence de deux effets de commerce

Deux effets de commerces (ou deux capitaux) sont équivalents à une date donnée si, à cette date, leurs valeurs actuelles commerciales sont égales. A intérêts simples, cette date, dite **date d'équivalence**, est unique[13].

Désignons par :
V_1, V_2 : Les valeurs nominales respectives des effets 1 et 2.
n_1, n_2 : Le nombre de jours à courir entre la date d'équivalence cherchée et les échéances respectives des effets 1 et 2.
t : le taux d'escompte.
V_{c1}, V_{c2} : Les valeurs actuelles commerciales des effets 1 et 2.

A la date d'équivalence, les **deux valeurs actuelles commerciales** sont égales :

$$V_{C1} = V_{C2} \leftrightarrow V_1 - (V_1.t.n_1/36000) = V_2 - (V_2.t.n_2/36000)$$

Divisons les numérateurs et dénominateurs par t et remplaçons le rapport 36000/t ; par D le diviseur du taux :

$$\longrightarrow V_1 - (V_1.n_1/D) = V_2 - (V_2.n_2/D)$$
$$\longrightarrow V_1(D - n_1/D) = V_2(D - n_2/D)$$

[12] Makhlouf F. (2017), « Mathématiques financières : cours et TD corrigés », Pages Bleues internationales, Alger.
[13] Marie boissonnade (2002), « mathématiques financières », 2ème édition Dunod, Paris.

D'où l'équation d'équivalence :

$$\mathbf{V_1(D - n_1) = V_2(D - n_2)}$$

Si, la valeur de l'effet de remplacement V_2 étant connu, on doit donc chercher l'échéance du deuxième effet et par conséquent n_2.

$$V_1(D - n_1) = V_2(D - n_2)$$

$$V_1 D - V_1 n_1 = V_2 D - V_2 n_2$$

$$D(V_2 - V_1) + V_1 n_1 = V_2 n_2$$

$$\mathbf{n_2 = \frac{D(V_2 - V_1) + V_1 n_1}{V_2}}$$

Exemple 1 :

Un commerçant souhaite remplacer le 15 juin un effet de 15.000 DA arrivant à l'échéance le 24 juillet, par un autre échéant le 14 août.

- Quel doit être le montant de cet effet, le taux d'escompte étant de 12%.

Solution :

À la date d'équivalence, $\mathbf{V_{c1} = V_{c2}}$

$$15\,000 - \frac{15000 \times 12 \times 39}{36000} = V_2 - \frac{V_2 \times 12 \times 60}{36000} \Rightarrow \mathbf{V_2 = 15\,107,14\ DA}$$

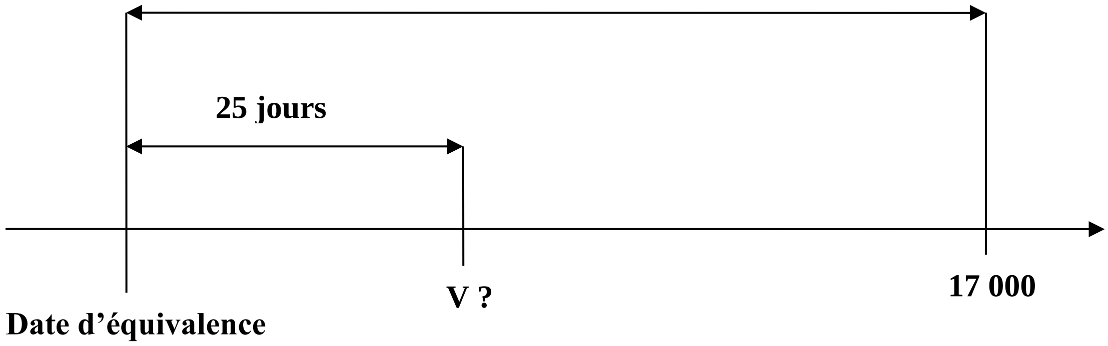
Exemple 2 :

Un débiteur décide remplacer un effet de commerce d'une valeur nominale de 17 000 DA à échéances de 60 jours par un autre effet à échéance de 25 jours. Sachant que le taux d'escompte est 10%.

- Déterminer la valeur nominale de cet effet.

Solution :

- La valeur nominale de l'effet



La condition d'équivalence est la suivante : $\mathbf{V_{c1}} = \mathbf{V_{c2}}$

$$V_1 - \frac{V_1 \times t \times n_1}{36000} = V_2 - \frac{V_2 \times t \times n_2}{36000}$$

$$V_1 - \frac{V_1 \times t \times n_1}{36000} = V_2\left(1 - \frac{t \times n_2}{36\,000}\right)$$

$$\frac{36\,000V_1 - V_1 \times t \times n_1}{36\,000} = V_2\left(\frac{36\,000 - t \times n_2}{36\,000}\right)$$

$$V_2 = \frac{\frac{36\,000V_1 - V_1 \times t \times n_1}{36\,000}}{\frac{36\,000 - t \times n_2}{36\,000}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{V_2} = \frac{\mathbf{36\,000\ V_1 - V_1 \times t \times n_1}}{\mathbf{36\,000 - t \times n_2}}$$

$$17\,000 - \frac{17\,000 \times 12 \times 60}{36000} = V_2 - \frac{V_2 \times 12 \times 25}{36000}$$

$$16\,660 = \frac{36\,000V_2 - 300V_2}{36\,000} \Leftrightarrow 16\,660 = \frac{V_2(36\,000 - 300)}{36\,000}$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{16\,660 \times 36\,000}{35\,700} = \mathbf{16\,800\ DA}.$$

$\Rightarrow$ L'effet de commerce d'une valeur nominale de 17 000 DA à échéance de 60 jours est équivalent à l'effet d'une valeur nominale de 16 800 DA à échéance de 25 jours.

<u>Vérification :</u>

$$\left.\begin{array}{l} V_1 - \dfrac{V_1 \times t \times n_1}{36000} = 17\,000 - \dfrac{17\,000 \times 12 \times 60}{36\,000} = 16\,660 \text{ DA} \\ V_2 - \dfrac{V_2 \times t \times n_2}{36000} = 16\,800 - \dfrac{16\,800 \times 12 \times 25}{36\,000} = 16\,660 \text{ DA} \end{array}\right\} \text{L'égalité est vérifiée}$$

Exemple 3 :

Le 01 juillet, cette entreprise crée deux autres effets, V1= 15 864 DA et V2 = 15 924 DA qu'elle escompte au taux de 4,5%. Sachant que la date d'échéance du 1er effet est de 31 juillet.

- Calculer la date du 2ème effet pour que ces deux effets soient équivalents.

Solution :

- La date d'échéance pour le 2ème effet

On a comme données : $t = 4{,}5\%, n_1 = 30 \text{ j}, V_1 = 15\,864 \text{DA}, V_2 = 15\,924 \text{ DA}$

A la date d'équivalence : $\mathbf{V_{c1} = V_{c2}}$

$$V_1 - \frac{V_1 . n_1 . t}{36000} = V_2 - \frac{V_2 . n_2 . t}{36000}$$

$$15\,864 - \frac{15\,864.30.4{,}5}{36000} = 15\,934 - \frac{15\,924 . n_2 . 4{,}5}{36000}$$

$$15\,864 - 59{,}49 = 15\,924 - 1{,}9905 n_2$$

$$15\,804{,}51 = 15\,924 - 1{,}9905 n_2$$

$$1{,}9905 n_2 = 119{,}49 \Longrightarrow n_2 = \frac{119{,}49}{1{,}9905} \text{ D'où } \mathbf{n_2 = 60 \text{ jours}}$$

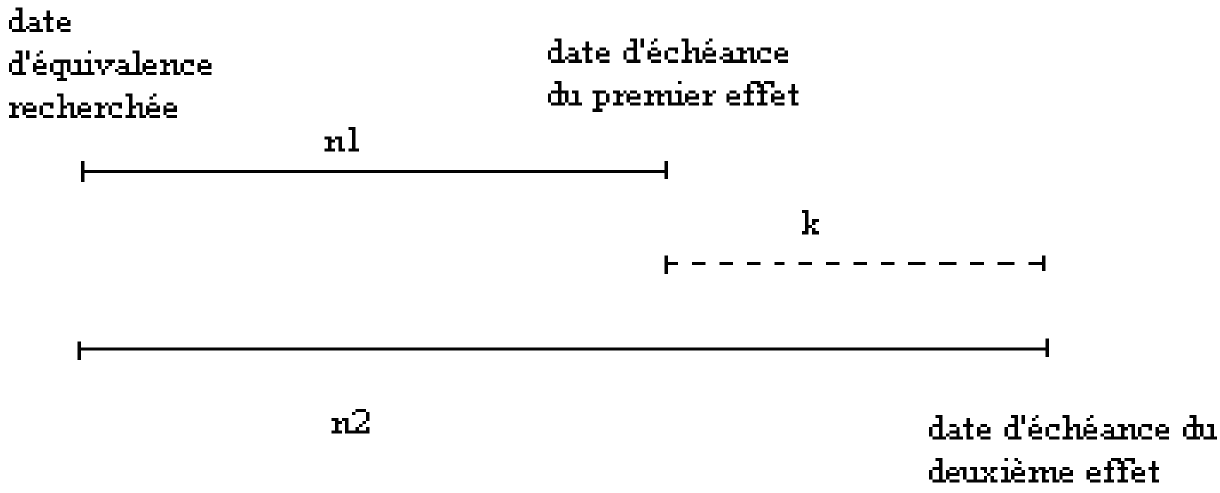
Donc, la date d'échéance de l'effet 2 est le 30 Août.

3. Détermination de la date d'équivalence

Cette détermination implique que soit considéré le nombre de jours qui séparent les échéances du premier et du second effet[14].

Posons que $n_2 = n_1 + K$, où k est la distance en jours entre les échéances qui séparent les échéances du premier et du second effet. En d'autres termes, l'échéance du second effet est supposé plus éloignée de k jours de la date d'équivalence que celle du premier.

[14] Boissonnade M. (2002), « mathématiques financières », 2ème édition Dunod, Paris.



Considérons à présent l'expression de l'équivalence établie précédemment

$$V_1(D - n_1) = V_2(D - n_2)$$

Remplaçons n_2 par n_1 +k :

$$V_1(D - n_1) = V_2(D - n_1 + K)$$

$$V_1(D - n_1) - V_2(D - n_1) = -V_2.K$$

L'expression obtenue à partir de $(D - n_1)$en facteur, s'écrit :

$$(D - n_1)(V_1 - V_2) = -V_2.K$$

La distance en jours, de l'échéance du premier effet à la date d'équivalence, est donnée par :

$$\mathbf{n_1 = D + K[V_2/(V_1 - V_2)]}$$

<u>Exemple :</u>

Quelle est, au taux d'escompte de 10%, la date d'équivalence de deux effets de valeurs nominales 950 DA et 1000DA échéant respectivement le 20 juillet et le 28 septembre ?

Posons : $V_1 = 950$ DA; $V_2 = 1000$ DA.

$\mathbf{n_1}$ = la distance en jours entre la date d'équivalence recherchée et le 20 juillet, échéance de l'effet 2000 DA de valeur nominale.

$\mathbf{n_2}$ = la distance en jours entre la date d'équivalence recherchée et le 28 septembre, échéance de l'effet 1000 DA de valeur nominale.

La valeur de k est la différence entre les dates d'échéances des deux effets : k= 70 jours.

<u>Solution :</u>

Détermination de la valeur de n_1:

$$\mathbf{n_1 = D + K[V_2/(V_1 - V_2)]}$$

$$n_1 = (36000/10) + 70[1000/(950 - 1000)] = 89{,}47, \text{soit } n_1 = 89 \text{ jours} .$$

La date d'équivalence est antérieure de 89 jours au 20 juillets, ce qui correspond au 22 avril.

4. Equivalence d'un effet avec la somme de plusieurs autres

Un effet (capital) est équivalent à la somme de plusieurs à une date donnée si, à cette date, la valeur actuelle commerciale de cet effet (capital) **unique** est égale à la somme des valeurs actuelles commerciales des autres effets (capitaux). Cette date est appelée date d'équivalence.

Soit un effet de valeur nominale V et K effets de valeurs nominales $V_1, V_{2,} \dots \dots \dots .. V_K$ ayant leurs échéances distantes de la date d'équivalence recherchée respectivement de $n_1, n_2, \dots \dots \dots \dots n_K$jours. L'équivalence au taux d'escompte t s'écrit :

$$V - (V.t.n/36000) = [V_1 - (V_1.t.n_1/36000)] + \cdots + [V_K - (V_K.t.n_K/36000)]$$

Avec le diviseur du taux $\mathbf{D = 36000/t}$, cette égalité devient :

$$V - (V.n/D) = [V_1 - (V_1.n_1/D)] + \cdots + [V_K - (V_K.n_K/D)]$$

$$\leftrightarrow V - (V.n/D) = \sum (V_i - V_i.n_i/D) \text{ (de i = 1 à K)}$$

$$\mathbf{V - (V.n/D) = \sum V_i - (1/D) \sum V_i.n_i \text{ (de i = 1 à K)}}$$

<u>Exemple 1 :</u>

Un commerçant envisage de s'acquitter d'une dette matérialisée par trois effets de : 1000 DA, 1500 DA et de 2000 DA, dont les échéances respectives sont distantes de ce jour de 30, 35 et 40 jours, par un paiement unique sous la forme d'un effet échéant dans 38 jours. Taux 10%. Calculer la valeur nominale de cet effet.

<u>Solution :</u>

Le diviseur a pour valeur : $D = 36000/10 = 3\,600.$
L'équivalence s'écrit dans ce cas :

$$\mathbf{V - (V.n/D) = (V_1 + V_2 + V_3) - [(1/D)(V_1.n_1 + V_2.n_2 + V_3.n_3)]}$$

V – (V. 38/3600) = (1000+1500+2000) – 1/3600[(1000×30) + (1500×35) + (2000×40)]

$$V(1 - 0{,}010556) = 4500 - 1/3600(162500)$$

$$V = 4454{,}86/0{,}98944 = 4\ 502{,}40 \text{ DA.}$$

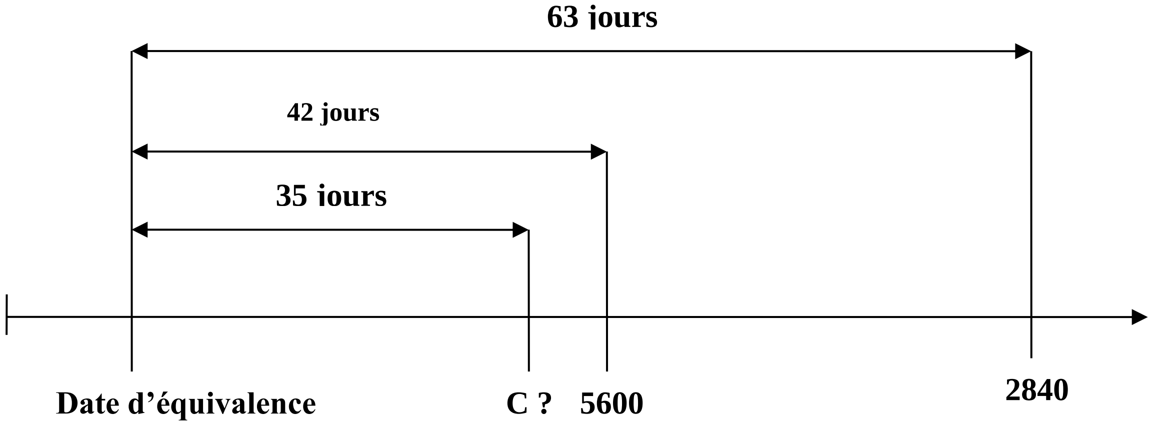
Exemple 2 :

Un commerçant a accepté une lettre de change d'une valeur de 2 840 DA et d'échéance de de 63 jours et une autre lettre de 5 600 DA et d'échéance de 42 jours, demande à son créancier de les replacer par une lettre unique à échéance de 35 jours. Taux d'escompte est de 12%.

- Déterminer le montant de la lettre à 35 jours d'échéance.

Solution :

- Le calcul du montant de la lettre V= ?



A la date d'équivalence, on a la condition suivante :

$$V_c = V_{c1} + V_{c2}$$

$$V - \frac{V \times t \times n}{360} = V_1 - \frac{V_1 \times t \times n_1}{360} + V_2 - \frac{V_2 \times t \times n_2}{360}$$

$$V\left(1 - \frac{t \times n}{360}\right) = \left(V_1 - \frac{V_1 \times t \times n_1}{360}\right) + \left(V_2 - \frac{V_2 \times t \times n_2}{360}\right)$$

$$V = \frac{\left(V_1 - \frac{V_1 \times t \times n_1}{360}\right) + \left(V_2 - \frac{V_2 \times t \times n_2}{360}\right)}{\left(1 - \frac{t \times n}{360}\right)}$$

$$V = \frac{\left(\frac{360V_1 - V \times t \times n_1}{360}\right) + \left(\frac{360V_2 - V_2 \times t \times n_2}{360}\right)}{\left(\frac{360 - t \times n}{360}\right)}$$

$$\Rightarrow \mathbf{V} = \frac{\mathbf{360V_1 - (V_1 \times t \times n_1) + 360V_2 - (V_2 \times t \times n_2)}}{\mathbf{360 - t \times n}}$$

$$\left(V - \frac{V \times 0{,}12 \times 35}{360}\right) = \left(5\,600 - \frac{5\,600 \times 0{,}12 \times 42}{360}\right) + \left(2\,840 - \frac{2\,840 \times 0{,}12 \times 63}{360}\right)$$

$$\frac{V(360 - 4{,}2)}{360} = 5\,521{,}60 + 2\,780{,}36$$

$$\Rightarrow V = \frac{360(5\,521{,}60 + 2\,780{,}36)}{355{,}8} = \mathbf{8\,400\ DA}.$$

Vérification :

$$V - \frac{V \times t \times n}{36000} = 8\,400 - \frac{8\,400 \times 12 \times 35}{36\,000} = 8\,302\ \text{DA}.$$

$$2\,840 - \frac{2840 \times 12 \times 63}{36000} + 5\,600 - \frac{5\,600 \times 12 \times 42}{36000} = 2780{,}36 + 5521{,}60 += \ 8\,302\text{DA}.$$

$\Rightarrow$ L'égalitéest vérifiée.

5. Equivalence de plusieurs effets : L'échéance commune

On parle de l'échéance commune lorsque on est en présence d'un cas de remplacement de plusieurs capitaux (ou effets remplacés) par un seul capital (effet unique).

Exemple 1 :

Un débiteur a accepté trois (03) lettres de change :

- $V_1 = 5\,400$ DA, échéance dans 14 jours ;
- $V_2 = 5\,100$ DA, échéance dans 60 jours ;
- $V_3 = 6\,300$ DA, échéance dans 75 jours.

Il souhaite que son créancier les remplace par un effet unique de valeur nominale de 16.700 DA. Déterminer l'échéance de cet effet. Taux d'escompte est de 12%.

Solution :

$$16700 - \frac{16700 \times 12 \times n}{36000} = 5400 - \frac{5400 \times 14 \times 12}{36000} + 5100 - \frac{5100 \times 60 \times 12}{36000} + 6300 - \frac{6300 \times 75 \times 12}{36000}$$

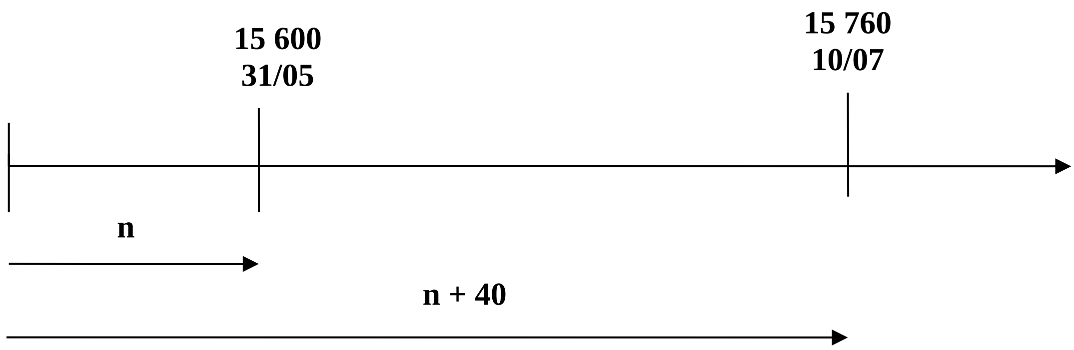
$$n = \frac{184{,}70 \times 360}{16700 \times 0{,}12} \Rightarrow n = 34 \text{ jours}$$

Exemple 2 :

Déterminer au taux d'escompte de 9%, l'échéance commune des deux effets suivants : le premier effet d'une valeur de 15 600 DA à échéance du 31 mai et le second effet d'une valeur de 15 760 DA à échéance du 10 juillet.

Solution :

- Calcul de l'échéance commune des deux effets



A l'équivalence, $V_{c1} = V_{C2}$

$$V_1 - \frac{V_1 \times t \times n}{360} = V_2 - \frac{V_2 \times t \times (n + p)}{360}$$

$$\frac{360V_1 - V_1 \times t \times n}{360} = \frac{360V_2 - V_2 \times t \times (n + p)}{360}$$

$$-V_1 \times t \times n + V_2 \times t \times n = 360V_2 - 360V_1 - V_2 \times t \times p$$

$$\mathbf{n = \frac{360V_2 - 360V_1 - (V_2 \times t \times p)}{(V_2 \times t) - (V_1 \times t)}}$$

$$15\,600 - \frac{15\,600 \times 9 \times n}{36\,000} = 15\,760 - \frac{15\,760 \times 9 \times (n + 40)}{36\,000}$$

$$15\,600 - 3{,}09n = 15\,760 - 3{,}94n - 157{,}60$$

$$-3{,}09n + 3{,}94n = 15\,760 - 15\,600 - 157{,}60$$

$$0{,}04n = 2{,}4 \Rightarrow n = \frac{2{,}4}{0{,}04} = 60 \text{ jours.}$$

6. Cas particulier : échéance moyenne

L'échéance moyenne est l'échéance d'un effet unique qui, à la date d'équivalence, a une valeur actuelle égale à la somme des valeurs actuelles des effets remplacés.

$$V - (V.n^*/D) = \sum V_i - (1/D)\sum V_i n_i \ \ (\text{de } i = 1 \text{ à } K)$$

Où **n*** est l'échéance moyenne. Compte tenu de $V = \sum V_i \ \ (de\ i = 1 \text{ à } K)$, cette expression peut être réduite à :

$$V.n^*/D = \sum V_i\,.\,n_i \longrightarrow Vn^* = \sum V_i\, n_i \ (\text{de } i = 1 \text{ à } K)$$

D'où : $\mathbf{n^*} = \sum \mathbf{V_i\,.\,n_i/V}\ (\boldsymbol{de\ i} = \mathbf{1} \text{ à } \boldsymbol{K})$

ou

$$\mathbf{n^*} = \sum \mathbf{V_i\,.\,n_i} \Big/ \sum \boldsymbol{V_i}\ (\boldsymbol{de\ i} = \mathbf{1} \text{ à } \boldsymbol{K})$$

Exemple 1 :

Soit les effets de commerce suivants :
$V_1 = 1\ 000$ DA, échéant le 10 mars ; $V_2 = 1\ 500$ DA, échéant de 26 mars ;
$V_3 = 2\ 000$ DA, échéant le 11 avril ; $V_4 = 2\ 500$ DA, échéant de 25 avril ;
Considérons la date d'équivalence le 28 février. Déterminer l'échéance moyenne.

Solution :

n_1= (10 mars - 28 février) = 10 jours,n_2= (26 mars – 28 février) = 26 jours ;
n_3 = (11 avril – 28 février) = 42 jours, n_4= (24 avril – 28 février) = 55 jours.

$$V = \sum V_i\ (\text{ de } 1 \text{ à } 4) = 1\ 000 + 1\ 500 + 2\ 000 + 2\ 500 = 7\ 000\text{DA}$$

$$n^* = [(1000 \times 10) + (1\ 500 \times 26) + (2000 \times 42) + (2500 \times 55)]/7000 = 38{,}64$$

$$\text{soit } \mathbf{n^*} = \mathbf{39\ jours}$$

L'échéance moyenne est donc distante de la date d'équivalence de 39 jours, elle correspond à la date de 8 avril.

Exemple 2 :

Soient deux effets de commerce de 2 800 DA à 42 jours et de 1 420 DA à 63 jours. Le taux d'escompte est égal à 12%.

- Déterminer l'échéance moyenne.

Solution :

$$V_1 + V_2 - \frac{(V_1 + V_2) \times t \times n^*}{36\,000} = V_1 - \frac{V_1 \times t \times n_1}{36\,000} + V_2 - \frac{V_2 \times t \times n_2}{36\,000}$$

$$V_1 + V_2 - V_1 - V_2 + \frac{V_1 \times t \times n_1}{36\,000} + \frac{V_2 \times t \times n_2}{36\,000} = \frac{(V_1 + V_2) \times t \times n^*}{36\,000}$$

$$\Rightarrow \mathbf{n}^* = \frac{\mathbf{V_1 \times t \times n_1 + V_2 \times t \times n_2}}{\mathbf{(V_1 + V_2) \times t}} = \frac{\mathbf{V_1 \times n_1 + V_2 \times n_2}}{\mathbf{(V_1 + V_2)}}$$

D'après l'exemple, on a : valeur nominale totale = $2\,800 + 1\,420 = 4\,220$ DA.

$$4\,220 - \frac{4\,220 \times 12 \times n^*}{36\,000} = 2\,800 - \frac{2\,800 \times 12 \times 42}{36\,000} + 1\,420 - \frac{1\,420 \times 12 \times 63}{36\,000}$$

$$4\,220 - \frac{4\,220 \times 12 \times n^*}{36\,000} = 2\,800 - \frac{2\,800 \times 12 \times 42}{36\,000} + 1\,420 - \frac{1\,420 \times 12 \times 63}{36\,000}$$

$$4\,220 - 1{,}4066n = 2\,800 - 39{,}2 + 1\,420 - 29{,}82$$

$$1{,}4066n = 69{,}02 \Rightarrow n^* = \frac{69{,}02}{1{,}4066} = 49 \text{ jours.}$$

Remarque :

- La valeur de n* correspond à la distance en jours entre la date d'équivalence et l'échéance de l'effet unique. Cette distance est la moyenne arithmétique des distances en jours, entre la date d'équivalence et les échéances des effets remplacés, pondérées par leurs valeurs nominales.
- La valeur de n* est indépendante du taux d'escompte.

Conclusion

La date d'équivalence de deux effets, dans le cas où elle existe, est antérieure à la date d'échéance la plus proche. La date d'équivalence doit être postérieure aux dates à partir desquelles les deux effets ont été créés. En effet, deux effets ne peuvent être équivalents qu'à une seule date. Pour que l'équivalence fonctionne, il faut que le taux d'escompte demeure le même.

Chapitre 4 : Les intérêts composés (les opérations financières à long terme)

Introduction

Ce chapitre a pour objet de définir les intérêts composés. Nous allons pour ce faire procéder en trois étapes. Dans la première, nous tenterons de comprendre qu'est-ce que l'intérêt composé en soulignant ses caractéristiques ainsi que sa spécificité par rapport à l'intérêt simple. La seconde se sera réservée à la présentation de la méthode de calcul de l'escompte. Enfin, en dernier lieu, nous exposerons le problème d'équivalence des effets de commerce selon ce type d'intérêt.

1. Définition

Un capital est dit placé à intérêt composé, lorsque, à a fin de chaque période de placement, les intérêts produits sont ajoutés au capital pour former un nouveau capital qui produira à son tour Intérêt pendant la période suivante. Donc on parle d'une capitalisation des intérêts. Cette dernière opération est généralement appliquée lorsque la durée de placement dépasse un an.

La distinction fondamentale entre intérêts composés et intérêts simples réside dons dans la capitalisation. A la fin de chaque période, les intérêts acquis au cours de cette période ne sont pas exigibles par le bénéficiaire.

<u>**Exemple :**</u> Calcul des intérêts produits par un capital de 1 000 DA placé pendant 3 ans au taux de 5%.

	Capital placé à intérêts simples			**Capital placé à intérêts composés**		
Années	**Capital placé début de période**	**Intérêts produits**	**Capital à la fin de la période**	**Capital placé début de période**	**Intérêts produits**	**Capital à la fin de la période**
1	1000	50	1050	1000	50	1050
2	1000	50	1050	1050	52,50	1102,50
3	1000	50	1050	1102,50	55,125	1157,625
		150			157,625	

1.1. Valeur acquise par un capital placé pendant un nombre entier de périodes

Soit : $\mathbf{C_0}$ **:** Capital initial ;

i: Taux d'intérêt par période pour une durée d'un an ;

n: Nombre de périodes de placement ;

$\mathbf{C_n}$**:** Valeur acquise par le capital C_0 pendant n périodes.

Le tableau qui suit présente la méthode de calcul des intérêts et de valeur acquise à la fin de chaque période :

Périodes	Capital début de la période	L'intérêt de la période	Valeur acquise au terme de la période
1	C_0	$C_0.i$	$C_1 = C_0 + C_0.i = C_0(1+i)$
2	C_1	$C_1.i$	$C_2 = C_1 + C_1.i = C_1(1+i) = C_0(1+i)^2$
3	C_3	$C_3.i$	$C_3 = C_2 + C_2.i = C_2(1+i) = C_0(1+i)^3$
.	.		
.	.		
N	C_{n-1}	$C_{n-1}.i$	$C_n = C_{n-1} + C_{n-1}.i = C_{n-1}(1+i) = C_0(1+i)^n$

La valeur acquise par le capital C_0à la fin de n périodes au taux i est donc donnée par la formule suivante :

$$\mathbf{C_n = C_0(1+i)^n}$$

1.2. Valeur acquise par un capital placé pendant un nombre non entier de périodes

Dans la formule générale $\mathbf{C_n = C_0(1+i)^n}$, nous avons considéré **n** comme un **entier** de période.

Dans le pratique « n » peut être un nombre fractionnaire (par exemple : 4 ans et 3 mois, n = 4 + 3/12). Dans le cas où n est fractionnaire, il est envisagé deux solutions possibles[15] :

1- Utiliser la formule générale $C_n = C_0(1+i)^n$pour la partie entière, et utiliser les intérêts simples pour la partie fractionnaire. Cette solution est appelée solution rationnelle.

2- Utiliser la formule générale $C_n = C_0(1+i)^n$de la manière que si **n** était entier. C'est la solution commerciale.

[15] Marie boissonnade (2002), « mathématiques financières », 2ème édition Dunod, Paris.

1.2.1. La solution rationnelle

On pose $n = k + p/q$

Pour la partie entière de n, la valeur acquise est $\mathbf{C_k = C_0(1+i)^k}$ … … … … … … … **…………(1)**

$\mathbf{C_K \times i \times p/q = C_0(1+i)^K \times i \times p/q}$ … . . (2)

$C_n = C_0(1+i)^k + C_0(1+i)^K \times i \times p/q = C_0(1+i)^k \times [1 + (i \times p/q)]$ … … … … . . $(1+2)$

$$\mathbf{C_n = C_0(1+i)^k \times [1 + (i \times p/q)]}$$

Exemple :

Calculer en utilisant la solution rationnelle, la valeur acquise par capital de 10.000 DA placé à intérêts composés au taux de 6% pendant 8 ans et 5 mois.

La valeur acquise est :

$$C_{8+5/12} = 10\,000(1{,}06)^8 \times [1 + (0{,}06 \times 5/12)] = 16\,369{,}42 \text{ DA.}$$

1.2.2. La solution commerciale

Il s'agit d'étendre l'utilisation de la formule générale au cas où n est fractionnaire. C'est-à-dire, on considère que la totalité de la durée du placement s'effectue à intérêts composés.

$$\mathbf{C_n = C_0(1+i)^k(1+i)^{p/q}}$$

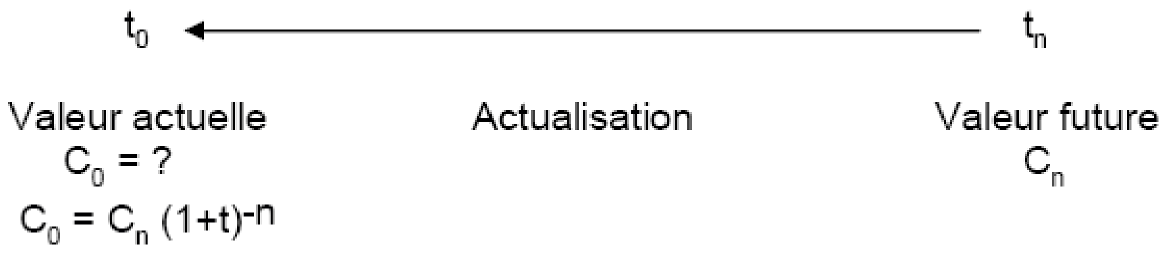
Exemple : Reprenons l'exemple précédent

$$C_{8+5/12} = 10\,000(1{,}06)^8(1{,}06)^{5/12} = 10\,000(1{,}593848)(1{,}02458) = 16\,330{,}18 \text{ DA}$$

1.3. Valeur actuelle d'un capital placé pendant un nombre entier de périodes

L'actualisation est l'opération **inverse** de la capitalisation. On appelle la valeur actuelle $\mathbf{C_0}$, le capital qu'il faut placer à la date 0 (aujourd'hui) pour obtenir $\mathbf{C_n}$à la date n.

$$\textbf{La valeur actuelle } \mathbf{C_0 = C_n(1+i)^{-n}}$$



Exemple :

Quelle est la valeur actuelle au taux de 10%, d'une somme de 80000 DA payable dans 14 ans.

$$C_0 = C_{12}(1+i)^{-14} = 80\,000\,(1{,}1)^{-14} = 80\,000(0{,}26333) \Rightarrow \mathbf{C_0 = 21\,066,50\ DA}$$

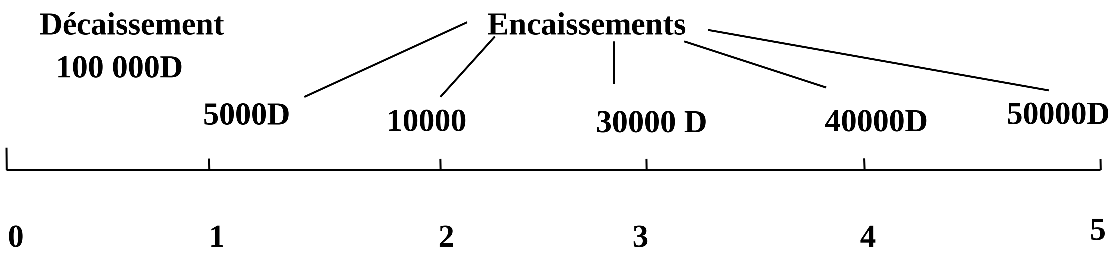
L'actualisation connaît une grande application dans le calcul de la rentabilité des investissements (le choix d'investissement). Généralement, un investissement est décidé à la suite d'une étude technico-économique faisant ressortir, face à la somme décaissée au moment de l'investissement, les flux monétaires que rapporte cet investissement dans le temps.

Exemple :

En 2015, le montant décaissé pour un investissement est 100000 DA. A la suite de l'activité, les flux monétaires récupérés sont :

Années	**2016**	**2017**	**2018**	**2019**	**2020**
Flux monétaires récupérés	5000	10000	30000	40000	50000

A la fin de la $5^{ème}$ année, il est supposé que l'investissement prenne une valeur nulle et qu'il n'y a pas plus de flux encaissé. Cet investissement est-t-il financièrement rentable au taux de 8% ?



L'actualisation permet d'additionner les flux encaissés chaque année et de comparer la somme obtenue au décaissement réalisé au moment d'investissement.

	Année 1	Année 2	Année 3	Année 4	Année 5
Valeur initiale	5000	10000	30000	40000	50000
Taux d'actualisation	$(1{,}09)^{-1}$	$(1{,}09)^{-2}$	$(1{,}09)^{-3}$	$(1{,}09)^{-4}$	$(1{,}09)^{-5}$
Valeur actualisée	4587,15	8416,79	15443,66	28337	32496,56
Somme actualisée cumulée	-	13003,94	280447,60	56784,60	89281,16

En effet, au taux d'actualisation de 9%, cette opération d'investissement n'est pas intéressante financièrement, puisqu'en contrepartie d'un décaissement initial de 100000, il n'est espéré de récupérer que 89281,16 DA.

1.4. Les taux équivalents

Généralement, les taux d'intérêts sont exprimés en taux annuels. Mais, on peut considérer une période plus courte (plus petite) que l'année, par exemple, le semestre, le trimestre le mois ou le jour.

Les intérêts peuvent être capitalisés chaque semestre, chaque trimestre, chaque mois ou chaque jour. Lorsque le taux d'intérêt est annuel et l'on considère une période inférieure à l'année, le taux d'intérêt prévalant pour cette période devra être calculé.

Un taux $\mathbf{i_K}$, correspond à une période $\mathbf{k}$ fois plus petite que l'année, est équivalent à un taux annuel i si, pour un même capital placé, la valeur acquise au terme des $K.n$ périodes est égale à celle obtenue au taux i à la fin de n années de placement.

Soit :

$\mathbf{C_0}$**:** Le capital initialement placé ;

i: Le taux d'intérêt annuel ;

$\mathbf{i_K}$: Le taux d'intérêt relatif à une subdivision périodique k fois plus petite que l'année avec :

$k = 2$(Si la subdivision est le semestre) ;

$k = 4$(Si la subdivision est le trimestre) ;

$k = 12$(Si la subdivision est le mois).

Ainsi :

$$C_n = C_0(1+i)^n = C_0(1+i_K)^{Kn}$$

$$(1+i)^n = (1+i_k)^{kn}$$

$$(1+i) = (1+i_k)^k$$

$$\longrightarrow \boldsymbol{i = (1+i_k)^k - 1}$$

$$\textbf{Le taux equivalent } (\mathbf{i_k}) = (\mathbf{1+i})^{\mathbf{1/k}} - \mathbf{1}$$

Exemple :

Calculer le taux mensuel ; trimestriel et semestriel équivalents au taux annuel de 5%.

- **Taux mensuel équivalent (k = 12) :**

$i_{12} = (1{,}05)^{1/12} - 1 = 0{,}004074, \text{soit } i_{12} = 0{,}407\ \%$

- **Taux trimestriel équivalent (k = 4)**

$i_4 = (1{,}05)^{1/4} - 1 = 0{,}02272, \text{soit } i_4 = 1{,}23\ \%$

- **Taux semestriel (k = 2)**

$i_2 = (1{,}05)^{1/2} - 1 = 0{,}024695, \text{soit } i_2 = 2{,}47\ \%$

2. Escompte à intérêts composés

L'escompte à intérêts composés s'applique aux effets dont l'échéance est supérieure à un an. Dans le cas des intérêts simples, l'escompte est obtenu par la différence entre les valeurs nominale et actuelle. Ce principe demeure valable dans le cas des intérêts composés, seul change le mode de calcul de la valeur actuelle.

Soit :

V : La valeur nominale de l'effet,

E : Le montant de l'escompte à intérêts composés,

a : La valeur actuelle de l'effet ;

i : Le taux de l'escompte,

n: La durée de l'escompte exprimée en année.

Par définition, l'escompte est la différence entre la valeur nominale de l'effet et la valeur actuelle à intérêts composés.

Escompte= Valeur nominale– Valeur actuelle

$$\mathbf{E = V - a}$$

On a:$a = V/(1+i)^{n} = V(1+i)^{-n}$

$$\Rightarrow \mathbf{Escompte\ (E) = V[1-(1+i)^{-n}]}$$

Exemple :

Déterminer, au taux de 6%, l'escompte et la valeur actuelle d'un billet à ordre payable dans 4ans et de valeur nominale égale à 500000 DA.

Valeur actuelle : $a = V(1+i)^{-n} = 500\,000\,(1+0{,}06)^{-4} \longrightarrow \mathbf{a = 396\,046{,}83\ DA.}$

$$E = V - a = 500\,000 - 396\,046{,}83 \longrightarrow \mathbf{E = 103\,953{,}17\ DA.}$$

3. Equivalence de capitaux à intérêts composés

Contrairement aux intérêts simples, l'équivalence à intérêts composés se vérifie quelle que soit la date à laquelle elle est établie. En effet, à intérêts composés, si l'équivalence au taux i a lieu à une date donnée, elle a lieu à n'importe quelle date.

3.1. Equivalence de deux capitaux

Deux capitaux évalués au même taux (i) sont équivalents si, à une date quelconque, leurs valeurs actuelles à intérêts composés sont égales[16].

Désignons par :

$\mathbf{V_1}$ **et** $\mathbf{V_2}$**:** Les valeurs nominales respectives des capitaux 1 et 2.

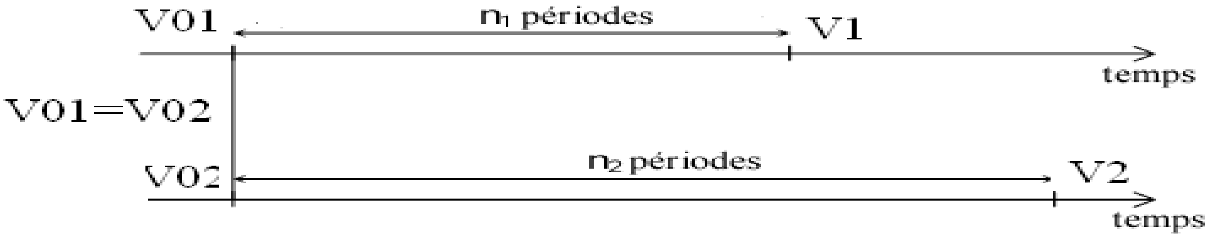
$\mathbf{n_1}$ **et** $\mathbf{n_2}$**:** Le nombre de périodes aux termes desquelles les deux capitaux sont payables ;

i: Le taux d'intérêt (taux d'évaluation),

Si l'équivalence s'établie à l'origine, **l'instant zéro**, l'égalité des valeurs actuelles s'écrit :

$$\mathbf{V_1(1+i)^{-n_1} = V_2(1+i)^{-n_2}}$$

[16] Boissonnade M. (2002), « mathématiques financières », 2ème édition Dunod, Paris.



Remarque :

Généralement, les problèmes d'équivalence portent sur la recherche des valeurs $\mathbf{V_1}$ou $\mathbf{V_2}$, $\mathbf{n_1}$ou$\mathbf{n_2}$.

Exemple 1 :

Un débiteur désire rembourser par anticipation dans trois ans, une dette de 50000 DA payable dans 6 ans. Déterminer la somme qu'il devra débourser au taux de 10%.

$$50\,000(1{,}1)^{-6} = \mathrm{V}_2(1{,}1)^{-3}$$

$$\mathrm{V}_2 = 50\,000\,(1{,}1)^{-6}/(1{,}1)^{-3} = 50\,000(1{,}1)^{-3} \Longrightarrow \mathbf{V_2 = 37\,565,74\ DA}$$

Exemple 2 :

Un débiteur décide de s'acquitter d'une dette de 20 000DA, payable dans 6 ans par un règlement de 16528,93 DA. Déterminer au taux de 10%, la date à laquelle doit être opéré ce paiement.

Solution :

$20\,000\,(1{,}1)^{-6} = 16\,528{,}93(1{,}1)^{-n_2}$
$-\mathrm{n}_2\log(1{,}1) = \log 20\,000 - 6\log(1{,}1) - \log 16\,528{,}93$
$\mathrm{n}_2 = [6\log(1{,}1) + \log 16\,528{,}93 - \log 20\,000]/\log(1{,}1) \Longrightarrow \mathbf{n_2 = 4\ ans}$

3.2. Equivalence d'un capital avec la somme de plusieurs autres

Un capital est équivalent à la somme de plusieurs autres si, à une date quelconque, la valeur actuelle de ce capital unique est égale à la somme des valeurs actuelles des autres capitaux.

Désignons :

V : La valeur nominale du capital unique ;

n: Le nombre de périodes au terme desquelles le capital unique est payé ;

$\mathbf{V_k}$**:** La valeur nominale de $K^{ième}$capital avec $\mathrm{k} = 1, \dots \dots \dots \dots \dots$ p

$\mathbf{n_k}$**:** Le nombre de périodes au terme desquelles le capital k est payé, avec $\mathrm{k} = 1, \dots \dots \dots \dots$ p

i : Le taux d'intérêt ;

L'équivalence à l'instant zéro entre le capital unique et la somme de plusieurs capitaux s'écrit :

$$\mathbf{V(1+i)^{-n} = \sum V_k(1+i)^{-n_k}\ (de\ k = 1\ jusqu'à p)}$$

Exemple :

Déterminer, au taux de 10%, la valeur nominale d'un paiement unique, échéant dans 7 ans, destiné à remplacer les dettes suivantes :

$V_1 = 1\ 000\ \text{DA}, n_1 = 2\ \text{ans}$

$V_2 = 2\ 000\ \text{DA}, n_2 = 4\ \text{ans}$

$V_3 = 3\ 000\ \text{DA}, n_3 = 6\ \text{ans}$

L'équivalence à l'instant zéro s'écrit :

$$V(1{,}1)^{-7} = 1\ 000\ (1{,}1)^{-2} + 2\ 000\ (1{,}1)^{-4} + 3\ 000\ (1{,}1)^{-6}$$

3.3. Cas particulier : L'échéance moyenne

Il s'agit de l'échéance du capital unique dont la valeur nominale est constituée par la somme de celles des capitaux remplacés. Par définition, la valeur nominale du capital unique est égale à : $V = \sum V_k$ (de $k = 1$ à p). L'équivalence à l'instant zéro s'écrit :

$$\mathbf{V(1+i)^{-n^*} = \sum V_k(1+i)^{-n_k} \Rightarrow (1+i)^{-n^*} = \sum V_k(1+i)^{-n_k}/V}$$

La valeur de n^* peut être obtenue à l'aide de l'expression du logarithme :

$$-n^*\log(1+i) = \log\sum V_k(1+i)^{-n_k} - \log V$$

$$\mathbf{\longrightarrow n^* = \left[\log V - \log\sum V_k(1+i)^{-n_k}\right]/\log(1+i)}$$

Exemple :

Calculer, au taux de 10%, l'échéance moyenne des capitaux suivants :

$V_1 = 1\ 000\ \text{DA}, n_1 = 2\ \text{ans},\qquad V_2 = 3\ 107\ \text{DA}, n_2 = 3\ \text{ans}$

$V_3 = 2\ 000\ \text{DA}, n_3 = 4\ \text{ans},\qquad V_4 = 3\ 000\ \text{DA}, n_4 = 6\ \text{ans}$

$V = \sum V_k\ (\text{ de } k = 1 \text{ à } 4) = 1\ 000 + 3\ 107 + 2\ 000 + 3\ 000 = 9\ 107\ \text{DA}$

$$(\mathbf{1+i})^{-\mathbf{n}^*} = [1\ 000(1{,}1)^{-2} + 3\ 107(1{,}1)^{-3} + 2\ 000(1{,}1)^{-4} + 3\ 000(1{,}1)^{-6}]/9\ 107$$

$$\Rightarrow 6\ 222{,}23/9\ 107 = 0{,}683016$$

$$n^* = (\log 9\,107 - \log 6\,222{,}23)/\log(1{,}1) = 3{,}999, \text{soit } \mathbf{n^* = 4\ ans}$$

La distance moyenne entre l'échéance (qui est la moyenne) et la date d'équivalence (l'instant zéro) est 4 ans.

3.4. Equivalence de deux groupes de capitaux

Le principe de l'équivalence est ici étendu au cas de deux groupes de capitaux. Le traitement de cet aspect ne présente pas de difficultés formelles majeures. Il semble donc plus indiqué de l'illustrer par un exemple, après avoir rappelé que les interrogations en l'espèce portent généralement sur la valeur nominale ou l'échéance de l'un des capitaux appartenant à l'un ou l'autre des deux groupes. L'exemple développé ci-après est fondé sur la recherche de la valeur nominale.

Exemple :

Un débiteur et son créancier s'entendent pour liquider les dettes suivantes :

$V_1 = 1\,000$ DA, $n_1 = 2$ ans, $V_2 = 3\,107$ DA, $n_2 = 3$ ans
$V_3 = 2\,000$ DA, $n_3 = 4$ ans, $V_4 = 3\,000$ DA, $n_4 = 6$ ans

Il est convenu que le débiteur procédera à un premier paiement de 5 000 DA dans 3 ans et soldera définitivement cet encours par un second paiement qui doit intervenir deux ans après le premier. Quel doit en être le montant si le taux appliqué est de 6%.

Solution :

$$5000(1{,}06)^{-3} + V_2(1{,}06)^{-5} = 1000(1{,}06)^{-2} + 3107(1{,}06)^{-3} + 2000(1{,}06)^{-4} + 3000(1{,}06)^{-6}$$

Ou pour faire l'économie des transformations, l'expression de l'équivalence à l'instant 5, moment auquel V_2 n'est ni capitalisé ni actualisé :

$$5000(1{,}06)^2 + V_2 = 1000(1{,}06)^3 + 3107(1{,}06)^2 + 2000(1{,}06) + 3000(1{,}06)^{-1}$$

$$\mathbf{V_2 = 4\,014{,}23\ DA}$$

Conclusion

Un capital produit des intérêts composés si, à la fin de chaque période, les intérêts générés sont ajoutés au capital pour produire de nouveaux intérêts. On dit que ces intérêts sont capitalisés. L'intérêt composé est un intérêt considéré comme un nouveau capital parce qu'il est payé périodiquement.

La formule $C_n = C_0(1+i)^n$ n'est applicable que si le taux d'intérêt i et la durée n sont homogènes, c'est à dire exprimés dans la même unité de temps que la période de capitalisation. Si par exemple, il est convenu entre le prêteur et l'emprunteur que les intérêts doivent être capitalisés à la fin de chaque mois, la formule ne sera applicable que si le taux d'intérêt est mensuel et que la durée de placement est exprimée en mois.

Chapitre 5 : Les annuités

Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'initier l'étudiant au calcul des différentes annuités qu'il sera amené à utiliser dans le remboursement de crédits. Mais avant cela, il nous semble nécessaire de présenter les différentes caractéristiques d'annuités et ces différents types.

1. Définitions et caractéristiques d'une annuité

On appelle annuités une suite de versements perçus ou réglés à intervalles de temps réguliers. Le terme « annuité » est habituellement réservé à des périodicités annuelles. Lorsque la période est différente de l'année, il est préférable de remplacer le terme « annuité » par « semestrialité », « trimestrialité » ou « mensualité ».

Les annuités peuvent être perçues ou versées en début de période ou en fin de période. Les versements effectués ont pour but [17]:

- Constituer un capital, il s'agit d'annuités de placement (versement en début de période) ou de capitalisation (versements en fin de période) ;
- Rembourser une dette, c'est le cas des annuités de remboursements ou d'amortissements.

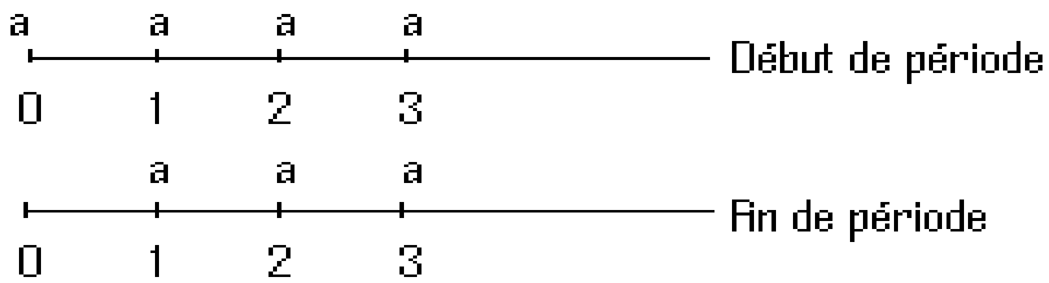
L'étude des annuités consiste à déterminer la valeur actuelle ou la valeur acquise, à une date donnée, d'une suite de flux. Elle prend en considération la date du premier flux, la périodicité des flux, le nombre des flux et le montant de chaque flux.

Lorsque les annuités sont égales, on parle d'annuités constantes, alors que lorsque leur montant varie d'une période à une autre, on parle d'annuités variables. Les annuités peuvent être certaines lorsque leur nombre est connu à l'avance, aléatoires ou viagères, lorsque leur nombre est inconnu au moment du contrat ou enfin perpétuelles lorsque leur nombre est illimité.

2. Les annuités constantes

La valeur acquise ou la valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes dépend de la date de versement c'est à dire début de période ou fin de période.

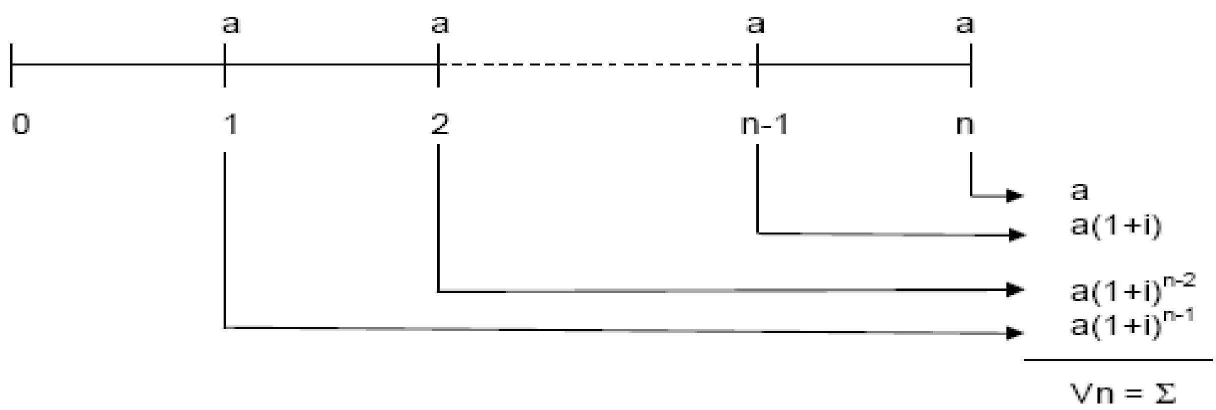
[17] Makhlouf F. (2017), « Mathématiques financières : cours et TD corrigés », Pages Bleues internationales, Alger.



2.1. La valeur acquise d'une suite d'annuités constantes de capitalisation

La valeur acquise d'une suite d'annuités constantes de fin de période désigne la somme des valeurs acquises par chacune de ces annuités, exprimée immédiatement après le versement de la dernière annuité.

Désignons par :
a: le montant constant de l'annuité ;
n : le nombre d'annuités (de périodes) ;
i: le taux d'intérêt ;
V_n : la valeur acquise par la suite d'annuités au terme de la dernière ;



On a alors :

$$V_n = a + a(1+i) + a(1+i)^2 + \cdots\cdots + a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1}$$
$$V_n = a[(1+i) + a(1+i)^2 + \cdots\cdots + a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1}]$$

Il s'agit d'une suite géométrique de premier terme 1, de raison géométrique $q = (1+i)$et comprenant n termes. La formule devient donc :

$$V_n = a[((1+i)^n - 1)/(1+i) - 1]$$

$$\mathbf{V_n = a[(1+i)^n - 1/i]}$$

Le terme $(1+i)^n - 1/i$est fourni par la table financière n°3.

De la formule précédente, on peut facilement déduire le montant de l'annuité en supposant que la valeur acquise $\boldsymbol{V_n}$est connue :

$$\boldsymbol{a = V_n \frac{i}{(1+i)^n - 1}}$$

Exemple 1 :

Une personne place 5 000 DA chaque année pendant 8 ans. Ces versements sont capitalisés au taux de 7%. Déterminer le capital constitué au terme du dernier versement.

Solution : on a comme données $a = 5\,000\text{DA}, n = 8\text{ans}, i = 7\%$

$$V_8 = 5\,000[(0{,}07)^8 - 1/0{,}07] = 51\,299{,}01 \text{ DA}$$

Exemple 2 :

Combien aurait-il fallu verser mensuellement pour obtenir un capital de 100 000 DA au terme des 8 années, au taux de 5,15 par an.

Solution :

- Calcul du taux mensuel équivalent à 5,15% annuel

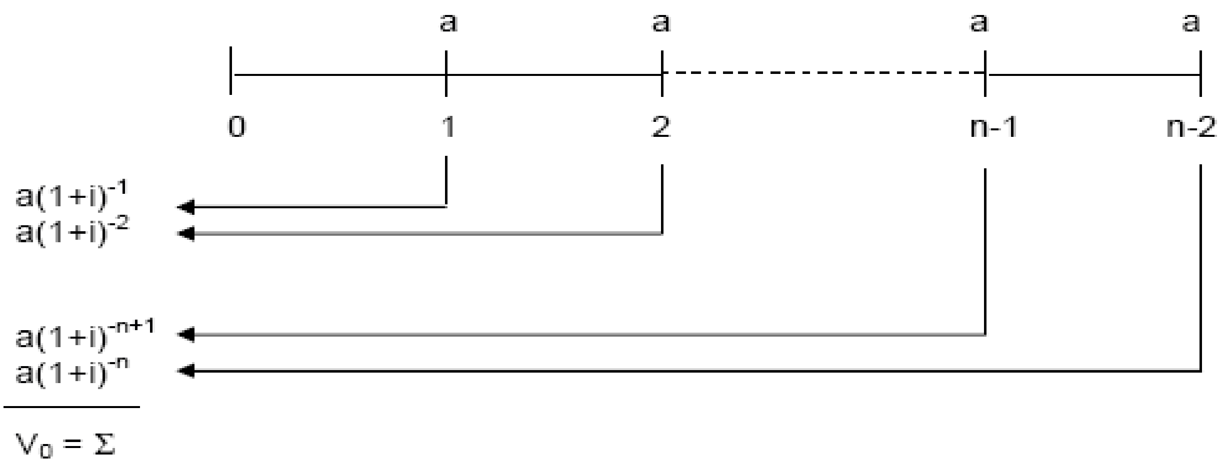
$$1 + t = 1{,}0515^{\frac{1}{12}} = 1{,}00419 \Rightarrow t = 0{,}419\%$$

- Calcul du nombre d'annuités

$$a = 100000 \frac{0{,}00419}{1{,}00419^{96} - 1} = 848{,}33 \text{ DA}$$

2.2. La valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes de capitalisation

La valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes de fin de période est la somme des annuités actualisées exprimée à la date origine (une période avant le premier versement).
Soit :
$\mathbf{V_0}$ **:** La valeur actuelle par la suite des annuités ;
a : L'annuité constante de fin de période ;
n : Le nombre de périodes (d'annuités) ;
i : Le taux d'intérêt par période de capitalisation.



Alors :

$$V_0 = a + a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + \cdots\cdots + a(1+i)^{-n+1} + a(1+i)^{-n}$$

On a donc une suite géométrique de premier terme $a(1+i)^{-1}$,de raison géométrique $q = (1+i)^{-1}$et comprenant n termes. La formule devient :

$$V_0 = a(1+i)^{-1}[(1+i)^{-n} - 1/(1+i)^{-1} - 1]$$

$$\mathbf{V_0 = a[1 - (1+i)^{-n}/i]}$$

Le terme $1 - (1+i)^{-n}/i$ est fourni par la table financière n°4.

Exemple 1 :

Le bénéficiaire d'une créance représentée par 10 annuités, égales chacune à 1 500DA, a besoin de trésorerie immédiate. Il escompte au taux de 12%. Quelle somme recevra-t-il en échange ?

Solution :

$V_0 = 1\,500[1 - (1{,}12)^{-12}/0{,}12] = \;\; 1\,500 \times 5{,}650223 = 8\,475{,}33$ DA.

Exemple 2 :

Comparer en utilisant un taux annuel de 10%, une suite de règlements de 20 annuités de chacune 10 000 DA versées aux dates 1,2,3, …20 et un règlement de 190 000DA effectué à la date.

- Première approche : comparaison à la date 0 :

(1) : $V_0 = a\frac{[1-(1+i)^{-n}]}{i} = 10\,000\frac{[1-(1{,}1)^{-20}]}{0{,}1} = 85\,135{,}64$ DA

(2) : $V_0 = \; 190\,000 \times 1{,}1^{-8} = 88\,636{,}40$ DA

- Deuxième approche : comparaison à la date 20 :

(1) : $V_n = a\frac{[(1+i)^n - 1]}{i} = 10\ 000\frac{[(1,1)^{20} - 1]}{0,1} = 572\ 750$ DA

De la date 8 jusqu'à la date 20, il y a 12 ans :

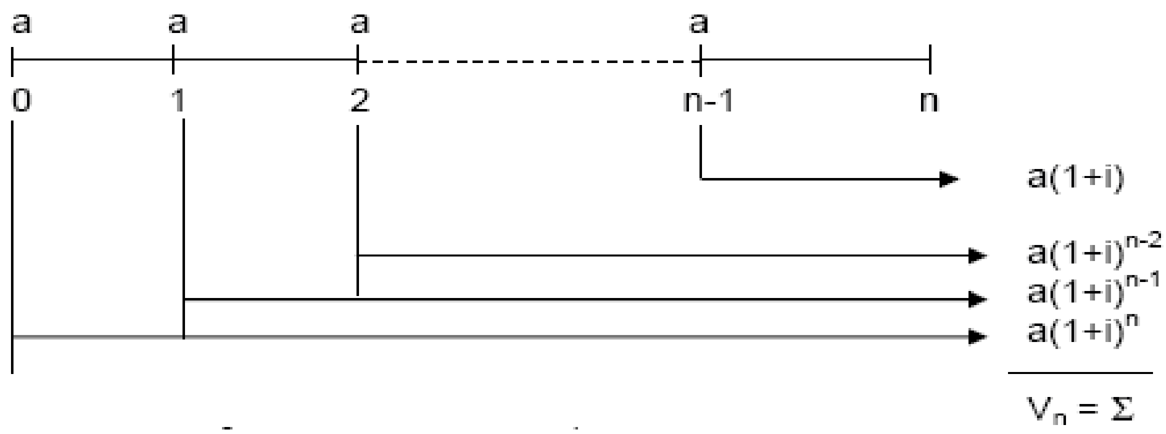
(2) : $V_0 = \ 190\ 000 \times 1{,}1^{12} = 596\ 301{,}40$ DA

Remarque :

Dans les deux cas, le premier versement est plus avantageux.

2.3. La valeur acquise d'une suite d'annuités constantes de placement

La valeur acquise par la suite d'annuités est égale à la somme des valeurs acquises par les versements successifs.



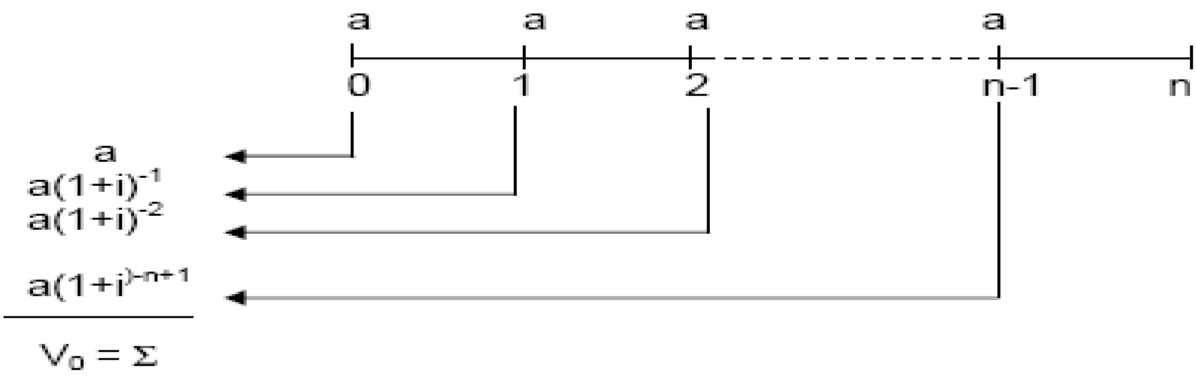
$V_n = a(1+i) + a(1+i)^2 + \cdots\cdots + a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^n$

On a donc une suite géométrique de premier terme $a(1+i)$, de raison géométrique $q = (1+i)$et comprenant n termes. La formule devient donc :

$$\mathbf{V_n = a(1+i)[(1+i)^n - 1/i]}$$

2.4. La valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes de placement

Pour actualiser une suite d'annuités constantes de fin de période, on s'est placé à l'époque zéro, c'est- à –dire au moment de la signature du contrat, c'est- à dire aussi, une période avant le premier versement. Pour actualiser les annuités de début de période, on se place à l'époque zéro, celle qui correspond au premier versement.



$V_0 = a + a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + \cdots\cdots +a(1+i)^{-n+1}$
On a donc une suite géométrique de premier terme a, de raison géométrique $q = (1+i)^{-1}$et comprenant n termes. La formule devient:

$V_0 = a[(1+i)^{-n} - 1/(1+i)^{-1} - 1]$

$$\mathbf{V_0 = a(1+i)[1-(1+i)^{-n}/i]}$$

Remarque :

On procède de la même manière qu'auparavant pour la durée et le taux d'intérêt.

3. Les annuités variables

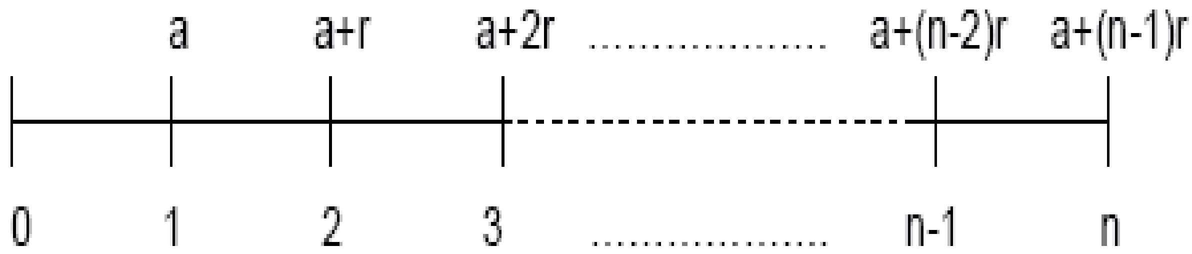
La variation de ces annuités est fondée sur une loi donnée. Il convient de distinguer deux types d'annuités variables [18]:

- Les annuités en progression arithmétique : quel que soit le terme de cette suite d'annuités, il s'obtient en ajoutant au précédent une valeur constante, notée r et appelée raison de la progression ;
- Les annuités en progression géométrique : chaque terme de cette suite s'obtient en multipliant le précédent par une valeur, notée q, qui constitue la raison de la progression.

3.1. La valeur acquise d'une suite d'annuité en progression arithmétique

La valeur acquise V_n au taux d'intérêt i d'une suite de n annuités de fin de période en progression arithmétique désigne la somme des valeurs acquises par chacune de ces annuités, déterminée immédiatement après le versement de la dernière.

[18] Makhlouf F. (2017), « Mathématiques financières : cours et TD corrigés », Pages Bleues internationales, Alger.



$$V_n = a(1+i)^{n-1} + (a+r)(1+i)^{n-2} + (a+2r)(1+i)^{n-3} + \cdots + (a(n-2)r)(1+i) + (a+(n-1)r)$$

V_n= a $[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + \ldots + (1+i) + 1] + r[(1+i)^{n-2} + 2(1+i)^{n-3} + \ldots + (n-2)(1+i) + (n-1)]$

La première partie du membre à droite représente la somme de n termes en progression géométrique de raison (1+i), de premier terme : 1. Si l'on désigne la somme des termes en r par S, V_n devient :

$$V_n = a\,[(1+i)^n - 1/i] + r.S \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(1)$$

Avec $S = (1+i)^{n-2} + 2(1+i)^{n-3} + \cdots + (n-2)(1+i) + (n-1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

Multiplions les deux membres de cette égalité par (1+i), on aura :

$$S(1+i) = (1+i)^{n-1} + 2(1+i)^{n-2} + \cdots + (n-2)(1+i)^2 + (n-1)(1+i) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

La différence, membre à membre et terme à terme de même ordre, entre les égalités (2) et (3) s'écrit de la manière suivante :

$$S(1+i) - S = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + (1+i)^2 + (1+i) - (n-1)$$

$$Si = \underline{(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + (1+i)^2 + (1+i)} - n$$

Les termes de la somme délimitée par la ligne forment une progression géométrique de n termes, de raison : (1+i), de premier terme : 1.

$$S_i = [(1+i)^n - 1/i] - n \implies S = 1/i[((1+i)^n - 1/i) - n]$$

Dans l'égalité (1), transposons à présent la valeur de S, on obtient :

$$V_n = a[(1+i)^n - 1/i] + r/i\,[((1+i)^n - 1/i) - n]$$

$$\mathbf{V_n = [(1+i)^n - 1/i][a + (r/i) - (nr/i)]}$$

Exemple 1 :

Calculer la valeur acquise d'une suite d'annuités de fin de période, en progression arithmétique dont les caractéristiques sont les suivantes : a = 1 000 DA, n = 5ans, i = 5%, r = 100 DA.

Solution :

$$\mathbf{V_n = \left(a + \frac{r}{i}\right)\frac{(1+i)^n - 1}{i} - \frac{nr}{i}}$$

D'où

$$V_5 = \left(1\,000 + \frac{100}{0{,}05}\right)\frac{(1+0{,}05)^5 - 1}{0{,}05} - \frac{5 \times 100}{0{,}05}$$

$$V_5 = 3\,000(5{,}5256312) - 10\,000 = 16\,576{,}8936 - 10\,000$$

$$\mathbf{V_5 = 6\,576{,}894\ DA}$$

3.2. La valeur actuelle d'une suite d'annuité en progression arithmétique

La valeur actuelle V_0 au taux d'intérêt i d'une suite de n annuités de fin de période en progression arithmétique désigne la somme des valeurs actuelles de chacune des annuités, exprimée une période avant le premier versement[19].

La valeur actuelle résulte de l'actualisation de la valeur acquise :

$$V_0 = V_n(1+i)^{-n}$$

Remplaçons par V_n par l'expression établie précédemment :

$$V_0 = \big[[(1+i)^n - 1/i][a + (r/i)] - (nr/i)\big](1+i)^{-n}$$

$$V_0 = [1 - (1+i)^{-n}/i\,[a + r/i] - (nr/i)(1+i)^{-n}]$$

Ajoutons et retranchons nr/i, il vient :

$$V_0 = [1 - (1+i)^{-n}/i\,[a + r/i] - (nr/i)(1+i)^{-n} + (nr/i) - (nr/i)]$$

$$V_0 = [1 - (1+i)^{-n}/i\,[a + (r/i)] + nr[1 - (1+i)^{-n}/i] - (nr/i)]$$

$$\mathbf{V_0 = [1 - (1+i)^{-n}/i\,[a + (r/i) + nr] - (nr/i)]}$$

[19] Makhlouf F. (2017), « Mathématiques financières : cours et TD corrigés », Pages Bleues internationales, Alger.

Exemple :

Calculer les valeurs acquise et actuelle d'une suite d'annuités dont les caractéristiques sont les suivantes :

$$a = 12\ 000 \text{ DA}, \quad r = 1200, \qquad i = 0{,}08, \qquad n = 10 \text{ ans}$$

Solution :

$$V_{10} = (1{,}08)^{10} - 1/0{,}08[12\ 000 + (1200/0{,}08)] - (10 \times 1200/0{,}08) = 241\ 137{,}19 \text{ DA}$$

$$V_0 = V_n(1+i)^{-n} = 241\ 137{,}19(1{,}08)^{-10} = 111\ 693{,}13 \text{ DA}$$

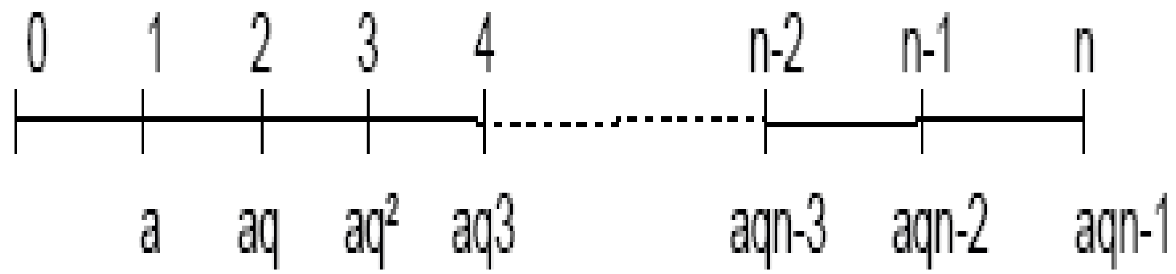
Ou bien :

$$V_0 = 1 - (1{,}08)^{-10}/0{,}08\,[12000 + (1200/0{,}08) + (10 \times 1200)] - (10 \times 1200/0{,}08)$$

$$V_0 = 111\ 683{,}13 \text{ DA.}$$

3.3. La valeur acquise d'une suite d'annuité en progression géométrique

La valeur acquise d'une suite d'annuités de fin de période en progression géométrique désigne la somme des valeurs acquises de chacune de ces anuités, déterminées immédiatement après le versement de la dernière.



Les termes de cette somme sont donc les suivants :

$$V_n = a(1+i)^{n-1} + aq(1+i)^{n-2} + aq^2(1+i)^{n-3} + \cdots + aq^{n-2}(1+i) + aq^{n-1}$$

Les termes du membre de droite forment une progression géométrique dont $a(1+i)^{n-1}$ est le premier terme, n est le nombre de termes, q/(1+i) est la raison.

La somme de ces termes s'obtient directement par :

$$V_n = a\left[(1+i)^{n-1}\frac{\left(\frac{q}{1+i}\right)^n - 1}{\left(\frac{q}{1+i}\right)^n - 1}\right] \Rightarrow$$

$$V_n = a\left[(1+i)^{n-1}\frac{\frac{q^n-(1+i)^n}{(1+i)^n}}{\frac{q-(1+i)}{1+i}}\right]$$

$$V_n = a\left[(1+i)^{n-1}\frac{q^n-(1+i)^n}{q-(1+i)}\times\frac{1+i}{(1+i)^n}\right]$$

$$V_n = a\left[\frac{q^n-(1+i)^n}{q-(1+i)}\times\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n}\right]$$

$$\mathbf{V_n = a\left[\frac{q^n-(1+i)^n}{q-(1+i)}\right]}$$

3.4. La valeur actuelle d'une suite d'annuité en progression géométrique

On a : $V_0 = V_n(1+i)^{-n}$

Alors :

$$\mathbf{V_0 = \frac{a}{(1+i)^n}\times\left[\frac{q^n-(1+i)^n}{q-(1+i)}\right]}$$

Remarque :

Ces formules permettent de calculer les valeurs acquise et actuelle par une suite d'annuités dont les termes sont en progression géométrique et si la raison q est différente de (1+i). Dans le cas où q= 1+i, les formules deviennent ainsi :

La valeur acquise : $V_n = n_a(1+i)^{n-1}$

La valeur actuelle : $V_0 = n_a(1+i)^{-1} = n_a/(1+i) = n_a/q$

Exemple :

Une suite de 10 annuités progresse au rythme de 5% et dont le premier versement est égal à 6 000 DA. Sachant que le taux est de 8%.

- Déterminer les valeurs acquises et actuelle
- Même question avec un taux de croissance de 8%.

Solution :

- **Le calcul de la valeur acquise :**

On comme données : le taux de croissance de 5%, donc q= 1,05

$V_{10} = 6000[((1{,}05)^{10} - (1{,}08)^{10})/(0{,}05 - 0{,}08)] = 106\,006{,}07$ DA.

- **Détermination de la valeur actuelle :**

$V_0 = (6000/(1{,}08)^{10})[((1{,}05)^{10} - (1{,}08)^{10})/(0{,}05 - 0{,}08)] = 49\,101{,}32$ DA
Ou bien $V_0 = 106\,006{,}07(1{,}08)^{-10} = 49\,101{,}32$ DA.

Avec un taux de croissance de 8%, donc q = i+1=1,08.

- **Le calcul de la valeur acquise :**

$V_{10} = (10)(6000)(1{,}08)^{10-1} = 119\,940{,}28$ DA.

- **Détermination de la valeur actuelle :**

$V_0 = (10)(6000)(1{,}08)^{-1} = 55\,555{,}56$ DA.

Conclusion

L'annuité reflète la notion de périodicité de régularité. En effet la dette restant à rembourser représente la valeur actuelle des paiements non encore effectué. La valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes de début de période est la somme des valeurs actuelles des annuités exprimées une période avant le versement de la première annuité.

Chapitre 6 : Emprunts et Amortissements

Introduction

Dans la littérature, il existe deux grandes familles d'emprunts à savoir les emprunts indivis et les emprunts obligataires. L'emprunt indivis, ou ordinaire est celui qui est contracté auprès d'un seul emprunteur : banque, établissement financier, etc. L'emprunt obligataire comporte, lui plusieurs prêteurs dénommés les obligataires.

1. Les emprunts indivis

Il sera question de définir d'abord l'emprunt indivis puis de cerner les principales propriétés et caractéristiques de ce type d'emprunt.

1.1.Définition

Un emprunt indivis est un emprunt ordinaire faisant l'objet d'un contrat entre un prêteur et un emprunteur. Il n'y a qu'un seul prêteur, il est donc indivisible, d'où le qualificatif indivis. Le remboursement de cet emprunt s'effectue généralement, par annuités de fin de période. Chaque annuité est composée de deux éléments [20]:

- Un remboursement d'une partie du capital emprunté, appelé l' **« amortissement »** ;
- Une partie **« intérêt »** calculée sur la base du taux d'intérêt convenu entre les deux parties et du capital restant dû dépendant.

1.2.Emprunt avec amortissement et annuités variables

Le tableau d'amortissement d'un emprunt indivis de 500 000 DA, remboursé en 5 ans par des annuités variables à taux annuel de 8%, se présente de la manière suivante :

Années	Capital restant à amortir au début de l'année (dette)	Intérêts payés à la fin de la période	Amortissements	Montant total de l'annuité à verser en fin d'année
1	(V_0) 500000	(I_1) 40 000	(M_1) 100 000	(a_1) 140 000
2	(V_1) 400 000	(I_2) 32 000	(M_2) 110 000	(a_2) 142 000
3	(V_2) 290 000	(I_3) 23 200	(M_3) 140 000	(a_3) 163 200
4	(V_3)150 000	(I_4)12 000	(M_4)90 000	(a_4)102 000
5	(V_4) 60 000	(I_5) 4800	(M_5)60 000	(a_5)64800
		112 000	500 000	612 000

[20] Makhlouf F. (2017), « Mathématiques financières : cours et TD corrigés », Pages Bleues internationales, Alger.

Remarques :

1. L'annuité versée à la fin de chaque période par l'emprunteur à son prêteur comprend l'intérêt du capital non remboursé et l'amortissement d'une partie de ce capital :

$$\mathbf{a_k = M_k + I_K}$$

2. Le total des amortissements est égal au montant du capital emprunté :

$$\mathbf{V_0 = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \sum_{K=1}^{n} M_n}$$

3. Le montant de la dernière annuité est égal au dernier amortissement augmenté de son propre intérêt :

$$\mathbf{a_n = M_n + I_n = M_n + M_n \times i = M_n(1 + i)}$$

Cette formule ne fonctionne qu'avec le dernier amortissement, car il est égal au capital restant dû.

- **Calcul de l'intérêt**

$I_n = v_{N-1}i$

$I_1 = V_0 i = 500\,000 \times 0{,}08 = 40\,000$ DA.

$I_2 = V_1 i = 400\,000 \times 0{,}08 = 32\,000$ DA.

$I_3 = V_2 i = 290\,000 \times 0{,}08 = 32\,200$ DA.

$I_4 = V_3 i = 150\,000 \times 0{,}08 = 12\,000$ DA

$I_5 = V_4 i = 60\,000 \times 0{,}08 = 4\,800$ DA.

- **Calcul de l'annuité**

$a_n = M_n + I_n = M_n + V_{n-1}i$
$a_1 = M_1 + I_1 = M_1 + V_0 i = 100\,000 + 40\,000 = 140\,000$DA.
$a_2 = M_2 + I_2 = M_2 + V_1 i = 110\,000 + 32\,000 = 142\,000$DA.
$a_3 = M_3 + I_3 = M_3 + V_2 i = 140\,000 + 23\,200 = 163\,200$DA.
$a_4 = M_4 + I_4 = M_4 + V_3 i = 90\,000 + 12\,000 = 102\,000$DA.

$a_5 = M_5 + I_5 = M_5 + V_4 i = 60\,000 + 4\,800 = 64\,800DA.$

- **Calcul des amortissements**

$a_1 = M_1 + I_1 = M_1 + M_0 \times i \Longrightarrow M_1 = a_1 - V_0 i$ ou$M_1 = V_0 - V_1$

$a_2 = M_2 + I_2 = M_2 + M_1 \times i \Longrightarrow M_2 = a_2 - V_1 i$ ou $M_2 = V_1 - V_2$

$M_n = a_n - V_{n-1} i$ ou $M_n = V_{n-1} - V_n$

$M_1 = 140\,000 - 500\,000 \times 0{,}08 = 100\,000$ DA

ou $M_1 = 500\,000 - 400\,000 = 100\,000$ DA

- **Calcul de l'emprunt**

$a_1 = V_0 i + M_1 \Longrightarrow a_1 - V_0 i\ (1)$

On a : $M_1 = V_0 - V_1 \Rightarrow V_1 = V_0 - M_1 (2)$

On remplaceM_1par son égalité de (1) :

$V_1 = V_0 - M_1 \Rightarrow V_1 = V_0 - (a_1 - V_0 i) = V_0(1+i) - a_1$

$a_2 = V_1 i + M_2 \Rightarrow (2): M_2 = a_2 - V_1 i\ (3)$

Puisque $M_2 = V_1 - V_2 \Longrightarrow V_2 = V_1 - M_2\ (4)$

On remplace M_2 par son égalité de (3) :

$\Longrightarrow V_2 = V_1 - (a_2 - V_1 i) = V_1(1+i) - a_2$

$V_n = V_{n-1}(1+i) - a_n$

Donc, d'une manière générale : $V_0 = (1+i)^n \left[\frac{a_1(1+i)^{-1} + a_2(1+i)^{-2} - \cdots - a_n(1+i)^{-n}}{(1+i)^n}\right]$

$$\mathbf{V_0 = a_1(1+i)^{-1} + a_2(1+i)^{-2} - \cdots - a_n(1+i)^{-n}}$$

$$V_0 = 140000 \times 1{,}08^{-1} + 142000 \times 1{,}08^{-2} + 163200 \times 1{,}08^{-1} + 102000 \times 1{,}08^{-1} + 64\,800 \times 1{,}08^{-1} = 500\,000 \text{ DA}$$

Remarque :

Le capital emprunté est égal à la somme des valeurs actuelles des annuités.

- **Calcul du capital remboursé ou dette acquittée**

$R_1 = M_1 = 100\,000$ DA

$R_2 = M_1 + M_2 = 100\,000 + 110\,000 = 210\,000DA$

$R_3 = M_1 + M_2 + M_3 = 100\,000 + 110\,000 + 140\,000 = 350\,000DA$

$R_4 = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = 100\,000 + 110\,000 + 140\,000 + 90\,000 = 440\,000DA$

$$\mathrm{R}_5 = \mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2 + \mathrm{M}_3 + \mathrm{M}_4 + \mathrm{M}_5 = 100000 + 110000 + 140000 + 90000 + 60000$$
$$= 500\ 000\mathrm{DA} = \mathrm{V}_0$$

D'une manière générale :

$$\mathbf{R_n = M_k + M_{k+1} + \cdots + M_2 + M_n}$$

- **Calcul du capital restant dû ou dette à acquitter**

$V_0 = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5$

$V_0 = 100000 + 110000 + 140000 + 90000 + 60000 = 500\,000$DA.

$V_1 = M_2 + M_3 + M_4 + M_5 = 110\,000 + 140\,000 + 90\,000 + 60000 = 400\,000$DA.

$V_2 = M_3 + M_4 + M_5 = 140\,000 + 90\,000 + 60000 = 290\,000$DA.

$V_3 = M_4 + M_5 = 90\,000 + 60000 = 150\,000$DA.

$V_4 = M_5 = 60\,000$ DA.

$$\mathbf{V_1 = \sum_{k=2}^{n} M_n \Rightarrow V_{n-1} = M_n}$$

1.3. Emprunt avec amortissements variables et annuités constantes

A l'aide d'annuités constantes, on emprunte une somme de 1 000 000 DA, en 4 ans, au taux annuel de 6%. Le tableau d'amortissement se présente comme suit :

Années	Capital restant dû en début de l'année	Intérêt payé à la fin de l'année	Amortissements	Annuité à verser en fin d'année
1	(V_0) 1000000,00	(I_1) 60 000,00	(M_1) 228591,50	(a_1) 288 591,50
2	(V_1)771408,50	(I_2)46284,50	(M_2)242307,00	(a_2)288 591,50
3	(V_2) 529101,50	(I_3) 31746,10	(M_3) 256845,40	(a_3) 288 591,50
4	(V_3)272256,10	(I_4) 16 335,40	(M_4) 272256,10	(a_4)288 591,50
			1000 000,00	1 154 366,00

- **Calcul de l'intérêt**

$I_1 = V_0 i = 1\,000\,0000 \times 0{,}06 = 60\,000$DA

$I_2 = V_1 i = 771\,408{,}50 \times 0{,}06 = 46\,284{,}50$DA

$I_3 = V_2 i = 529\,101{,}50 \times 0{,}06 = 31\,746{,}10$ DA

$I_4 = V_3 i = 272\,256{,}10 \times 0{,}06 = 16\,335{,}40$ DA

$$\mathbf{I_n = V_{n-1} i}$$

Cette formule ne fonctionne qu'avecle dernier amortissement, car il est égal au capital retant dû.

- **Calcul de l'annuité**

On a : le capital emprunté est égal à la somme des valeurs actuelles des annuités. Les annuités sont constantes : $V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

A partir de la formule précédente : $a = \frac{V_0 i}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{1000000 \times 0{,}06}{1-1{,}06^{-4}} = 288\,591{,}50 \text{ DA}$

- **Calcul des amortissements**

$(1): a_1 = M_1 + I_1 = M_1 + V_0 i$

$(2): a_2 = M_2 + I_2 = M_2 + V_1 i$

$a_1 = a_2 \Leftrightarrow M_1 + V_0 i = M_2 + V_1 i$

$\Rightarrow (3): M_2 = M_1 + V_0 i - V_1 i$

On sait que : $V_0 = V_1 + M_1$ car $V_0 - V_1 = M_1$

On remplace V_0 dans (3), on obtient :

$\Rightarrow M_2 = M_1 + (V_1 + M_i)i - V_1 i = M_1 + V_1 i + M_1 i - V_1 i = M_i + Mi = M_1(1 + i)$

$$\mathbf{M_k = M_{k-1}(1 + i)}$$

On a, d'après ce résultat : $M_2 = M_1(1 + i)$

$M_3 = M_2(1 + i) = M_1(1 + i)^2$

$M_4 = M_3(1 + i) = M_1(1 + i)^3$

$M_n = M_1(1 + i)^{n-1}$

$M_3 = 228\,591{,}50(1{,}06)^{3-1} = 256\,845{,}40$ DA.

- **Calcul de l'emprunt et du premier amortissement**

$V_0 = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = M_1 + M_1(1 + i) + M_1(1 + i)^2 + M_1(1 + i)^3$

$V_0 = M_1[1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + (1 + i)^3]$

C'est une suite géométrique : $\Rightarrow V_0 = M_1\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \qquad \Rightarrow M_1 = \frac{V_0 i}{(1+i)^n - 1}$

$V_0 = 228591{,}50\left[\frac{(1{,}06)^4 - 1}{0{,}06}\right] = 1\,000\,000 \text{ DA}$ et $M_1 = \frac{1000000 \times 0{,}06}{1{,}06^4 - 1} = 228\,591{,}50 \text{ DA}$

- **Calcul du capital remboursé**

A la fin de chaque période :

$$R_3 = M_1 + M_2 + M_3 = M_1 + M_1(1+i) + M_1(1+i)^2 + M_1(1+i)^3$$

C'est une suite géométrique $\Longrightarrow$ à la fin de chaque période quelconque :

$R_3 = M_1\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right] \quad \Rightarrow \quad R_3 = 228591{,}50\left[\frac{1{,}06^3-1}{0{,}06}\right] = 727743{,}80 \text{ DA}$

1.4. Cas particulier

Au deux emprunts précédents (emprunt avec amortissements et annuités variables, annuités avec amortissements variables et annuités constantes) on ajoute un cas particulier. Ce dernier est représenté à travers un emprunt avec amortissement constant et annuités variables, emprunts avec annuités constantes et intérêts payables d'avance et emprunt remboursable en seule fois.

1.4.1. Emprunt avec amortissement constants et annuités variables

On emprunte 1 000 000 DA, en 4 ans, au taux annuel de 6%, à l'aide d'annuités comportant un amortissement constant. Le tableau d'amortissement se présente comme suit :

Années	Capital restant dû	Intérêts	Amortissements	Annuités
1	1 000 000	60 000	250 000	310 000
2	750 000	45 000	250 000	295 000
3	500 000	30 000	250 000	280 000
4	250 000	15 000	250 000	265 000
		150 000	1 000 0000	1 150 000

Remarque : L'annuité et l'intérêt sont en progression arithmétique décroissante :
$(r = -15\ 000): r = \frac{V_0 i}{n}$

- **Calcul des amortissements**

$M_1 = M_2 = M_3 = M_4$ comme $V_0 = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = Nm$

$M = \frac{V_0}{n} \qquad M = \frac{1000000}{4} = 250\ 000 \text{ DA}$

- **Calcul des intérêts** $I_1 = V_0 i$ et $I_2 = V_1 i$ d'une manière générale : $I_k = V_{k-1} i$

$I_2 = V_{2-1} i = 750\ 000 \times 0{,}06 = 45\ 000 \text{ DA}$

- **Calcul du capital restant dû**

$V_0 = V_1 + M_1 \Longrightarrow V_1 = V_0 - M_1$, $V_1 = V_2 + M_2 \Longrightarrow V_2 = V_1 - M_2$

$$\mathbf{V_k = V_{k-1} - M_K}$$

$V_3 = V_{3-1} - M_3 = 750\,000 - 250\,000 = 500\,000$ DA

- **Calcul de l'annuité**

$a_1 = M_1 + I_1 = M_1 + V_0 i$ et $a_2 = M_2 + I_2 = M_2 + V_1 i$

$$\mathbf{a_k = M_k + I_k = M_k + V_{k-1} i}$$

$a_3 = M_3 + I_3 = 250\,000 + 30\,000 = 280\,000$ DA

$a_3 = M_3 + V_{3-1} i = 250\,000 + 500\,000 \times 0{,}06 = 280\,000$ DA

- **Calcul du capital rembours**

$R_1 = M_1$ et $R_2 = M_1 + M_2$

$$\mathbf{R_n = \sum_{k=1}^{n} M_n}$$

$R_3 = M_1 + M_2 + M_3 = 250\,000 + 250\,000 + 250\,000 = 750\,000$ DA

1.4.2. Emprunt avec annuités constantes et intérêts payables d'avance

Le tableau d'amortissement d'un emprunt de 1 000 000 DA, remboursable en 4 ans, par annuités constantes et les intérêts (6%) payables d'avance se présente ainsi :

Années	Capital restant dû	Amortissements	Capital base des intérêts	Intérêts	Annuités
0	10000000,00	/	(V_0) 1 000 000,00	(I_1) 60 000,00	/
1	1 000 000,00	(M_1) 227 296,70	(V_1)772307,30	(I_2)46 362,200	(a_1) 273 658,90
2	772 703,30	(M_2) 241 805,00	(V_2) 503 898,30	(I_3) 31853,90	(a_2) 273 658,90
3	530 898,60	(M_3) 257 239,40	(V_3) 273 658,90	(I_4) 16 419,50	(a_3) 273 658,90
4	273 658,90	(M_4) 273 658,90	/	/	(a_4) 273 658,90

- **Calcul du taux réel de placement**

$V_0 t = V_0 i$ avec $V_0 = V_0 - V_0 i \Rightarrow (V_0 - V_0 i)t = V_0 i \Longrightarrow t = \frac{V_0 i}{V_0 - V_0 i} = \frac{V_0 i}{V_0(1-i)}$

$$\textbf{Taux réel de placement } (\mathbf{t}) = \frac{\mathbf{i}}{\mathbf{1 - i}}$$

$$t = \frac{0{,}06}{1 - 0{,}06} = 0{,}063829787 \text{ soit } 6{,}38\%$$

- **Calcul des annuités** $V_0 - V_0 i = a\left[\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\right]$

$$\mathbf{a} = \frac{(\mathbf{V_0 - V_0 i})\mathbf{t}}{\mathbf{1 - (1 + t)^{-n}}}$$

$$a = \frac{940\ 000 \times 0{,}063829787}{1 - 1{,}063829787^{-4}} = 273\ 658{,}90 \text{ DA}$$

- **Calcul des amortissements**

$V_0 = M_1\left[\frac{(1+t)^n - 1}{t}\right] \Longrightarrow \frac{V_0 t}{(1+t)^n - 1} \Rightarrow M_1 = \frac{1000000 \times 0{,}063829787}{1{,}063829787^{-4} - 1} = 227\ 296{,}70$ DA

(1): $a_1 = M_1 + V_1 i$

(2): $a_2 = M_2 + V_2 i$

(3): $a_1 = a_2 \Longleftrightarrow M_1 + V_1 i = M_2 + V_2 i$

$V_1 - V_2 = M_2 \Longrightarrow V_1 - M_2 = V_2$

On remplace V_2 dans l'égalité (3) :$M_1 + V_1 i = M_2 + (V_1 - M_2)i$

$M_1 = M_2 + V_1 i - M_2 i - V_1 i = M_2 - M_2 i = M_2(1 - i)$

$$\mathbf{M_k = M_{k+1}(1 - i)}$$

$M_2 = M_{2+1}(1 - i) = 257\ 239{,}40 \times (1 - 0{,}06) = 241\ 805$ DA

- Calcul du capital remboursé $\mathbf{R_n = \sum_{k=1}^{n} M_n}$

$R_3 = M_1 + M_2 + M_3 = 227\ 296{,}70 + 241\ 805 + 257\ 239{,}40 = 726\ 341{,}10$ DA

- Calcul du capital restant dû

$V_k = M_{k+1} + M_{k+2} + \cdots + M_n$ ou $V_k = V_{k-1} - M_k$

$V_2 = M_3 + M_4 = 257\ 239{,}40 + 273\ 658{,}90 = 530\ 898{,}30$ DA

1.4.3. Emprunt remboursable une seule fois

A la fin de chaque période, l'emprunteur ne paie que l'intérêt du capital emprunté ($V_0 i$). Il rembourse, en seule fois, l'intégralité du capital emprunté.

2. Les emprunts obligataires

Le raisonnement sur les obligations a des similitudes avec les emprunts indivis.

2.1. Définition

Lorsque le montant de l'emprunt est très élevé, l'emprunteur est obligé de s'adresser à plusieurs prêteurs appelés « obligataires » ou « souscripteurs ». En effet, le montant de l'emprunt est divisé en parts égales négociables appelées obligations. Chaque institution intéressée de participer à l'emprunt, en acquiert une certaine quantité. Ainsi, les collectivités publiques, de même que les entreprises publiques peuvent réaliser leur emprunt, en mettant des obligations, contre capitaux.

2.2. Les caractéristiques d'une obligation

Les principales caractéristiques des obligations sont les suivantes [21]:

- **La valeur nominale :** C'est la valeur faciale de l'obligation. Elle est unique pour toutes les obligations d'un même emprunt. Elle constitue le montant à partir duquel est établi le tableau d'amortissement et la base de calcul des intérêts.

- **La valeur d'émission :** C'est la somme effectivement payée par l'obligataire pour l'achat d'une obligation. Ce prix peut être différent du nominal. Lorsqu'il est égal au nominal, on dit que l'obligation est émise « au pair », s'il en est inférieur, on dit que l'obligation est « au-dessous du pair » alors que s'il en est supérieur, on dit que l'émission est « au-dessus du pair ». La différence entre la valeur d'émission et la valeur nominale est appelée prime d'émission.

[21] Khoufi W. et Dami I. (2004), « Le calcul financier et la notion de la valeur temporelle de l'argent », Ecole supérieure de commerce de Sfax, Tunis.

- **La valeur de remboursement :** C'est la somme versée par l'emprunteur au moment du remboursement de l'obligation. Cette somme peut être égale à la valeur nominale, on parle dans ce cas d'un remboursement « au pair », ou supérieure à la valeur nominale et on parle alors d'un remboursement « au-dessus du pair ». La différence entre la valeur de remboursement et la valeur d'émission est appelée prime de remboursement. **Le taux nominal :** C'est la rémunération de l'obligation. On l'appelle aussi taux facial. Appliqué à la valeur nominale, il permet de calculer le montant des intérêts (coupon).
- **La date de souscription :** C'est la date de règlement de l'achat de l'obligation par le souscripteur.
- **La date de jouissance :** C'est la date à partir de laquelle les intérêts commencent à courir.
- **Le coupon :** c'est le montant des intérêts servis à chaque échéance, pour chaque obligation.

2.3.Tableau d'amortissement

Afin d'établir le tableau d'amortissement, il nécessaire d'abord de calculer le montant de remboursement à la fin de la durée de l'emprunt et de calculer ainsi le taux effectif.

2.3.1. Remboursement « in fine » (à la fin de la durée d'emprunt)

Une société anonyme a son exercice social qui coïncide avec l'année civile. A la fin du mois de février N-1, elle a mis un emprunt obligataire de 10 000 obligations de 2 000 DA nominal aux conditions suivantes[22]:

- Prix démission : 100% du nominal ;
- Date de jouissance et de règlement : 1er mars N-1 ;
- Durée : 8 ans ;
- Taux d'intérêt nominal : 7,10 %, soit un coupon de 142 DA (2000X0,071) ;
- Date d'échéance annuelle :1er mars de chaque année à partir du 1er mars N. Les intérêts courus sont calculés sur la base d'une année commerciale de 360 jours.

- **Calcul des intérêts**

Comme l'intérêt est constant, on a : $\mathbf{I} = \text{NCi avec :}$

$\mathbf{N} = \text{Nombre d'obligationsencore vivante;}$

$\mathbf{C} = \text{Valeur nominale de l'obligation;}$

$\mathbf{NC} = \text{Valeur nominale de l'emprunt.}$

$\text{Intérêt (I)} = 10\,000 \times 2\,000 \times 0{,}071 = 1\,420\,000\ \text{DA.}$

[22] Makhlouf F. (2017), « Mathématiques financières : cours et TD corrigés », Pages Bleues internationales, Alger, P.245.

- **Remboursement de la dernière année**

$$\mathbf{R_n = NC + I = NC + NCi \implies R_n = NC\,(1 + i)}$$

Avec R_n = reboursssement de la dernière année.

$R_n = 10\,000 \times 2\,000(1 + 0{,}071) = 21\,420\,000$ DA.

- **Nombre d'obligations amorties à la dernière année.**

$$\mathbf{d_n = \frac{NC}{C} = N}$$

$$d_n = \frac{NC}{C} = \frac{10\,000 \times 2000}{2\,000} = 10\,000 \text{ obligations}$$

<u>Remarque :</u> Puisque on rembourse 20 000 000 DA à la dernière année, on a :

$d_n = \frac{M_n}{C} = \frac{20\,000\,0000}{2\,000} = 10\,000$ obligations.

- **Présentation du tableau d'amortissement**

Années	**Emprunt à rembourser**	**Intérêts des obligations vivantes**	**Annuités**	**Nombre d'obligations Amorties**	**Vivantes**
1	$V_0 = 20000000$	1 420 000	1 420 000		
2	V_1	1 420 000	1 420 000		
3	V_2	1 420 000	1 420 000		
4	V_3	1 420 000	1 420 000		
5	V_4	1 420 000	1 420 000		
6	V_5	1 420 000	1 420 000		
7	V_6	1 420 000	1 420 000		
8	V_7	1 420 000	1 420 000	10 000	0
	20 000 000	**11 360 000**	**11360000**		

$$\text{Rembourssement total} = NC + \sum_{K=1}^{n} I_k = 20\,000\,000 + 11\,360\,000 = 31\,360\,000 \text{ DA}$$

Remarque :

- Les intérêts sont remboursés annuellement, ceux-ci représentent les annuités. Cette manière de procéder est la plus usitée.
- Prix d'émission $(P_e) = \frac{a\,[1-(1+i)^{-n}]}{i} + NC(1+i)^{-n}$

$$P_e = \frac{1420\,000\,[1-(1+0{,}071)^{-8}]}{i} + 20\,000\,000(1+0,071)^{-8}$$

$$P_e = 20\,000\,000 \text{ DA, soit } \frac{20\,000\,000}{10\,000} = \mathbf{2\,000\ DA\ par\ obligation}.$$

2.3.2. Taux effectif (taux actuariel)

Un emprunt obligataire est émis par une société anonyme. Les informations concernant cette opération sont les suivantes :

Période	**2009/2019**
Taux d'intérêt	7,50%
Prix d'émission	98,85%, soit 9885 DA
Date de jouissance et de règlement	14 juin 2009

Sachant que :

- Les intérêts de 750 DA sont payables le 14 juin de chaque année et pour la première fois, le 14 juin 2009 ;
- L'emprunt est amorti en totalité le 14 juin 2019 ;
- Au jour du règlement, le taux de rendement actuariel est de 7,67%.

Vérifions sue le taux actuariel est juste.

Solution : - Calcul du montant nominal de l'obligation :

On a : le prix d'émission est de 98,85%, soit 9885 DA.

$$0{,}9885 \times C = 9885 \Rightarrow C = \frac{9885}{0{,}9885} = 10\,000 \text{ DA.}$$

- Vérification que le taux de rendement actuariel est juste :

Les intérêts de 750 DA sont constants, ils forment donc les annuités. On calcul le prix d'émission de l'obligation : $P_e = \frac{a\,[1-(1+i)^{-n}]}{i} + NC(1+i)^{-n}$

$$P_e = \frac{750[1-(1+0{,}0767)^{-10}]}{0{,}071} + 10\,000(1+0{,}0767)^{-10}$$

$P_e = 5\,108{,}33693 + 4775{,}874099 = 9884{,}211029 \text{ DA, soit } P_e = \ 9885 \text{ DA.}$

⇒ Le taux de rendement actuariel est supérieur au taux nominal, car le prix d'émission est inférieur au pair. Le taux actuariel représente le taux réel de l'opération.

2.4. Remboursement échelonné

Le remboursement échelonné se fait à partir d'une annuité constante et d'un amortissement constant.

2.4.1. Annuité constante

Raisonnement demeure le même pour les emprunts indivis, mais chaque année, on amortit obligatoirement un nombre entier d'obligations, et l'amortissement est calculé en fonction du prix de remboursement.

Exemple : Soit un emprunt de 50 000 obligations d'une valeur nominale de 2 500 DA, remboursable au pair par 5 annuités constantes. Le prix d'émission est de 100 %, soit 2 500 DA par obligation et le taux nominal d'intérêt est de 7,8%.

- **Calcul de l'annuité**

$$\mathbf{NC = a\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \Rightarrow a = \frac{NCi}{1-(1+i)^{-n}}}$$

$$a = \frac{50\,000 \times 2\,500 \ \times 0{,}078}{1-1{,}078^{-5}} = 31\,142\,210 \text{ DA.}$$

- **Nombre d'obligations amorties à chaque tirage**

• Nombre d'obligations amorties à la fin de la durée de l'emprunt obligataire :

$$d_0 = \ d_1\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] = \frac{NC}{C} = N$$

• Nombre d'obligations amorties au premier tirage ou à la fin de la première année :

$$d_1 = \ \frac{d_0 i}{(1+i)^n - 1}$$

• Nombre d'obligations amorties du 2ème tirage au dernier tirage :

$$d_2 = d_1(1+i) \qquad d_3 = d_2(1+i)$$

$$\Longrightarrow \forall\, K, d_k = d_{k-1}(1+i) \text{ ou } d_n = d_k(1+i)^{n-k} \text{ et } d_n = d_1(1+i)^{n-1}$$

$$d_0 = \ d_1\left[\frac{(1{,}078)^5 - 1}{0{,}078}\right] = \frac{50\,000 \times 2\,500}{2\,500} = 50\,000 \text{ obligations}$$

$$d_1 = \frac{50\,000 \times 0{,}078}{(1{,}078)^5 - 1} \ = \ 8557 \text{ obligations}$$

$d_2 = 8557 \times 1{,}078 = 9\ 224$ obligations.

$d_3 = 8557 \times (1{,}078)^2 = 9\ 944$ obligations.

$d_4 = 8557 \times (1{,}078)^3 = 10\ 720$ obligations.

$d_5 = 8557 \times (1{,}078)^4 = 11\ 556$ obligations.

- **Nombre d'obligations encore vivantes au terme de K années**

$$\mathbf{N_k = N - d_1 \left[\frac{(1+i)^k - 1}{i}\right]}$$

- Au terme de la 1ère année : $N_1 = 50\ 000 - 8\ 557 \left[\frac{(1{,}078)^1 - 1}{0{,}078}\right] = 41\ 443$ obligations.
- Au terme de la 2ème année : $N_2 = 50\ 000 - 8\ 557 \left[\frac{(1{,}078)^1 - 1}{0{,}078}\right] = 32\ 219$ obligations.
- Au terme de la 3ème année : $N_3 = 50\ 000 - 8\ 557 \left[\frac{(1{,}078)^1 - 1}{0{,}078}\right] = 22\ 275$ obligations.

- **Calcul de l'intérêt**

$I_1 = \mathrm{NCi}$ $\quad I_2 = N_1\mathrm{Ci}$ $\qquad \Longrightarrow \forall K, I_k = N_{k-1}\mathrm{Ci}$

$I_1 = 50\ 000 \times 2500 \times 0{,}078 = 9\ 750\ 000$ DA.

$I_2 = 41\ \ 443 \times 2500 \times 0{,}078 = 8\ 081\ 385$ DA.

- **Calcul de l'amortissement**

$M_1 = a - \mathrm{NCi} = a - I_1$ $\quad$ et $\quad$ $M_2 = a - N_1\mathrm{Ci} = a - I_2$

$$\Longrightarrow \forall\ \mathbf{k}, \mathbf{M_k = a - N_{k-1} = a - I_k}$$

Dans la pratique, on utilise la formule suivante : $\quad M_k = d_k C$

$M_1 = 8\ 557 \times 2\ 500 = 21\ 392\ 500$ DA.

$M_2 = 9\ 224 \times 2\ 500 = 23\ 060\ 000$ DA.

$M_3 = 8\ 557 \times 2\ 500 = 24\ 860\ 000$ DA.

- **Présentation du tableau d'amortissement**

Années	Emprunt à rembourser	Intérêts des obligations vivantes	Amortissements	Annuités	Nombre d'obligations	
					Amorties	Vivantes

1	125.10^6	9750000	21392500	31142500	$8557\ (d_1)$	$41443(N_1)$
2	**(1)**1036075.10^2	**(2)** 8081385	**(3)** 23060000	**(4)**31141385	**(5)** $9224\ (d_2)$	$32219(N_2)$
3	805475.10^2	6282705	24860000	31142705	$9944\ (d_3)$	$22275(N_3)$
4	556875.10^2	4343625	26797500	31141125	**(6)** $10719(d_4)$	$11556(N_4)$
5	288900.10^2	2253420	28890000	31143420	$11556(d_5)$	$0\ (N_5)$
					$50\,000(d_5)$	

$(\mathbf{1})$: $V_1 = N_1C = 41\,443 \times 2500 = 103\,607\,500$ DA.

$(\mathbf{2})$: $I_2 = N_1C_i = 41\,443 \times 2500 \times 0{,}078 = 8081385$ DA.

$(\mathbf{3})$: $M_k = d_kC = 9224 \times 2500 = 23060000$ DA.

$(\mathbf{4})$: $a_2 = M_1 + I_2 = 23060000 + 8081385 = 31141385$DA.

$(\mathbf{5})$: $d_2 = 8557 \times 1{,}078 = 9224$ obligations.

Et $N_2 = 50000 - 8557\left(\frac{1{,}078^2-1}{0{,}078}\right) = 32219$ obligations.

(6) : Afin d'avoir 50 000 obligations, on arrondit, à la fin de la durée de l'emprunt.

2.4.2. Amortissement constant

On construire, à partir des données de l'exemple précèdent, un tableau d'amortissement, l'amortissement étant constant.

- **Nombre d'obligations amortis annuellement**

$d = \frac{N}{n}$ $\qquad d = \frac{50\,000}{5} = 10\,000$ obligations.

- **Amortissement annuel** $\quad M = \frac{50\,000 \times 2500}{5} = \ 25\,000\,0000$ DA

- **Calcul de l'intérêt**

$I_1 = NCi \qquad I_2 = NCi \qquad \Longrightarrow \forall k, I_k = N_{k-1}Ci$

$I_1 = 50\,000 \times 25000 \times 0{,}078 = 9\,750\,000$ DA

$I_2 = (50\,000 - 10\,0000) \times 25000 \times 0{,}078 = 7\,800\,000$ DA

- **Calcul de l'annuité**

$a_1 = M + I_1 \qquad a_2 = M + I_2 \qquad \Longrightarrow \ \forall k, a_k = M + I_k$

$a_1 = 25\,000\,000 + 9\,750\,000 = 34\,750\,000$ DA.

$a_2 = 25\,000\,000 + 7\,800\,000 = 32\,800\,000$ DA.

- **Tableau d'amortissement**

Années	Emprunt à rembourser	Intérêts des obligations vivantes	Amortissements	Annuités effectives	Nombre d'obligations Amorties	Vivantes
1	125.10^6	9 750000	25 000 000	34 750 000	10 000	40 000
2	100.10^6	7 800 000	25 000 000	32 800 000	10 000	30 000
3	75.10^6	5 850 000	25 000 000	30 850 000	10 000	20 000
4	50.10^6	3 900 000	25 000 000	28 900 000	10 000	10 000
5	25 000 000	1 950 000	25 000 000	26 950 000	10 000	0
		29 250 000	125.10^6	$3{,}085.10^8$	50 000	

Conclusion

L'emprunt indivis met en relation un prêteur et un emprunteur tandis que l'emprunt obligatoire met en relation une collectivité et grand nombre de souscripteurs. Le total des amortissements est égal au montant du capital emprunté. Le montant de la dernière annuité est égal au dernier amortissement augmenté de son propre intérêt. Le capital emprunté est égal à la somme des valeurs actuelles des annuités. Le montant du capital dû après le paiement de l'annuité à la fin d'une période quelconque est égal à la somme des valeurs actuelles des annuités non échus.

Chapitre 7 : Critères de choix des investissements

Introduction

On investit de l'argent dans un domaine quelconque en vue d'un profit futur. Ce profit est un gain que l'on espère tirer d'une activité en misant un capital. Mathématiquement, il est nécessaire de savoir si l'investissement est rentable ou non. En effet, pour anticiper sur le résultat futur d'un investissement des critères comme la valeur actuelle nette ou le taux de rentabilité interne, sont utilisés.

1. Rentabilité économique

La rentabilité économique est une opération par laquelle une entreprise ou tout agent économique affecte des ressources financières à un projet dans l'espoir d'en retirer des résultats pendant un certain temps. L'investissement est nécessaire, car il est le moteur de la croissance économique. En effet, l'étude économique ne prend pas en compte les produits financiers et les charges financiers. Quatre critères sont, généralement, utilisés pour apprécier la pertinence d'un investissement, à savoir [23]:

1.1. La valeur Actuelle Nette (VAN)

La Valeur Actuelle Nette est la valeur exprimée à la date de l'achat de l'investissement des opérations attachées à l'opération de l'investissement projeté, les dépenses étant affectées d'un signe (-) et les recettes d'un signe (+).

$$\mathbf{Valeur\ Actuelle\ Nette\ (VAN) = -I + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{R_n}{(1+i)^k}\right]}$$

La VAN dépend de l'investissement initial, des recettes futures et du taux d'intérêt.

<u>Exemple 1 :</u> recette nettes constantes

Un achat d'une machine a coûté 24 000 000 DA, revenus annuels d'exploitation 7200 000DA par an (i= 10%). Apprécier l'investissement, sachant que la durée est de 10 ans.

<u>Solution :</u>

- Calcul de la VAN :

$$\text{Valeur Actuelle Nette (VAN)} = -I + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{R_n}{(1+i)^k}\right] \text{(R étant une constante)}$$

Comme les recettes annuelles sont constantes, on applique le même principe que pour les annuités constantes :

$$VAN = -I + R\frac{[1-(1+i^{-n})]}{i} = -24\,000\,000 + 7200\,000\,\frac{[1-1{,}1^{-10}]}{0{,}1}$$

---

[23] Makhlouf F. (2017), « Mathématiques financières : cours et TD corrigés », Pages Bleues internationales, Alger, P.162.

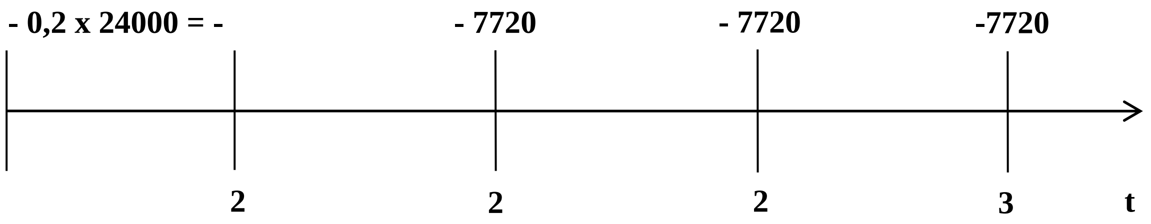
$$\mathbf{VAN = 20\ 240\ 000\ DA} > 0$$

$\Longrightarrow$ L'investissement est rentable (on récupère l'investissement accompagné d'un profit de 20 240 000 DA).

<u>Exemple 2 :</u> Investissement avec paiement partiel immédiat et le reste en plusieurs années

Reprenons l'exemple précédent, maintenant, on suppose que l'investissement projeté, au lieu d'être payé immédiatement est réglé 20 % au comptant, le reste sur plusieurs échéances de chacune 7 720 000DA aux dates 1, 2 et 3. Apprécier l'investissement.

<u>Solution :</u>



$$\mathrm{VAN} = -\mathrm{I} + \sum_{k=1}^{k}\left[\frac{\mathrm{R_k}}{(1+\mathrm{i})^{k}}\right]$$

$$\mathrm{VAN} = -4\ 800\ 000 + 7\ 200\ 000\,\frac{|1-1{,}1^{-3}|}{0{,}1} - 7\ 720\ 000\,\frac{|1-1{,}1^{-3}|}{0{,}1}$$

$$\mathrm{VAN} = 20\ 240\ 000\mathrm{DA} \Longrightarrow \text{L'investissementest rentable}$$

<u>Exemple 3 :</u> Prise en compte de la résiduelle du bien d'investissement

Après les 10 années, le bien d'investissement a une valeur de récupération de 671 000,20 DA. Apprécier l'investissement.

$$\mathrm{VAN} = 20\ 240 + 671\ 000{,}20 \times 1{,}1^{-10}$$

$$\mathrm{VAN} = 20\ 500\ 000\ \mathrm{DA} \Longrightarrow \text{L'investissement est rentable}$$

1.2. Taux de Rendement Interne (TRI)

Le taux de rendement interne est la valeur du taux d'actualisation qui permet d'annuler la valeur actuelle nette. Il est tel que [24]:

$$\mathbf{VAN} = -\mathbf{I} + \sum_{\mathbf{k}=1}^{\mathbf{k}} \left[\frac{\mathbf{R_k}}{(\mathbf{1}+\mathbf{i})^{\mathbf{k}}}\right] = \mathbf{0}$$

Le taux i est le taux courant du marché, alors que le taux i^* est le taux estimé par l'entreprise.

Un projet d'investissement est rentable si son TRI est supérieur au taux d'actualisation retenu, soit en fonction des logiques au coût du capital de l'entreprise (autofinancement) ou au coût des capitaux nécessaires à son financement (financement externe).

Exemple :

Soit un projet A, dont le coût est de 20 000 000 DA, une durée de 10 ans et les recettes constantes de 3 300 000 DA. Calculer la VAN à 10% et à 10,5%, puis le TIR.

Solution :

- **Calcul de la VAN à 10% et 10,5% :**

$$\mathrm{VAN} = -\mathrm{I} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{R_k}{(1+i)^k}\right] = -\mathrm{I} + \mathrm{R}\left[\frac{1-(1+i)^{-10}}{i}\right]$$

à 10 % $\Rightarrow$ VAN = 277 071 DA.

à 10,5 % $\Rightarrow$ VAN = −151 250 DA.

- **Calcul du TIR :**

$$\mathrm{VAN} = 0 \iff -\mathrm{I} + \mathrm{R}\left[\frac{1-(1+i^*)^{-10}}{i^*}\right] = 0$$

[24] Makhlouf F. (2017), « Mathématiques financières : cours et TD corrigés », Pages Bleues internationales, Alger, P.162.

$\text{Si } i_1 = 10\ \% \longrightarrow \text{VAN} = 277\ 071\ \text{DA}$

$\text{Si } i^* = ?\ \% \longrightarrow \text{VAN} = 0$

$$\text{Si } i_2 = 10{,}5\ \% \longrightarrow \text{VAN} = -151\ 250\ \text{DA}.$$

- **Interprétation linéaire :**

$$\frac{X - X_1}{X_2 - X_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} \Leftrightarrow \frac{i^* - i_1}{i_2 - i_1} = \frac{\text{VAN}^* - \text{VAN}_1}{\text{VAN}_2 - \text{VAN}_1} \Leftrightarrow \frac{i^* - 0{,}1}{0{,}105 - 0{,}1} = \frac{0 - 277\ 071}{151\ 250 - 277\ 071}$$

$\Longrightarrow i^* = 0{,}646876991 \times 0{,}005 + 0{,}1 = 0{,}1032, \text{soit } i^* = 10{,}32\%$

$i_1 = 10\ \% < i^* = 10{,}32\ \% < i_2 = 10{,}5\ \% \Longrightarrow \text{le projet est rentable, car VAN} > 0.$

Exemple 2 :

Deux projets d'investissement, dont la durée de vie est de 2 ans, ont un même coût initial qui est de 200 000DA. Les recettes dégagées sont les suivantes :

Projet	Année 1	Année 2
A	200 000	0
B	200 000	22 000

- Déterminer le TIR de ces deux projets.

Solution :

$$\text{VAN} = -\text{I} + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{R_k}{(1+i)^k}\right] = 0$$

Projet A : $-200\ 000 + \frac{200\ 000}{1+i^*} = 0$

$$\frac{200\ 000}{1 + i^*} = 200\ 000 \Longrightarrow 1 = 1 + i^* \Longrightarrow i^* = 0\ (\text{c'est évident})$$

Projet B : $-200\ 000 + \frac{200\ 000}{1+i^*} + \frac{22\ 000}{(1+i^*)^2} = 0$

$$-200\ 000(1 + i^*)^2 + 200\ 000(1 + i^*) + 22\ 000 = 0$$

$$200\ 000(1 + i^*)^2 - 200\ 000(1 + i^*) - 22\ 000 = 0$$

posons $1 + i^* = X$:

$200\,000X^2 - 200\,000X - 22\,000 = 0$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{576{,}10^8} = 240\,000$

$$X_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{200\,000 + 240\,000}{400\,000} = 1{,}1$$

$$X_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{200\,000 + 240\,000}{400\,000} = 1{,}1 \text{ (admis)}$$

$X_1 = 1{,}1 \Leftrightarrow 1{,}1 = 1 + i^* \Longrightarrow\ i^* = 1{,}1 - 1 = 0{,}1, \text{Soit } i^* = 10\ \%$

$$X_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{200\,000 - 240\,000}{400\,000} = -0{,}1\ < 0 \text{ (rejeté)}$$

1.3. Indice de profitabilité

L'indice de profitabilité permet de classer plusieurs projets concurrents par ordre décroissant. Pour que l'investissement soit acceptable il faut que l'indice de profitabilité soit supérieur à 1.

$$\textbf{Indice de Profitabilité (IP)} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{R_k} \left[\frac{(\mathbf{1} + \mathbf{i})^{-\mathbf{k}}}{\mathbf{I}}\right]$$

<u>Exemple :</u>

Un investissement dont le coût est de 1600 000 DA, des recettes de 1 884 480 DA et une VAN de 284 480 DA. Déterminer l'indice de profitabilité et le critère d'enrichissement.

- **Calcul de l'indice de profitabilité :**

  IP $= \frac{1\,884\,480}{1\,600\,000} = 1,1778 > 1$: Investissement acceptable

- **Calcul du critère d'enrichissement :**

$E = \frac{284\,480}{1\,600\,000} = 0,1778$ soit 17,78% , l'investissement rapporte 0,1778 DA en valeur actuelle par dinar investit.

1.4. Délai de récupération du capital investi

Un investissement est jugé rentable si le capital investi est récupéré très rapidement ou autrement dit, si cet investissement procure les ressources nécessaires au remboursement du capital utilisé.

Le principe de calcul est simple. Après avoir dégagé pour chaque investissement les ressources nettes (encaissements - les décaissements), on effectue un cumul de ces dernières pour chaque investissement. Dès que le cumul devient positif, cela signifie que le coût de l'investissement a été récupéré. Le délai séparant la date d'investissement de celle à laquelle les cumuls deviennent positifs représente ce délai de récupération

$$\mathbf{VAN} = -\mathbf{I} + \sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \left[\frac{\mathbf{R_k}}{(\mathbf{1+i})^{\mathbf{k}}}\right] \geq \mathbf{0}$$

Exemple :

Soient deux projets A et B d'une durée de 6 ans chacun et i= 11,25%.

	Projet A	Projet B
Dépense initiale	800 000	1 200 000
Recettes (par an)	192 000	320 000 durant 3 ans et 250 000 au-delà

- Déterminer pour chaque projet la date à laquelle l'investissement est récupéré et en déduire le plus profitable.

Solution :

- **Calcul de la durée pour chaque projet**

	Projet A				Projet B		
Dates	**Facteurs d'actualisation**	**Recettes**	**Recettes actualisées**	**Recettes cumulées**	**Recettes**	**Recettes actualisées**	**Recettes cumulées**
1	$1{,}1125^{-1}$	192 000	172584	172 584	320 000	287 640	287 640
2	$1{,}1125^{-2}$	192 000	155132	327 716	320 000	258 553	546 193
3	$1{,}1125^{-3}$	192 000	139444	467 160	320 000	232 407	778 600
4	$1{,}1125^{-4}$	192 000	125343	592 503	250 000	163 207	941 807
5	$1{,}1125^{-5}$	192 000	112668	705 171	250 000	146 703	1 088 510
				$n^* \longrightarrow 800\,000$			$n^* = 1200\,000$
6	$1{,}1125^{-6}$	192 000	101 275 806 446	806 446	250 000	131868 1 220 378	1 220 378

- **Interprétation linéaire pour le projet A**

$$\frac{X - X_1}{X_2 - X_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} \Leftrightarrow \frac{n^* - 5}{6 - 5} = \frac{800\,000 - 705\,171}{806\,446 - 705\,171} \Rightarrow n^* = \left(\frac{94\,829}{101\,275}\right) \times 1 + 5$$

$$\mathbf{n^* = 5\ ans\ et\ environ\ 11\ mois}$$

- **Interprétation linéaire pour le projet B**

$$\frac{X - X_1}{X_2 - X_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} \Leftrightarrow \frac{n^* - 5}{6 - 5} = \frac{1\,200\,000 - 1\,088\,510}{1\,220\,378 - 1\,088\,510} \Rightarrow n^* = \left(\frac{111\,490}{131\,868}\right) \times 1 + 5$$

$\mathbf{n^* = 5\ ans\ et\ environ\ 10\ mois}$

$\Rightarrow$ Le projet A est le plus profitable d'autantqu'ilcoûte moins cher.

2. Rentabilité financière

Cette méthode consiste à choisir le mode de financement (emprunt ou crédit-bail). D'abord, on procède à l'étude économique, ce qui a été déjà vu dans la partie consacrée à la rentabilité économique. Les flux calculés reposent sur le calcul de la capacité d'autofinancement économique car ils ne contiennent pas d'élément financiers.

Exemple :

Soit un investissement caractérise par les éléments suivants [25]:

- **Eléments économiques :** Chiffre d'affaires annuel 1800 000 DA en progression de 300 000 DA par an, charges variables décaissables 30% du chiffre d'affaires, charges fixes 800 000 DA par an, Besoin en fonds de roulement entièrement variable 36 jours de chiffre d'affaires, récupération du besoin en fonds de roulement au bout de 3ans est égal à 80 % du besoin en fonds de roulement constitué, taux d'impôt sur les sociétés 30%, montant de l'investissement est de 1 200 000 DA, amortissement linéaire sur 3 ans, valeur résiduelle nulle. Sachant que, l'année financière est comptabilisée à 360 jour.

- **Financement par emprunt :** Montant de l'emprunt est de 900 000DA, taux 10%, remboursement par 3 amortissements égaux à 300 000DA.

- **Financement par crédit-bail (leasing) :** Crédit-bail sur l'ensemble des immobilisations est de 1 200 000 DA, dépôt garantie de 100 000 DA, trois redevances annuelles payées d'avance de 438 DA, pas de rachat au bout de 3ans.

[25] Makhlouf F. (2017), « Mathématiques financières : cours et TD corrigés », Pages Bleues internationales, Alger.

- Déterminer le meilleur mode de financement, si i= 8%.

2.1. Etude économique (financement par fonds propres)

- Calcul de la CAF économique :

Eléments	**Année 1**	**Année 2**	**Année 3**
Produits	1 800 000	**(3)**2 100 000	**(4)**2 400 000
Dépenses :			
Charges fixes (CV)	**(1)**-540 000	-630 000	-720 000
Charges fixes (CF)	-800 000	-800 000	-800 000
EBE	= 460	=670 000	=880 000
Amortissement	**(2)**-400 000	-400 000	-400 000
Résultat d'exploitation	= 60 000	=270 000	= 480 000
Impôt	-18 0000	-81 000	**(5)**-144 000
Résultat net	= 42 000	=189 000	=336 000
Produit	1 800 000	2 100 000	2 400 000
Dépenses :			
Charges fixes (CV)	-540 000	-630 000	-720 000
Charges fixes (CF)	-800 000	-800 000	-800 000
Impôt	-18 000	-81 000	-144 000
CAF	**= 442 000**	**= 589 000**	**= 736 000**

$(\mathbf{1}): 0{,}3 \times 1\,800\,000 = 540\,000\text{DA}$

$(\mathbf{2}): \frac{1\,200\,000}{3} = 400\,000\text{DA}$

$(\mathbf{3}): 1\,800\,000 + 300\,000 = 2\,100\,000\text{DA}$

$(\mathbf{4}): 2\,100\,000 + 300\,000 = 2\,400\,000\text{DA}$

$(\mathbf{5}): 0{,}3 \times 480\,000 = 144\,000\text{DA}.$

- **Calcul de la VAN économique**

Dates des encaissements	Début 1	Fin 1	Fin 2	Fin 3
Décaissements	0	1	2	3
Encaissements (+)				
CAF		442 000	589 000	736 000
Valeur résiduelle des immobilisations				**(4)** 0
Valeur résiduelle du BFRE				**(5)** 192 000
Décaissements (-)				
Investissement	1 200 000			
Augmentation du BFRE	**(1)**180 000	**(2)**30 000	(3)30000	
FNT économique	- 1 380 000	412 000	559 000	928 000
FNT actualisés	-1 380 000	381480	479 250	736670

$$\text{VAN économique à 8\%} = -1\,380\,000 + 381480 + 479\,250 + 736\,670$$

$$\text{VAN économique à 8\%} = 217\,400 \text{ DA}$$

$$(\mathbf{1}): \frac{36 \times 1\,800\,000}{360} = 180\,000\text{DA}$$

$$(\mathbf{2}): \frac{36 \times 2\,100\,000}{360} - \frac{36 \times 1800\,000}{360} = 30\,000\text{DA}$$

$$(\mathbf{3}): \frac{36 \times 2\,400\,000}{360} - \frac{36 \times 2\,100\,000}{360} = 30\,000\text{DA}$$

(4) : selon l'énoncé, la valeur résiduelle est nulle.

$$(\mathbf{5}): \text{BFRE constitué} = 180\,000 + 30\,000 + 30\,000 = 240\,000 \text{ DA}$$

$$\Longrightarrow \text{BFRE constitué} = 0{,}8 \times 240\,000 = 192\,000 \text{ DA}$$

<u>**Remarque :**</u>

Le coût total actualisé = - Dépense initiale + Economie d'impôt sur amortissements (avec actualisation).

2.2. Etude du financement par emprunt

Dates des encaissements	Début 1	Fin 1	Fin 2	Fin 3
Décaissements	**0**	**1**	**2**	**3**
Encaissements (+)				
Emprunt	900 000			
Economie d'impôt sur frais financiers		**(1)**27 000	**(4)**18 000	**(6)** 9000
Décaissements (-)				
Frais financiers		**(2)** 90 000	**(5)** 60 000	**(7)** 30 000
Remboursement d'emprunt		**(3)**300 000	300 000	300 000
FNT du financement	900 000	-363 000	-342 000	-321 000
FNT actualisés	900 000	-336 110	-293 200	-254 820

$$\text{VAN du financement à 8\%} = 900\,000 - 336\,110 - 293\,200 - 254\,820 = 15\,870 \text{ DA}$$

$$\text{VAN globale} = 217\,400 + 15\,870 = 233\,270 \text{ DA.}$$

$(\mathbf{1})\text{: } 0{,}3 \times 90\,000 = 27\,000 \text{ DA.}$

$(\mathbf{2})\text{: } 0{,}1 \times 900\,000 = 90\,000 \text{ DA.}$

$(\mathbf{3})\text{: } \dfrac{900\,000}{3} = 300\,000 \text{ DA.}$

$(\mathbf{4})\text{: } 0{,}3 \times 60\,000 = 18\,000 \text{ DA.}$

$(\mathbf{5})\text{: } 0{,}1(900 - 300) = 60\,000 \text{ DA.}$

$(\mathbf{6})\text{: } 0{,}3 \times 3\,000 = 9\,000 \text{ DA.}$

$(\mathbf{7})\text{: } 0{,}1(600\,000 - 300\,000) = 30\,000 \text{ DA.}$

<u>Remarque :</u>

Les charges diminuent d'autant le montant de l'impôt. En effet, les frais financiers à charge de l'entreprise engendrent une économie d'impôt.

2.3.Etude du financement par crédit-bail ou leasing

Dates des encaissements	**Début 1**	**Fin 1**	**Fin 2**	**Fin 3**
Décaissements	**0**	**1**	**2**	**3**
Encaissements (+)				
Montant du crédit-bail	1 200 000			
Economie d'impôt sur loyers		**(3)** 131 400	131 4000	131 400
Récupération du dépôt				
Décaissements (-)				100 000
Dépôt de garantie	100 000			
Loyers **(1)**	438 000	438 000	438 000	
Perte d'économie d'impôt sur amortissement **(2)**		**(4)** 120 000	120 000	120 000
FNT du financement	662 000	-426 600	-426 600	111 400
FNT actualisés	662 000	-395 000	-365 740	88 430

$$\text{VAN du financement par crédit} - \text{bail} = 662\ 000 - 395\ 000 - 365\ 740 - 88\ 430$$

$$\text{VAN du financement par crédit} - \text{bail} = -10\ 310\ \text{DA.}$$

$$\text{VAN du financement par emprunt} > \text{VAN du financement par crédit} - \text{bail}$$
$$\Longrightarrow \text{le financement par enprunt est plus intéressant.}$$

$$\text{VAN gloabale} = 217\ 400 - 10\ 310 = 207\ 090\ \text{DA.}$$

(1) : Les loyers dont payés d'avance, donc en début d'année. Ils peuvent être payés en fin d'année.

(2) : en contractant un crédit-bail, l'entreprise n'est pas propriétaire des machines, elle ne peut donc pratiquer l'amortissement. De ce fait, elle a une perte d'économie d'impôt suramortissement.

$(\mathbf{3}):\ 0{,}3 \times 438\,000 = 131\,400$ DA.

$(\mathbf{4}):\ \dfrac{1\,200\,000}{3} = 400\,000 \Longrightarrow 0{,}3 \times 400\,000 = 120\,000$ DA.

Conclusion

La rentabilité économique ne tient pas compte des éléments financiers. A cet effet, pour que l'étude de l'investissement soit complète, il faut faire l'étude financière. Il existe plusieurs critères de décision de la Valeur Actuelle Nette (VAN) :

Si $\mathrm{VAN} > 0$, on investit ;

Si $\mathrm{VAN} < 0$, on n'investit pas.

Si $\mathrm{VAN} = 0$, on se trouve face un niveau de d'indifférence, c'est-à-dire que garder l'argent ou l'investir revient au même.

Une perte économique sur amortissement signifie que l'entreprise n'est pas propriétaire d'une partie ou de tout le matériel. De ce fait, elle ne peut l'amortir. Pour cette raison elle perd annuellement le taux d'impôt sur les sociétés (environ 30%) du montant de l'amortissement.

Conclusion générale

Au terme de ce cours, l'étudiant aura acquis les principales bases de calcul financier. Plus concrètement, il sera capable de comprendre l'objet des mathématiques financières, sa démarche ainsi que les principaux concepts et méthodes utilisés pour établir un diagnostic de la relation entre une entreprise ou un particulier avec le monde bancaire.

Par ailleurs, grâce aux exercices d'application, l'étudiant sera en mesure de calculer les différents types d'intérêts, de faire la différence entre l'intérêt simple et l'escompte d'un effet de commerce et entre les intérêts simples et les intérêts composés. Distinction fondamentale entre intérêt simple et intérêt composé réside dans la capitalisation. A la fin de chaque période, les intérêts acquis au cours de cette période ne sont pas exigibles par le bénéficiaire.

A travers ce cours, l'étudiant comprendra également les méthodes et les critères de choix des investissements qui peuvent servir au contrôle et à l'évaluation des projets. Le choix de ces critères dépend de l'ensemble des évènements et d'informations dont dispose l'entreprise. Un investissement est d'autant plus intéressant que ses produits permettent de rembourser plus rapidement le capital engagé. Entre plusieurs projets, celui qui a le plus faible délai de récupération actualisé est préférable.

Aussi, ce cours permettra aux étudiants de calculer les principaux agrégats qu'ils seront amenés à utiliser afin de comprendre clairement et aisément les emprunts indivis et obligataires et, par la suite, les techniques mises en œuvre pour les sommes à rembourser périodiquement pour régler ou effacer une dette contractée auprès d'une institution financière. Les clauses du contrat entre prêteur et emprunteur définissent la durée de mise à disposition des fonds, le taux d'intérêt et les conditions de remboursement du capital emprunté. En effet, le raisonnement sur les obligations a des similitudes avec les emprunts indivis.

Enfin, les différents chapitres de ce cours sont des pré-requis qu'un étudiant de deuxième année sciences de gestion, doit maîtriser pour suivre d'autres cours, notamment le cours de l'analyse des projets dans lequel seront étudiés les critères de choix des investissements, la notion d'actualisation et de capitalisation.

Références bibliographiques

1. Bonneau P. (1992), « mathématiques financières approfondies », 5ème édition Dunod, Paris.
2. Bodie.z et Merton R. (2011) « Finnace », 3ème édition, Nouveau Horizons.
3. Hamini A. (1992), « mathématiques financières », OPU, Alger.
4. Khoufi W. et Dami I. (2004), « Le calcul financier et la notion de la valeur temporelle de l'argent », Ecole supérieure de commerce de Sfax, Tunis.
5. Makhlouf F. (2017), « Mathématiques financières : cours et TD corrigés », Pages Bleues internationales, Alger.
6. Marguritemassal (2004), « mathématiques financières : questions et exercices corrigés », Economica, Paris.
7. Carmen Mermoud (2013), « Mathématiques financières », Gymnase de Burier.
8. Marie boissonnade (2002), « mathématiques financières », 2ème édition Dunod, Paris.
9. Masiéri W. (2008), « Mathématiques financières », 2ème édition Dunod, Paris.
10. Thierry rolando (2004), « mathématiques financières », 2ème édition Vuibert, Paris

Table des matières