CHAPITRE II : MODELE DE TRANSPORT

Nous traitons dans ce chapitre deux applications particulières de la programmation linéaire : le problème de transport et le problème d'affectation. Ces problèmes ont une structure spéciale et peuvent se résoudre à l'aide de méthodes autres que celle de simplexe. Les méthodes utilisées pour trouver la solution de base pour un problème de transport sont la règle du coin nord-ouest, la méthode du moindre coût et la méthode de Vogel. Les algorithmes qui sont habituellement utilisés pour déterminer la solution optime du problème de transport sont l'algorithme de Dantzig et celui des coûts duals. L'algorithme de Kuhn (méthode hongroise) est utilisé pour résoudre le problème d'affectation ; on peut également se servir de l'algorithme des coûts duals.

Il convient de noter cependant que ces problèmes de transport peuvent être résolus par le biais de l'application de la méthode de simplexe. Malheureusement, cette dernière requiert généralement, face à ce type de problèmes, la prise en compte de plusieurs variables et plusieurs contraintes. Ce qui conduit à un travail laborieux du fait de nombreuses itérations à effectuer et qui sont nécessaires pour aboutir à la solution optimale. C'est pourquoi, il est préférable de faire appel aux techniques de résolution de problèmes de transport qu'on vient de citer précédemment qui s'avèrent plus efficaces.

Structure d'un problème de transport :

Dans ce type de problème, nous cherchons à déterminer le réseau de distribution permettant d'expédier de m origines une certaine quantité d'un produit à n destinations et ceci avec un coût minimum.

Considérons que la quantité disponible à l'origine (source) i est a_i unités et que la demande à la destination (point de vente) j est b_j unités. La quantité à expédier de l'origine i à la destination j est désignée par X_{ij} et le coût d'expédition correspondant par unité est c_{ij}. Le tableau de transport peut se présenter de la façon suivante :

Coût unitaire d'expédition

Origines (Sources)

Quantité à expédier de i vers j

	Destinations						**Disponibilités**
	1	2	….	j	…	n	
Source $_1$	c_{11} X_{11}	c_{12} X_{12}	….	c_{1j} X_{1j}	….	c_{1n} X_{1n}	a_1
Source $_2$	c_{21} X_{21}	c_{22} X_{22}	….	c_{2j} X_{2j}	….	c_{2n} X_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	….	⋮	….	⋮	⋮
Source $_i$	c_{i1} X_{i1}	c_{i2} X_{i2}	….	c_{ij} X_{ij}	….	c_{in} X_{in}	a_i
⋮	⋮	⋮	….	⋮	….	⋮	⋮
Source $_m$	c_{m1} X_{m1}	c_{m2} X_{m2}	….	c_{mj} X_{mj}	….	c_{mn} X_{mn}	a_m
Demande	b_1	b_2	….	b_j	….	b_n	

<u>Cas 1 :</u> Disponibilités = Demande

Considérons d'abord que le problème de transport se présente avec une disponibilité égale à la demande. Dans ce cas :

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Dans ce cas, le modèle de transport est dit équilibré ; la demande totale sera pleinement satisfaite et les disponibilités des produits seront totalement épuisées.

Le modèle de programmation linéaire de ce problème de transport s'écrit comme suit :

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} X_{ij}$$

Avec les contraintes suivantes :

Disponibilités : $\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i$, $a_i > 0$, i = 1, 2, …, m

Demande : $\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j$, $b_j > 0$, j = 1, 2, …, n

Non-négativité : $X_{ij} \geq 0$ pour tout i et j (les quantités à transporter du produit ne peuvent être négatives)

<u>Cas 2 :</u> Disponibilités > Demande

Lorsque le problème de transporte se présente avec des disponibilités supérieures à la demande, on a :

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Le modèle de programmation linéaire correspondant est alors :

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} X_{ij}$$

Avec les contraintes suivantes :

Disponibilités : $\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \leq a_i$, $a_i > 0$, pour tout i = 1, 2, …, m

Demande : $\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j$, $b_j > 0$, pour tout j = 1, 2, …, n

Non-négativité : $X_{ij} \geq 0$ pour tout i et j.

<u>Remarque :</u>

Cette situation est dite déséquilibrée. Toutefois, on peut toujours retrouver le cas 1 (modèle de transport équilibré) en introduisant des variables d'écart $x_{i,n+1}^{e}$avec des coefficients économiques nuls. De cette façon, le surplus de disponibilité sera dirigé vers une destination fictive. Ceci correspond à introduire une colonne additionnelle (colonne n+1) dans la structure du tableau initial. Cela revient à rajouter une demande fictive ; dans ce cas, la demande globale sera pleinement satisfaite mais les disponibilités des produits ne seront que partiellement épuisées (une quantité du produit demeurera en stock).

<u>Cas 3 :</u> Disponibilités < Demande

Lorsque le problème de transport se présente avec des disponibilités inférieures à la demande, on a :

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Certaines destinations ne pourront être satisfaites complètement.
Le modèle de programmation linéaire correspondant est alors :

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} X_{ij}$$

Avec les contraintes suivantes :

Disponibilités : $\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i$, $a_i > 0$, pour tout i = 1, 2, …, m

Demande : $\sum_{i=1}^{m} X_{ij} \leq b_j$, $b_j > 0$, pour tout j = 1, 2, …, n

Non-négativité : $X_{ij} \geq 0$ pour tout i et j.

<u>Remarque :</u>

Ce modèle de transport est considéré également comme étant déséquilibré. Toutefois, on peut toujours retrouver le cas 1 (situation équilibrée) en introduisant des variables d'écart $x^e_{m+1,j}$ avec des coefficients économiques nuls. Ceci correspond à introduire une ligne additionnelle (ligne m+1) dans la structure du tableau initial ; c'est-à-dire rajouter une offre fictive. Dans ce cas, la demande ne sera pas pleinement satisfaite et les disponibilités seront totalement épuisées.

SOLUTION DE BASE POUR UN PROBLEME DE TRANSPORT :

Le problème de transport équilibré (cas 1 où les disponibilités = demande) représente un système à m+n contraintes avec m x n variables. Puisque la somme des disponibilités est égale à la demande globale, alors une contrainte est redondante. En effet, lorsque nous avons distribué les quantités de chacune des m origines à n-1 destinations, les quantités à expédier à la $n^{\text{ième}}$ (dernière) destination sont automatiquement connues.

La solution de base réalisable comportant m origines et n destinations (incluant toute origine ou destination fictive) aura donc au plus **n+m-1** variables de base positives. S'il existe moins de m+n-1 variables positives (cases remplies), la solution de base est alors dégénérée.

Recherche d'une solution initiale de base :

Diverses méthodes existent pour déterminer une solution de base réalisable à un problème de transport. Les méthodes les plus connues, comme nous l'avons déjà souligné, sont : règle du coin nord-ouest, méthode des moindres coûts et la méthode de Vogel.

Considérons le problème de transport suivant représentant trois dépôts et cinq clients. La matrice des coûts unitaires (en UM) de transport de marchandise ainsi que les disponibilités et le demandes exprimées sont consignées dans le tableau suivant :

		Clients					
		C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Disponibilités (a_i)
Dépôts	D_1	5	6	4	8	10	80
	D_2	7	9	10	5	6	50
	D_3	8	3	6	2	4	70
Demande (b_j)		40	20	60	30	50	200

L'objectif consiste à trouver le meilleur plan d'expédition des marchandises depuis les 3 dépôts vers les cinq destinations (clients) et ceci avec un coût minimum.

Comme le problème de transport tel qu'il est posé est équilibré du fait que la somme des disponibilités est égale à la somme des demandes $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ = 200 unités, les contraintes du programme seront toutes sous forme d'équations (et il n'est pas nécessaire de rajouter une ligne ou colonne fictive pour trouver une solution de base).

Le modèle de programmation linéaire pour ce problème de transport est donc :

Min $Z = 5X_{11}+6X_{12}+4X_{13}+8X_{14}+10X_{15}+7X_{21}+9X_{22}+10X_{23}+5X_{24}+6X_{25}+8X_{31}+3X_{32}+6X_{33}+2X_{34}+4X_{35}$

S/C (sous les contraintes suivantes) :

$X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}+X_{15} = 80$

$X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24}+X_{25} = 50$ (Contraintes associées aux disponibilités de la marchandise)

$X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34}+X_{35} = 70$

$X_{11}+X_{21}+X_{31} = 40$

$X_{12}+X_{22}+X_{32} = 20$

$X_{13}X_{23}+X_{33} = 60$ (Contraintes relatives à la demande exprimée par chacun des clients)

$X_{14}+X_{24}+X_{34} = 30$

$X_{15}+X_{25}+X_{35} = 50$

$X_{ij} \geq 0$, i=1,2,3 ; j= 1,2,3,4,5 (Contraintes de non-négativité des variables de décision)

Nous rappelons que ce modèle peut être résolu à l'aide de la méthode de simplexe. Mais ceci va nous conduire à un travail laborieux du fait de la nécessité de la prise en considération de plusieurs contraintes et de plusieurs variables (sans compter les variables artificielles qu'il y a lieu d'introduire dans chaque contrainte exprimée sous forme d'équation). Il est donc plus efficace d'appliquer les techniques (autres que simplexe conçues pour la résolution des problèmes de transport).

METHODES DE RESOLUTION DES PROBLEMES DE TRANSPORT

Pour trouver une solution optimale (si elle existe bien sûr), il est nécessaire de rechercher d'abord une solution de base réalisable (initiale). Cette solution de base permet de satisfaire la totalité des contraintes du problème considéré même si elle ne donne pas une valeur optimale à la fonction économique (solution non satisfaisante). Cette solution optimale peut être recherchée en faisant des itérations à la solution de base identifiée en se servant des méthodes conçues à cet effet comme on va le voir ultérieurement (méthode des coûts duals). Pour le moment contentons-nous de trouver la solution initiale. Rappelons que les trois méthodes les plus utilisées pour trouver une solution de base réalisable sont la méthode du coin nord-ouest, la méthode du moindre coût et la méthode de Vogel.

A- <u>Règle du coin nord-ouest (supérieur gauche)</u>

Examinons comment s'applique la règle du coin nord-ouest pour obtenir une solution de base (initiale) à un problème de transport. Pour ce faire, rappelons les données du problème précédent :

1. Tracer la matrice indiquant les disponibilités a_i et les demandes b_j (sans y indiquer les coûts unitaires).

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	a_i
D_1						80
D_2						50
D_3						70
b_j	40	20	60	30	50	

2. Aller à la case X_{11} (case située au nord-ouest ou supérieur gauche) et lui affecter la quantité égale au minimum entre la disponibilité de la première ligne (80) et la demande du premier client (40) ; c'est-dire X_{11} = 40. Réduire ces deux quantités des disponibilités et de la demande (réajuster a_i et b_j : 80-40=40 et 40-40=0). Dans ce cas, la demande du client 1 a été pleinement satisfaite (cette colonne est donc saturée) par le biais du dépôt 1. Ce dernier dispose désormais uniquement de 40 unités à livrer pour d'autres clients.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	a_i
D_1	40					~~80~~ 40
D_2						50
D_3						70
b_j	~~40~~ 0	20	60	30	50	

3. A ce moment, ou la disponibilité de la première ligne égale 0 ou la demande la première colonne égale 0. On répète l'opération de l'étape 2 en utilisant toujours l'élément du coin nord-ouest de la matrice résultante mais cette fois en ne considérant pas la ligne ou la colonne saturée (elle est à ignorer). Autrement dit, on se déplace de manière adjacente à la case remplie (on se déplace vers la droite quand c'est la colonne qui est saturée ou vers le bas quand c'est la ligne qui est saturée). Dans notre exemple, on doit se déplacer à droite puisque la demande du client C_1 est déjà satisfaite. Ce qui nous conduit vers X_{12} et on va lui allouer la quantité égale au minimum entre la disponibilité (40 au lieu de 80) et 20 unités demandées par le client C_2. Ce qui donne à X_{12} une valeur égale à 20 unités et on doit encore réajuster les disponibilités de la première ligne et la demande de C_2 (40-20=20 et 20-20=0).

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	a_i
D_1	40	20				~~80~~ ~~40~~ 20
D_2						50
D_3						70
b_j	~~40~~ 0	~~20~~ 0	60	30	50	

4. Nous répétons l'étape 2 jusqu'à ce que la solution initiale soit obtenue (aussitôt qu'on termine d'affecter toutes les quantités disponibles aux différents clients).

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	a_i
D_1	40	20	20			~~80~~ ~~40~~ ~~20~~ 0
D_2						50
D_3						70
b_j	~~40~~ 0	~~20~~ 0	~~60~~ 40	30	50	

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	a_i
D_1	40	20	20			~~80~~ ~~40~~ ~~20~~ 0
D_2			40			~~50~~ 10
D_3						70
b_j	~~40~~ 0	~~20~~ 0	~~60~~ ~~40~~ 0	30	50	

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	a_i
D_1	40	20	20			~~80~~ ~~40~~ ~~20~~ 0
D_2			40	10		~~50~~ ~~10~~ 0
D_3						70
b_j	~~40~~ 0	~~20~~ 0	~~60~~ ~~40~~ 0	~~30~~ 20	50	

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	a_i
D_1	40	20	20			~~80~~ ~~40~~ ~~20~~ 0
D_2			40	10		~~50~~ ~~10~~ 0
D_3				20		~~70~~ 50

b_j	~~40~~ 0	~~20~~ 0	~~60~~ ~~40~~ 0	~~30~~ ~~20~~ 0	50	

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	a_i
D_1	40	20	20			~~80~~ ~~40~~ ~~20~~ 0
D_2			40	10		~~50~~ ~~10~~ 0
D_3				20	50	~~70~~ ~~50~~ 0
b_j	~~40~~ 0	~~20~~ 0	~~60~~ ~~40~~ 0	~~30~~ ~~20~~ 0	~~50~~ 0	

La dernière matrice indique la solution initiale (de base réalisable). Cette solution donne les résultats suivants :
$X_{11} = 40$, $X_{12} = 20$, $X_{13} = 20$, $X_{23} = 40$, $X_{24} = 10$, $X_{34} = 20$, $X_{35} = 50$.
Ces variables (quantités des cases remplies) dites de base sont au nombre de « n+m-1 » soit 7 (nombre de sources + nombre de destinations – 1).
Il convient de noter qu'à la dernière affectation effectuée, on devrait saturer simultanément la ligne et la colonne. Ceci s'explique par le fait qu'en satisfaisant l'avant dernière contrainte, la dernière affectation est connue de fait (la dernière contrainte est satisfaite automatiquement du fait qu'il y une contrainte redondante). En effet, à l'avance, on sait que la somme des disponibilités est égale à la somme des demandes. D'ailleurs, lorsqu'on affecte la dernière quantité restante (dans notre exemple, 50 à la case X_{35}, on sature simultanément la dernière ligne et la dernière colonne ; c'est-à-dire qu'on satisfait deux contraintes à la fois. C'est pourquoi, la solution de base (et même la solution optimale) comporte toujours « n+m-1 » variables de base (cases remplies).

Les cases vides correspondent à des variables hors base, elles sont donc nulles. Dans notre cas, nous avons les variables hors base suivantes :
$X_{14} = X_{15} = X_{21} = X_{22} = X_{25} = X_{31} = X_{32} = X_{33} = 0$

Cette solution initiale donne à la fonction économique Z (coût résultant de l'adoption de ce plan d'expédition) une valeur qui est égale à 1090 UM.
En effet, $Z = (40)(5) + (20)(6) + (20)(4) + (40)(10) + (10)(5) + (20)(2) + (50)(4) = 1090$ UM.
Cette valeur n'est pas optimale (pour tester l'optimalité, il va falloir appliquer une technique particulière qui sera traitée ultérieurement).

<u>Remarque :</u>

L'avantage que présente la méthode du coin nord-ouest est sa simplicité dans son application. En revanche, elle a l'inconvénient de nous donner une solution de base qui est généralement très éloignée de la solution optimale. Ce qui nécessite plusieurs itérations pour parvenir à cette solution finale (optimale). En effet, la solution de base résultant de cette méthode génère des coûts très élevés puisqu'elle ne prend pas en considération la structure des coûts unitaires lors de l'allocation des quantités aux différentes cases de la matrice de transport.

B- Méthode du moindre coût (méthode de l'élément minimum)

L'idée consiste à exploiter les cases ayant des coûts de transport faibles et leur attribuer les quantités maximales dans la mesure du possible compte tenu des contraintes bien sûr. Pour trouver une solution de base à l'aide de la méthode du moindre coût, on procède de la manière suivante :

1. Construire la matrice des coûts en incluant les disponibilités et les demandes. Ajouter une destination ou une origine fictive pour équilibrer le modèle (pour que $\sum a_i = \sum b_j$).
2. Repérer la case du tableau de transport comportant le coût le plus bas ;
3. Affecter à cette case la quantité maximale possible (choisir le minimum entre la disponibilité de la ligne de cette case et la demande exprimée dans la colonne de cette même case ; une ligne ou une colonne sera de fait saturée :
4. Si une colonne est saturée (la demande est satisfaite), l'éliminer du tableau (hachurer cette colonne) et mettre à jour la disponibilité de la ligne (source) et recommencer l'affectation des quantités depuis l'étape 1 en considérant le nouveau tableau de transport (après avoir éliminé la colonne saturée) ;
5. Si une ligne est saturée (disponibilité épuisée), l'éliminer du tableau et mettre à jour (réajuster) la quantité demandée de la colonne correspondante et reprendre au point 1 avec le nouveau tableau ;

   Lorsque toutes les lignes et toutes les colonnes sont saturées, le tableau rempli doit contenir la solution de base comportant exactement « m+n-1 » variables de base (cases remplies).

Remarques :

- Si au cours du choix de l'élément le plus bas de la matrice des coûts unitaires plusieurs cases se présentent comme candidates à être remplies (dans le cas où il ya plusieurs éléments minimums identiques), on n'en choisit une de façon arbitraire (mais pour plus d'efficacité, il est préférable de choisir la case permettant de lui affecter la plus grande quantité possible compte tenu des disponibilités a_i et des demandes b_j).
- il convient également de noter que lorsqu'on remplie la dernière case, on sature simultanément la ligne et la colonne (on satisfait deux contraintes au même temps) puisque le modèle de transport est sensé être équilibré.
- Cette méthode est plus efficace que la méthode du coin nord-ouest puisqu'elle tient compte des coûts unitaires et donne par conséquent une solution de base qui est soit optimale directement sinon proche de celle-ci.

Application numérique

Appliquons la méthode du moindre coût à l'exemple précédent et intégrons cette fois-ci les coûts unitaires :

		Clients					
		C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Disponibilités (a_i)
Dépôts	D_1	5	6	4	8	10	80
	D_2	7	9	10	5	6	50
	D_3	8	3	6	2	4	70
Demande (b_j)		40	20	60	30	50	200

Le minimum des éléments de la matrice des coûts unitaires est 2 correspondant à la case D_3C_4. Remplissons cette case en y allouant la plus grande quantité possible (minimum entre disponibilité a_i qui est égale à 70 et demande b_j qui est égale à 30) à savoir 30. Et réajustons les quantités restantes de la colonne et de la ligne correspondantes (30-30=0) et (70-30=40)).

Pour pus de clarté, modifions légèrement le tableau comme suit :

		Clients					
		C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Disponibilités (a_i)
Dépôts	D_1	5	6	4	8	10	80
	D_2	7	9	10	5	6	50
	D_3	8	3	6	2 30	4	~~70~~ 40
Demande (b_j)		40	20	60	~~30~~ 0	50	200

Après avoir rempli la case contenant l'élément du coût minimum et réajusté la ligne et la colonne en soustrayons la quantité affectée à la case des disponibilités et de la demande correspondantes, éliminons la colonne saturée (hachurons les cases de cette colonne saturée pour ne pas y affecter ultérieurement des quantités puisque la demande de ce client est satisfaite). Dressons ensuite la nouvelle matrice en ignorant cette colonne hachurée et reprenons l'étape 1 (on procède de la même manière en cas de saturation de la ligne).

Dans ce nouveau tableau, on repère le coût le plus bas qui est égal à 3 correspondant à la case D_3C_2 qui doit être remplie.

		Clients					
		C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Disponibilités (a_i)
Dépôts	D_1	5	6	4	8	10	80
	D_2	7	9	10	5	6	50
	D_3	8	3 20	6	2 30	4	~~70~~ ~~40~~ 20
Demande (b_j)		40	~~20~~ 0	60	~~30~~ 0	50	200

Dans le tableau suivant, on constate qu'il y a deux cases comportant le même élément minimum égal 4 à savoir la case D_1C_3 et la case D_3C_5. On peut choisir l'une d'entre elle de façon arbitraire. Mais rappelons qu'il est plus efficace d'en choisir celle qui permet d'y affecter la plus grande quantité. C'est pourquoi, nous avons choisi de remplir la case D_1C_3 puisque cette dernière nous permet d'y affecter la quantité égale à 60 au lieu de D_3C_5 qui permet de lui allouer une quantité qui est égale seulement à 20.

		Clients					
		C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Disponibilités (a_i)
Dépôts	D_1	5	6	4 60	8	10	~~80~~ 20
	D_2	7	9	10	5	6	50
	D_3	8	3 20	6	2 30	4	~~70~~ ~~40~~ 20
Demande (b_j)		40	~~20~~ 0	~~60~~ 0	~~30~~ 0	50	200

		Clients					
		C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Disponibilités (a_i)
Dépôts	D_1	5	6	4 60	8	10	~~80~~ 20
	D_2	7	9	10	5	6	50
	D_3	8	3 20	6	2 30	4 20	~~70~~ ~~40~~ ~~20~~ 0
Demande (b_j)		40	~~20~~ 0	~~60~~ 0	~~30~~ 0	~~50~~ 30	200

		Clients					
		C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Disponibilités (a_i)
Dépôts	D_1	5 20	6	4 60	8	10	~~80~~ ~~20~~ 0
	D_2	7	9	10	5	6	50
	D_3	8	3 20	6	2 30	4 20	~~70~~ ~~40~~ ~~20~~ 0
Demande (b_j)		~~40~~ 20	~~20~~ 0	~~60~~ 0	~~30~~ 0	~~50~~ 30	200

		Clients					
		C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Disponibilités (a_i)
Dépôts	D_1	5 20	6	4 60	8	10	~~80~~ ~~20~~ 0
	D_2	7	9	10	5	6 30	~~50~~ 20
	D_3	8	3 20	6	2 30	4 20	~~70~~ ~~40~~ ~~20~~ 0
Demande (b_j)		~~40~~ 20	~~20~~ 0	~~60~~ 0	~~30~~ 0	~~50~~ ~~30~~ 0	200

		Clients					
		C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Disponibilités (a_i)
Dépôts	D_1	5 20	6	4 60	8	10	~~80~~ ~~20~~ 0
	D_2	7 20	9	10	5	6 30	~~50~~ ~~20~~ 0
	D_3	8	3 20	6	2 30	4 20	~~70~~ ~~40~~ ~~20~~ 0
Demande (b_j)		~~40~~ ~~20~~ 0	~~20~~ 0	~~60~~ 0	~~30~~ 0	~~50~~ ~~30~~ 0	200

Comme on peut le constater, lorsqu'on a affecté la dernière quantité restante (20) à la case D_2C_1, nous avons saturé simultanément la ligne et la colonne.

Cette solution de base nous donne les valeurs des variables de base (cases remplies) suivantes :
$X_{11} = 20$, $X_{13} = 60$, $X_{21} = 20$, $X_{25} = 30$, $X_{32} = 20$, $X_{34} = 30$ et $X_{35} = 20$.
Le total des variables de base est 7 = n+m-1= 3+4-1.

Les autres variables (cases vides) sont hors base : $X_{12} = X_{14} = X_{15} = X_{22} = X_{23} = X_{24} = X_{31} = X_{33} = 0$

La valeur du coût total engendré par l'adoption du plan d'expédition de la marchandise tel qu'il est dicté par la méthode du moindre coût est :

Z= (20)(5) + (60)(4) + (20)(7) + (30)(6) + (20)(3) + (30)(2) + (20)(4) = 860 UM.

Comme on peut le constater, la valeur de Z obtenue par la solution initiale à l'issue de l'application de la méthode du moindre coût (860) est inférieure à celle obtenue par la méthode du coin nord-ouest (1090 UM). Il reste à savoir si cette solution (Z=860) est optimale ou non. C'est ce qu'on tâchera de savoir ultérieurement lors de la recherche de la solution optimale (test d'optimalité).

C- Méthode de Vogel (Approximation de Vogel)[1]

La méthode de Vogel peut avoir certains avantages notamment sur la méthode du coin nord-ouest pour déterminer une solution initiale de base. En effet, elle peut permettre d'obtenir une solution optimale en moins d'itérations et parfois la solution initiale obtenue peut être optimale ou à la limite proche d'elle. La démarche est la suivante :

1. Construire la matrice des coûts en incluant les disponibilités et les demandes. Ajouter une destination ou une origine fictive pour équilibrer le modèle (pour que $\sum a_i = \sum b_j$).
2. Pour chaque ligne et chaque colonne, calculer la différence entre les deux coûts les plus bas (de préférence, entre le coût le plus bas et le coût immédiatement supérieur). Nous obtenons ainsi m différences pour les lignes et n différences pour les colonnes.
3. Choisir la ligne ou la colonne ayant la plus grande différence (max des différences) ; faire un choix arbitraire si le maximum des différences n'est pas unique (plusieurs valeurs maximales identiques).
4. Allouer la quantité la plus grande possible (tout en respectant les contraintes de disponibilité et de demande) à la cellule possédant le coût le plus bas au niveau de la ligne ou de la colonne obtenue en 3 ; faire un choix arbitraire s'il y a présence de plusieurs coûts faibles identiques.
5. En allouant la quantité à la case comportant le coût le plus faible, on devrait saturer la ligne ou la colonne correspondante (on ne doit pas saturer la ligne et la colonne simultanément sinon on tombera dans un cas dégénéré. Cette dégénérescence sera traitée ultérieurement).
6. Retourner à l'étape n°2 mais cette fois-ci en effectuant les calculs des différences des lignes et des colonnes sur la matrice résultante (après avoir rayé la ligne ou la colonne saturée). La procédure se termine lorsque toutes les lignes et colonnes sont saturées. Rappelons cependant que lors de l'affectation de la dernière quantité restante à la dernière case, on sature simultanément la ligne et la colonne (il est tout à fait normal qu'on satisfait deux contraintes à la fois comme on l'a vu précédemment puisque $\sum a_i = \sum b_j$).

Application numérique

Rappelons les données du problème précédent et appliquons cette fois-ci la méthode de Vogel pour obtenir une solution initiale.

[1] Cette méthode est aussi connue sous le nom de la méthode de la différence maximale ou méthode de Balas-Hammer.

	5	6	4	8	10	80		1
	7	9	10	5	6	50		1
	8	3	6	2 30	4	~~70~~	40	1
b_j	40	20	60	~~30~~ 0	50	a_i		différences
différences	2	3	2	3	2			

Les différences sont calculées comme suit :

Colonne 1 : 7-5 =2	Colonne 4 : 5-2=3	Ligne 1 :5-4=1
Colonne 2 : 6-3=3	Colonne 5 : 6-4=2	Ligne 2 :6-5=1
Colonne 3 : 6-4=2		Ligne 3 :3-2=1

On remarque que le maximum des différences est 3 correspondant à la deuxième colonne et également à la quatrième colonne. Au lieu de choisir l'une des différences de façon arbitraire (ce n'est pas faux si on le fait), pour plus d'efficacité, il vaut mieux choisir la quatrième colonne puisque celle-ci nous permet d'affecter une plus grande quantité à la case D_3C_4 comportant un coût le plus bas (2) à savoir 30 unités (min entre 30 et 70). Par contre, si on avait choisi la deuxième colonne, on aurait affecté à la case D_3C_2 20 unités uniquement (min entre 20 et 70).

Après avoir réajusté les disponibilités et la demande, on constate que la troisième colonne est saturée. Il convient donc de la rayer (hachurer) et on obtient une autre matrice ne comportant pas cette colonne saturée. On enchaîne le calcul des différences des lignes et des colonnes pour la nouvelle matrice.

	5	6	4	8	10	80			1	1
	7	9	10	5	6	50			1	1
	8	3 20	6	2 30	4	~~70~~	~~40~~	20	1	1
b_j	40	~~20~~ 0	60	~~30~~ 0	50	a_i			différences	
différences	2	3	2	3	2					
	2	3	2	-	2					

	5	6	4 60	8	10	~~80~~	20		1	1	1
	7	9	10	5	6	50			1	1	1
	8	3 20	6	2 30	4	~~70~~	~~40~~	20	1	1	2
b_j	40	~~20~~ 0	~~60~~ 0	~~30~~ 0	50	a_i			différences		
différences	2	3	2	3	2						
	2	3	2	-	2						
	2	-	2	-	2						

La plus grande différence calculée est 2. Nous avons plusieurs choix possibles puisque cette valeur est multiple. Nous avons opté pour la troisième colonne puisque celle-ci nous permet d'affecter une quantité plus grande (60 unités) à la case D_1C_3 comportant en outre un coût le plus bas (4). Continuons les calculs en ignorant cette colonne saturée.

						a_i	différences				
	5 / 20	6	4 / 60	8	10	~~80~~ ~~20~~ 0	1	1	1	5	-
	7	9	10	5	6	50	1	1	1	1	1
	8	3 / 20	6	2 / 30	4 / 20	~~70~~ ~~40~~ ~~20~~ 0	1	1	2	4	4
b_j	~~40~~ 20	~~20~~ 0	~~60~~ 0	~~30~~ 0	~~50~~ 30						
différences	2	3	2	3	2						
	2	3	2	-	2						
	2	-	2	-	2						
	2	-	-	-	2						
	1	-	-	-	2						

Arrivé au stade où il ne reste qu'une seule ligne ou une seule colonne non hachurée, on arrête le calcul des différences puisqu'il n'est pas possible de le faire. On complète le remplissage de toutes les cases restantes (figurant bien entendu sur la même ligne ou la même colonne) en tenant compte des contraintes de disponibilités et des demandes.

						a_i	différences				
	5 / 20	6	4 / 60	8	10	~~80~~ ~~20~~ 0	1	1	1	5	-
	7 / 20	9	10	5	6 / 30	~~50~~ 30 ~~30~~ 0	1	1	1	1	1
	8	3 / 20	6	2 / 30	4 / 20	~~70~~ ~~40~~ ~~20~~ 0	1	1	2	4	4
b_j	~~40~~ ~~20~~ 0	~~20~~ 0	~~60~~ 0	~~30~~ 0	~~50~~ ~~30~~ 0						
différences	2	3	2	3	2						
	2	3	2	-	2						
	2	-	2	-	2						
	2	-	-	-	2						
	1	-	-	-	2						

Remarque :

Il est très facile de vérifier la justesse (s'il n'y a pas d'erreurs de calculs) de la solution initiale obtenue et ce quelle que soit la méthode utilisée (coin nord-ouest, moindre coût ou Vogel). Pour ce faire, dans un premier temps, il est utile de s'assurer que la solution contient exactement « m+n-1 » variables de base ; pour ce faire, il y a lieu de faire le décompte du nombre de cases remplies. Dans un second temps, il est recommandé de vérifier l'addition des quantités affectées dans chaque colonne et dans chaque ligne du modèle (à titre d'exemple, 1ère colonne : 20 + 20 = 40 qui correspond à la demande du client C_1. De même, 1ère ligne : 20 + 60 = 80 qui correspond à la disponibilité du dépôt D_1).

La solution initiale obtenue avec la méthode de Vogel donne :

$X_{11} = 20$, $X_{13} = 60$, $X_{21} = 20$, $X_{25} = 30$, $X_{32} = 20$, $X_{34} = 30$, $X_{35} = 20$

Avec un coût : Z = (20)(5) + (60)(4) + (20)(7) + (30)(6) + (20)(3) + (30)(2) + (20)(4) = 860 UM.

On constate que la valeur de la fonction économique pour cette solution (Vogel) est de beaucoup inférieure à celle obtenue à celle obtenue par la règle du coin nord-ouest (où Z = 1090 UM). Cette valeur est identique (par coïncidence) à celle trouvée avec la méthode du moindre coût. Cependant, la question que l'on doit se poser est de savoir si cette solution est optimale ou non. C'est l'objet de la prochaine section.

Solution de base dégénérée

On peut se retrouver en face d'une solution de base dégénérée lorsqu'on s'aperçoit que le nombre de variables de base est inférieur à n+m-1. Cette situation se présente lorsqu'on sature simultanément la ligne et la colonne du tableau de transport c'est-à-dire lorsque la quantité à affecter dans une case choisie (quelle que soit la méthode utilisée) est égale à la disponibilité de la ligne et de la colonne au même temps.

Pour éviter cette dégénérescence, lors des affectations effectuées pour l'obtention d'une solution de base initiale, il convient de saturer soit la ligne soit la colonne en faisant introduire une quantité ε (élément de perturbation) soit au niveau des disponibilités soit au niveau de la demande. Cette quantité ε sera affectée par la suite à l'une des cases du tableau de transport. On aura donc une variable de base (case remplie) mais nulle. Cette quantité ε sera par la suite considérée comme étant nulle. Toutefois, il est tout à fait normal (et il le faut) de saturer simultanément la ligne et la colonne à la dernière affectation effectuée.

Recherche d'une solution optimale : l'algorithme de Dantzig ou méthode des coûts duals

Après avoir trouvé une solution de base réalisable et ce quelle que la soit la méthode utilisée pour l'obtenir, il convient de tester l'optimalité de cette solution. Autrement dit, il est nécessaire de savoir s'il est possible d'améliorer (réduire davantage les coûts) ou non la valeur de la fonction économique Z. La méthode des coûts duals est conçue pour cette fin.

Désignons par :

- u_i les variables duales associées aux contraintes de disponibilités a_i
- v_j les variables duales associées aux contraintes de demande b_j
- $\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) = c_{ij} - u_i - v_j$ ou le coût marginal de la variable X_{ij}

Le coût marginal Δ_{ij} mesure la variation (augmentation ou diminution) du coût total résultant de l'utilisation d'une unité de la variable X_{ij}. Dans un modèle de transport, la solution optimale est donc obtenue lorsqu'on s'aperçoit que tous les coûts marginaux sont positifs ou nuls ; c'est-à-dire qu'il n'est plus possible d'améliorer (réduire le coût total) la valeur de la fonction économique Z.

Pour calculer les coûts marginaux Δ_{ij}, déterminons les variables duales u_i et v_j données par le système d'équation suivant :

$c_{ij} = u_i + v_j$ pour les variables de base (cases pleines). Ainsi, d'après notre exemple d'application, nous avons :

$c_{11} = u_1 + v_1 = 5$ $\quad$ $c_{21} = u_2 + v_1 = 7$ $\quad$ $c_{32} = u_3 + v_2 = 3$
$c_{13} = u_1 + v_3 = 4$ $\quad$ $c_{25} = u_2 + v_5 = 6$ $\quad$ $c_{34} = u_3 + v_4 = 2$
$c_{35} = u_3 + v_5 = 4$

Comme on peut le constater, le système a 7 équations avec 8 inconnues (u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, v_4 et v_5). Pour résoudre ce système, il faut que le nombre d'équations soit égal au nombre d'inconnues. Or, dans notre cas, il y a une inconnue en plus. Pour trouver les valeurs des variables duales u_i et v_j, il est donc nécessaire d'éliminer l'une d'entre elles. Donnons alors une valeur arbitraire à l'une de ces variables. Pour faciliter les calculs et obtenir les résultats rapidement, il est recommandé d'attribuer une valeur nulle (zéro) à l'une de ces variables, de préférence, à celle qui se répète le plus dans le système d'équations (la ligne ou la colonne du tableau de transport contenant un plus grand nombre de cases remplies ou variables de base). Les valeurs des variables duales restantes seront calculées de manière systématique.

Posons alors $u_3 = 0$ et on déduit que $v_2 = 3$, $v_4 = 2$, $V_5 = 4$. Ensuite, on déduit que $u_2 = 2$ et donc $v_1 = 5$, $u_1 = 0$ et enfin $v_3 = 4$

Ces valeurs peuvent être trouvées plus facilement à partir du tableau de transport comme suit (rappelons que nous avons décidé d'attribuer un zéro à la variable duale u_3 correspondant à la troisième ligne du tableau de transport).

Calculons alors ces valeurs à partir du tableau de transport de la solution de base obtenue par Vogel :

Posons d'abord les u_i au niveau de la première colonne et v_j au niveau de la première ligne. Ensuite admettons que $u_3 = 0$. En sachant qu'au niveau des cases pleines (variables de base), le coût dual est toujours égal au coût unitaire : $c_{ij} = u_i + v_j$, on peut donc déduire les valeurs des autres variables duales comme suit :

	$v_1 = 5$	$v_2 = 3$	$v_3 = 4$	$v_4 = 2$	$v_5 = 4$	a_i
$u_1 = 0$	5 (20)	6	4 (60)	8	10	80
$u_2 = 2$	7 (20)	9	10	5	6 (30)	50
$u_3 = 0$	8	3 (20)	6	2 (30)	4 (20)	70
b_j	40	20	60	30	50	

Calculons maintenant les coûts duals $u_i + v_j$ au niveau des cases vides (pour les variables hors base) et comparons ces coûts duals u_i+v_j aux coûts unitaires correspondants en indiquant l'un des trois signes ≤, = ou ≥. A titre indicatif, prenons la case vide D_1C_2 : $u_1 + v_2 = 0+3 \leq 6$. Pour la case D_2C_4 : $u_2 + v_4 = 2+2 \leq 5$.

On compare donc u_i+v_j à c_{ij} dans toutes les cases vides. Si on s'aperçoit que toutes ces cases comportent le signe ≤, cela veut dire que la solution optimale est atteinte.

Dans le cas où on s'aperçoit qu'une ou plusieurs cases vides comportent le signe >, on déduit que la solution optimale n'est pas encore atteinte et qu'il est possible par conséquent d'améliorer la valeur de la fonction économique (réduire le coût total).

	$v_1 = 5$	$v_2 = 3$	$v_3 = 4$	$v_4 = 2$	$v_5 = 4$	a_i
$u_1 = 0$	5 (20)	6 ≤	4 (60)	8 ≤	10 ≤	80
$u_2 = 2$	7 (20)	9 ≤	10 ≤	5 ≤	6 (30)	50
$u_3 = 0$	8 ≤	3 (20)	6 ≤	2 (30)	4 (20)	70
b_j	40	20	60	30	50	

Dans notre exemple, la solution de base obtenue par l'application de la méthode de Vogel (de même que celle obtenue par la méthode du moindre coût) est optimale puisque tous les signes de comparaison entre coût unitaire et coût dual sont du type ≤ (les coûts marginaux sont positifs ou nuls. Il n'a y a donc pas d'opportunité à saisir pour exploiter une nouvelle case vide et qui permet la réduction du coût total).

En revanche, la solution de base obtenue par la règle du coin nord-ouest est de 1090 UM. Cette valeur est supérieure à 860 UM qui est la valeur optimale de Z. La solution de base obtenue par le coin nord-ouest n'est donc pas optimale puisqu'il est possible de réduire sa valeur jusqu'à 860 UM.

Pour améliorer une solution de base, il est nécessaire de faire des itérations à chaque fois qu'il est possible de le faire afin d'aboutir à la solution optimale. Pour montrer comment effectuer ces itérations, rappelons alors les données du tableau de transport associé à la solution de base du coin nord ouest et appliquons la méthode des coûts duals pour tester son optimalité.

Intégrons cette fois-ci les coûts unitaires et posons $u_1 = 0$ puisque c'est la première ligne qui contient le plus grand nombre de cases remplies (variables de base). Calculons ensuite les autres variables duales.

		$v_1 = 5$ C_1	$v_2 = 6$ C_2	$v_3 = 4$ C_3	$v_4 = -1$ C_4	$v_5 = 1$ C_5	
$u_1 = 0$	D_1	5 40	6 20	4 20	8	10	80
$u_2 = 6$	D_2	7	9	10 40	5 10	6	50
$u_3 = 3$	D_3	8	3	6	2 20	4 50	70
	b_j	40	20	60	30	50	

Après avoir calculé les variables duales u_i et v_j, comparons chaque paire ($u_i + v_j$) par rapport à c_{ij} (coût unitaire de cette case) au niveau des cases vides.

- Si la valeur de $u_i + v_j$ est égale ou inférieure à celle de c_{ij} , on porte le signele signe ≤ et on déduit que la case correspondante qui est vide ne constitue pas une opportunité à saisir pour l'exploiter car le coût marginal correspondant est positif. Le remplissage de cette case ne fera que détériorer la solution de base (le coût total va augmenter alors qu'on cherche à le minimiser). Il va falloir donc ignorer toutes les cases comportant ce signe ≤ car elles correspondent à des variables qui ne peuvent pas entrer dans la base. Les variables susceptibles d'entrer dans la base (les variables pouvant améliorer la solution (réduire la valeur de Z) correspondent à des cases dont la valeur de u_i+v_j est supérieure au coût unitaire c_{ij} (c'est-à-dire, les variables ou cases dont le coût marginal est négatif).
- Si la valeur de $u_i + v_j > c_{ij}$, on calcule la différence et on mentionne cette différence entre parenthèses à côté du signe >. En procédant de cette manière et ce dans toutes les cases vides (variables hors base), on obtient le résultat suivant :

		$v_1 = 5$ C_1	$v_2 = 6$ C_2	$v_3 = 4$ C_3	$v_4 = -1$ C_4	$v_5 = 1$ C_5	
$u_1 = 0$	D_1	5 40	6 20	4 20	8 ≤	10 ≤	80
$u_2 = 6$	D_2	7 >(4)	9 >(3)	10 40	5 10	6 > (1)	50
$u_3 = 3$	D_3	8 ≤	3 > (3)	6 > (1)	2 20	4 50	70
	b_j	40	20	60	30	50	

Explications à titre indicatif (les cases pleines ne sont pas concernées):

- Case D_1C_4 : $u_1+v_4 = 0+(-1) = -1 \leq 8$ → on se contente seulement de porter le signe ≤
- Case D_2C_1 : $u_2+v_1 = 6+5 = 11 > 5$ → on porte la différence (qui est de 4) entre parenthèses.

On constate que dans la solution de base initiale, il existe plusieurs cases comportant le signe >. On déduit donc que la solution optimale n'est pas encore atteinte. Pour améliorer la solution courante, il va falloir effectuer un changement de base (tel est le cas dans le cadre de l'application de la méthode de simplexe). Pour ce faire, on doit appliquer les critères d'entrée (en base) et de sortie.

<u>Critère d'entrée :</u>

Au niveau des cases vides (variables hors base), choisir la case dont la différence est la plus grande qui existe entre u_i+v_j et c_{ij} en se limitant bien sûr aux cases vides où u_i+v_j est strictement supérieur à c_{ij}. Autrement dit, on choisit le plus petit coût marginal négatif. Dans notre exmple, la plus grande différence est 4 (max entre 4, 3, 1, 3 et 1). Ce maximum correspond à la case D_2C_1 qui va rentrer dans la base (on doit donc remplir cette case vide). Ce qui nous conduit à avoir un tableau contenant « n+m » variables de base. Il va donc falloir éliminer l'une des cases pleines pour avoir exactement « n+m-1 » cases remplies (ou variables de base). Ce qui nous conduit à l'adoption du critère de sortie de base.

Le nombre 4 figurant dans la case D_2C_1 correspond à la réduction du coût total par unité transportée de la source 2 (D_2) vers le client C_1. Ainsi, si on affecte une seule unité à cette case, le coût total Z va baisser de 4 unités monétaires. Il est donc bénéfique pour l'entreprise d'affecter la plus grande quantité possible à cette case pour réduire le montant du coût total à condition de satisfaire toutes les contraintes (de demande et de disponibilités). Cette quantité maximale sera déterminée par le critère de sortie. Pour l'instant, considérons que cette quantité est désignée par θ.

<u>Critère de sortie :</u>

Pour déterminer la variable sortante (vider une case pleine) qui cédera sa place à la variable entrante, il va falloir construire une boucle à partir de la case à remplir. Cette boucle (sous forme d'un circuit fermé) est nécessaire pour tenir compte des contraintes des dipsonibilités et des demandes. La quantité θ qui va être ajoutée et soustraite dans les différentes cases du parcours ainsi dressé sera égale à la plus petite valeur X_{ij} des cases affectée du signe «-» concernées par le circuit comme le montre le schéma suivant.

		v_1 =5 C_1	v_2 =6 C_2	v_3 =4 C_3	v_4 =-1 C_4	v_5 =1 C_5	
u_1 = 0	D_1	5 40 - θ	6 20	4 20 + θ	8 ≤	10 ≤	80
u_2 =6	D_2	7 > (4) + θ	9 > (3)	10 40 - θ	5 10	6 > (1)	50
u_3 =3	D_3	8 ≤	3 > (3)	6 > (1)	2 20	4 50	70
	b_j	40	20	60	30	50	

Exploitons donc la case vide D_2C_1 (ayant la plus grande différence) et affectons à cette case la quantité θ. Pour tenir compte des contraintes de disponibilités et de demande, cette quantité θ doit être soustraite de la colonne 1. Ce qui nous conduit à la case D_1C_1 (on ne peut pas soustraire une quantité des cases vides sinon on viole les contraintes de non négativité). Puis rajouter cette quantité θ à la case D_1C_3 et enfin la soustraire de la case D_2C_3 pour fermer la boucle.

Rappelons que pour déterminer la valeur de θ, il faut choisir le minimum des quantités figurant dans les cases affectées du signe «-». Dans notre exemple, on choisit le minimum entre 40 et 40. Ce qui donne à θ la valeur de 40. Les résultats du parcours adopté sont consignés dans le tableau suivant :

		$v_1 = 5$ C_1	$v_2 = 6$ C_2	$v_3 = 4$ C_3	$v_4 = -1$ C_4	$v_5 = 1$ C_5	
$u_1 = 0$	D_1	5	6 20	4 60	8 ≤	10 ≤	80
$u_2 = 6$	D_2	7 > (4) 40	9 > (3)	10	5 10	6 > (1)	50
$u_3 = 3$	D_3	8 ≤	3 > (3)	6 > (1)	2 20	4 50	70
	b_j	40	20	60	30	50	

Malheureusement, nous sommes tombés sur un cas dégénéré puisque nous avons vidé deux cases et le nombre de variables de base utilisé n'est pas égal à « n+m-1 ». Pour remédier à cette situation, il va falloir vider une seule case (faire sortir une seule variable de la base). Pour ce faire, l'une des cases vides sera remplie avec une quantité égale à « ε ». Admettons que la case D_1C_1 contient désormais une quantité égale à 40-40=ε au lieu de zéro (vide). Ceci consiste à considérer que la variable X_{11} est de base mais nulle. Ce faisant, on obtient exactement « n+m-1 » cases remplies (variables de base).

		$v_1 = 5$ C_1	$v_2 = 6$ C_2	$v_3 = 4$ C_3	$v_4 = -1$ C_4	$v_5 = 1$ C_5	
$u_1 = 0$	D_1	5 ε	6 20	4 60	8 ≤	10 ≤	80
$u_2 = 6$	D_2	7 >(4) 40	9 > (3)	10	5 10	6 > (1)	50
$u_3 = 3$	D_3	8 ≤	3 > (3)	6 > (1)	2 20	4 50	70
	b_j	40	20	60	30	50	

La valeur de la fonction économique du deuxième tableau désignée par Z_2 est :

$Z_2 = (\varepsilon)(5) + (20)(6) + (60)(4) + (40)(7) + (10)(5) + (20)(2) + (50)(4) = 930$ UM en considérons désormais que $\varepsilon = 0$.

Cette valaur est également égale à la valeur intiale de la fonction économique $Z_1 + \Delta Z_1$ où ΔZ_1 mesure la variation (réduction) du coût total résultant du changement de base effectué (remplissage de la nouvelle case vide).

$\Delta Z_1 = - 4\ (40) = -160$ et $Z_1 = 1090$ UM (valeur de Z initiale ; c'est-à-dire du premier tableau obtenu par nord-ouest).

En effet, $Z_2 = 1090 - 160 = 930$ UM.

Rappelons que chaque unité affectée à la case D_2C_1 permet de réduire la valeur du coût total Z de 4 UM. En effet, en suivant le circuit adopté précédémment à partir de la case D_2C_1, nous avons une variation par unité = +7 - 5 + 4 – 10 = - 4. Comme on a décidé de lui affecter la quantité 40, le coût total va baisser de 160.

Testons encore l'optimalité de cette nouvelle solution avec la méthode des coûts dual et posons $u_1 = 0$:

		$v_1 = 5$ C_1	$v_2 = 6$ C_2	$v_3 = 4$ C_3	$v_4 = 3$ C_4	$v_5 = 5$ C_5	
$u_1 = 0$	D_1	$\boxed{5}$ ε	$\boxed{6}$ 20	$\boxed{4}$ 60	$\boxed{8}$ ≤	$\boxed{10}$ ≤	80
$u_2 = 2$	D_2	$\boxed{7}$ 40	$\boxed{9}$ ≤	$\boxed{10}$ ≤	$\boxed{5}$ 10	$\boxed{6}$ >(1)	50
$u_3 = -1$	D_3	$\boxed{8}$ ≤	$\boxed{3}$ > (2)	$\boxed{6}$ ≤	$\boxed{2}$ 20	$\boxed{4}$ 50	70
	b_j	40	20	60	30	50	

Cette solution n'est pas optimale du fait de la présence des signes >. Il est donc possible de réduire davantage la valeur de la fonction économique. Choisissons la plus grande différence entre u_i+v_j et c_{ij}. Ce qui nous donne 2 correspondant à la case D_3C_2 et établissons ensuite son circuit correspondant.

		$v_1 = 5$ C_1	$v_2 = 6$ C_2	$v_3 = 4$ C_3	$v_4 = 3$ C_4	$v_5 = 5$ C_5	
$u_1 = 0$	D_1	$\boxed{5}$ ε +	$\boxed{6}$ 20 -	$\boxed{4}$ 60	$\boxed{8}$ ≤	$\boxed{10}$ ≤	80
$u_2 = 2$	D_2	$\boxed{7}$ 40 -	$\boxed{9}$ ≤	$\boxed{10}$ ≤	$\boxed{5}$ 10 +	$\boxed{6}$ > (1)	50
$u_3 = -1$	D_3	$\boxed{8}$ ≤	$\boxed{3}$ > (2) +	$\boxed{6}$ ≤	$\boxed{2}$ 20 -	$\boxed{4}$ 50	70
	b_j	40	20	60	30	50	

La valeur de θ à rajouter et à soustraite des différentes cases du parcours dressé est le minimum des quantités affectées dans des cases contenant le signe «-». Ce qui donne à θ la valeur de 20. Nous serons encore une fois face à un problème dégénéré puisqu'il y a 2 cases qui comportent 20 et auxquelles on doit soustraire cette même quantité. Au lieu de vider les deux cases, intégrons « ε » à l'une de ces cases. Optons pour la case D_3C_4 ayant le coût le plus bas (2) et dressons le tableau de transport de la nouvelle solution.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	
D_1	5 / 20	6	4 / 60	8	10	80
D_2	7 / 20	9	10	5 / 30	6	50
D_3	*8*	*3* / 20	*6*	*2* / ε	*4* / 50	*70*
b_j	40	20	60	30	50	

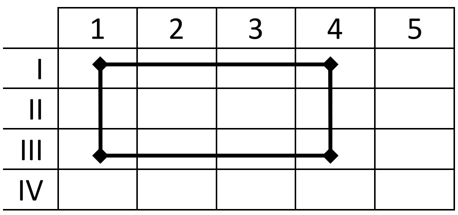
Z_3 = (20)(5) + (60)(4) + (20)(7) + (30)(5) + (20)(3) +(ε)(2) + (50)(4) = 890 UM

Ou bien $Z_3 = Z_2 + \Delta Z_2$ = 930 – (2)(20) = 930 – 40 = 890 UM.

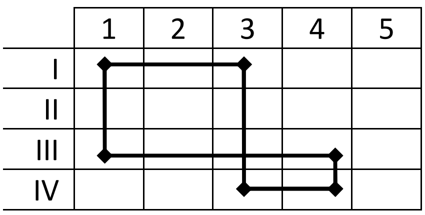
Il n'est pas nécessaire de tester cette solution puisqu'on sait qu'elle est de fait optimale car nous l'avons déjà fait précédemment avec la méthode de Vogel et la méthode du moindre coût (il s'agit du même tableau optimal).

Conditions à respecter pour dresser une boucle (circuit ou parcours) :

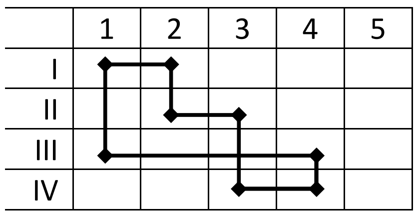
- Chaque paire de cases consécutives sur un parcours est soit dans la même ligne, soit dans la même colonne ;
- Il ne peut pas y avoir trois cases (ou plus) consécutives dans la même ligne ou la même colonne ;
- La première case (début du parcours) et la dernière case du parcours sont sur la même ligne ou la même colonne ;
- Une case n'apparaît jamais plus d'une fois dans le parcours.



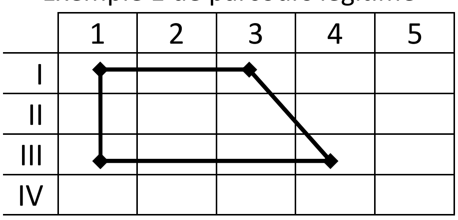
Exemple 1 de parcours légitime



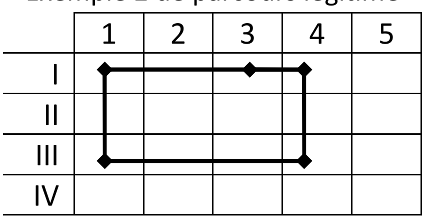
Exemple 2 de parcours légitime



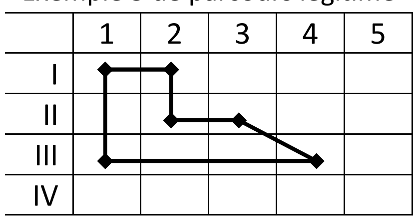
Exemple 3 de parcours légitime



Exemple 4 de parcours illégitime



Exemple 5 de parcours illégitime



Exemple 6 de parcours illégitime

Cas d'un problème de transport déséquilibré

Jusqu'à présent, on s'est contenté de résoudre un problème de transport équilibré. Supposons maintenant que les demandes exprimées par les différentes destinations ne sont pas égales aux disponibilités. Il est donc nécessaire, pour résoudre ce problème, de rajouter soit une ligne, soit une colonne fictive pour appliquer l'une des techniques que nous avons vues précédemment. Nous traiterons cette situation déséquilibrée à travers un exemple numérique.

Exercice d'application :

On veut alimenter 4 villes en électricité depuis 3 centrales. Les coûts de distribution (en unités monétaires : UM) par gigawatt, les puissances fournies (en Gigawatts : GW) par les centrales et les demandes exprimées par chaque ville sont consignés dans le tableau suivant :

	Ville A	Ville B	Ville C	Ville D	Puissance fournie
Centrale 1	8	6	10	9	35 GW
Centrale 2	9	12	13	7	50 GW
Centrale 3	14	9	16	5	45 GW
Demande	45 GW	20 GW	30 GW	30 GW	

- Trouver la solution de base initiale à ce problème de transport avec les 3 méthodes connues.
- En partant de la solution de base obtenue par chaque méthode adoptée, trouver la solution optimale qui permet d'alimenter les 4 villes en électricité au moindre coût.

Solution :

Ce problème de transport est déséquilibré du fait que la demande globale ne se confond pas avec la totalité des disponibilités. Il va falloir équilibrer le modèle pour trouver une solution de base.

En effet : $\sum a_i = 35+50+45=130\ GWh$

$$\sum b_j = 45+20+30+30 = 125\ GWh$$

$$\Rightarrow \sum a_i \neq \sum b_j$$

Comme l'offre est supérieure à la demande, il convient de compenser le manque dans la demande en ajoutant une colonne fictive qu'on va dénommer ville F (fictive) dont la quantité s'élève à la différence entre $\sum a_i$ et $\sum b_j$ à savoir 5 GW = 130-125. Les cases figurant dans cette colonne fictive (demande virtuelle) doivent être pénalisées pour ne pas les privilégier lors de la recherche de la solution de base ou de la solution optimale. C'est pourquoi, il est préférable de prévoir des coûts très élevés[2] qu'on peut désigner par « M » sans forcément spécifier sa valeur exacte. Ce coût sera considéré en fin de compte comme étant nul.

Trouvons la solution de base par la règle du coin nord-ouest (il n'est pas nécessaire ici de mentionner les coûts unitaires puisqu'ils ne sont pas pris en considération) :

	Ville A	Ville B	Ville C	Ville D	Ville F	Puissance fournie
Centrale 1	35					~~35~~ 0
Centrale 2	10	20	20			~~50~~ ~~40~~ ~~20~~ 0
Centrale 3			10	30	5	~~45~~ ~~35~~ ~~5~~ 0
Demande	~~45~~ ~~10~~ 0	~~20~~ 0	~~30~~ ~~10~~ 0	~~30~~ 0	~~5~~ 0	130

[2] Certains auteurs préfèrent plutôt attribuer des coûts unitaires nuls pour les cases correspondant à la ligne ou à la colonne fictive ainsi rajoutée. Cela n'influe pas le résultat final.

Nous avons obtenu de solution de base dont la valeur de la fonction économique :

Z= (35)(8) + (10)(9) + (20)(12) +(20)(13) +(10)(16) +(30)(5) + (5)(0) = 1180 UM

Le nombre de variables de base (le nombre de cases remplies) = 7 = n+m-1 = 5+3-1 = 7

Appliquons maintenant la méthode du moindre coût pour trouver une solution de base initiale. Intégrons cette fois-ci les coûts unitaires et modifions un peu la structure du tableau de transport :

	Ville A	Ville B	Ville C	Ville D	Ville F	Puissance fournie
Centrale 1	8 / 15	6 / 20	10	9	M	~~35~~ ~~15~~ 0
Centrale 2	9 / 30	12	13 / 20	7	M	~~50~~ ~~20~~ 0
Centrale 3	14	9	16 / 10	5 / 30	M / 5	~~45~~ ~~15~~ ~~5~~ 0
Demande	~~45~~ ~~30~~ 0	~~20~~ 0	~~30~~ ~~10~~ 0	~~30~~ 0	~~5~~ 0	130

Nous avons obtenu de solution de base dont la valeur de la fonction économique :
Z= (15)(8) + (20)(6) + (30)(9) +(20)(13) +(10)(16) +(30)(5) + (5)(0) = 1080 UM
Le nombre de variables de base (le nombre de cases remplies) = 7 = n+m-1 = 5+3-1 = 7

Appliquons enfin la méthode de Vogel :

	Ville A	Ville B	Ville C	Ville D	Ville F	a_i	Différences				
Centrale 1	8	6 / 5	10 / 30	9	M	~~35~~ ~~30~~ 0	2	2	2	2	(M-10)
Centrale 2	9 / 45	12	13 / ε	7	M / 5	~~50~~ ~~5~~ ~~5~~ 0	2	3	3	3	(M-13)
Centrale 3	14	9 / 15	16	5 / 30	M	~~45~~ ~~15~~ 0	4	5	-	-	-
b_j	~~45~~ 0	~~20~~ ~~5~~ 0	~~30~~ ~~ε~~ 0	~~30~~ 0	~~5~~ 0						
Différences	1	3	3	2	0						
	1	3	3	-	0						
	1	6	3	-	0						
	1	-	3	-	0						
	-	-	3	-	0						

Nous avons obtenu de solution de base dont la valeur de la fonction économique :

Z = (5)(6) + (30)(10) + (45)(9) +(ε)(13) + (5)(M) +(15)(9) + (30)(5)

En considérant désormais ε = 0 et aussi M = 0 puisqu'il s'agit d'un coût fictif :

Z = (5)(6) + (30)(10) + (45)(9) +(15)(9) + (30)(5) = 1020 UM.

Le nombre de variables de base (le nombre de cases remplies) = 7 = n+m-1 = 5+3-1 = 7

Recherchons maintenant la solution optimale :

Pour rechercher une solution optimale à un problème de transport, il va falloir appliquer la méthode des coûts duals (Ballas Hammer) à la solution de base obtenue par l'une des trois méthodes connues.

<u>Partons depuis la solution de base obtenue par la règle du coin nord-ouest [3]:</u>

Introduisons alors les coûts unitaires puis équilibrons le modèle en pénalisant la colonne fictive ainsi ajoutée par l'insertion des coûts très élevés dans les cases correspondantes. Calculons ensuite les valeurs des variables duales u_i et v_j directement sur le tableau et dressons, le cas échéant, le circuit permettant d'améliorer la solution courante en se basant sur le plus petit coût marginal (la plus grande différence entre c_{ij} et $u_i + v_j$).

		$v_1 = 9$ V_A	$v_2 = 12$ V_B	$v_3 = 13$ V_C	$v_4 = 2$ V_D	$v_5 = M-3$ V_F	
$u_1 = -1$	C_1	$\boxed{8}$ 35	$\boxed{6}$ >(5)	$\boxed{10}$ >(2)	$\boxed{9}$ ≤	$\boxed{M}$ ≤	35
$u_2 = 0$	C_2	$\boxed{9}$ 10	$\boxed{12}$ 20	$\boxed{13}$ 20	$\boxed{7}$ ≤	$\boxed{M}$ ≤	50
$u_3 = 3$	C_3	$\boxed{14}$ ≤	$\boxed{9}$ >(6)	$\boxed{16}$ 10	$\boxed{5}$ 30	$\boxed{M}$ 5	45
	b_j	45	20	30	30	5	

<u>Remarque</u> : en posant $u_2 = 0$, on obtient les valeurs des autres variables duales très facilement. Nous avons préféré le choix de u_2 car elle correspond à la variable modale (c'est cette variable qui se répète le plus dans le système d'équations. Autrement dit, elle correspond à la ligne qui contient le plus de cases remplies).

Après avoir calculé les différences entre les coûts duals « u_i+v_j » et « c_{ij} », on s'aperçoit que c'est la case D_3C_2 (variable X_{32}) qui va rentrer dans la base puisqu'elle figure dans une case comportant le plus petit coût marginal négatif (-6).

Dressons maintenant le circuit partant depuis la case D_3C_2 permettant l'amélioration de la solution actuelle[4].

		$v_1 = 9$ V_A	$v_2 = 12$ V_B	$v_3 = 13$ V_C	$v_4 = 2$ V_D	$v_5 = M-3$ V_F	
$u_1 = -1$	C_1	$\boxed{8}$ 35	$\boxed{6}$ >(5)	$\boxed{10}$ >(2)	$\boxed{9}$ ≤	$\boxed{M}$ ≤	35
$u_2 = 0$	C_2	$\boxed{9}$ 10	$\boxed{12}$ 20 -	$\boxed{13}$ 20 +	$\boxed{7}$ ≤	$\boxed{M}$ ≤	50
$u_3 = 3$	C_3	$\boxed{14}$ ≤	$\boxed{9}$ >(6) +	$\boxed{16}$ 10 -	$\boxed{5}$ 30	$\boxed{M}$ 5	45
	b_j	45	20	30	30	5	

On constate qua la valeur de ϴ = 10 (min des valeurs des cases comportant le signe négatif à savoir le min entre 20 et 10).

[3] On sait à l'avance qu'elle n'est pas optimale du fait qu'il existe des solutions de base engendrant un coût total inférieur. Les deux autres méthodes ont d'ailleurs permis l'obtention de solutions ayant pour coût total qui s'élève seulement à 1080 UM.

[4] Il est possible de dresser ce circuit directement sur le tableau précédent. Pour plus de clarté, on s'est permis de le faire sur un autre tableau.

La valeur de Z_2 (nouveau coût total résultant de la nouvelle solution) va baisser donc de 6 (10) = 60 UM.

Ce qui donne à Z_2 une valeur égale à 1180-60 = 1120 UM.

Dressons cette nouvelle solution et testons encore son optimalité[5].

		$v_1=9$ V_A	$v_2=12$ V_B	$v_3=13$ V_C	$v_4=8$ V_D	$v_5=M+3$ V_F	
$u_1=-1$	C_1	8 ; 35	6 ; >(5)	10 ; >(2)	9 ; ≤	M ; ≤	35
$u_2=0$	C_2	9 ; 10	12 ; 10	13 ; 30	7 ; >(1)	M ; ≤	50
$u_3=-3$	C_3	14 ; ≤	9 ; 10	16 ; ≤	5 ; 30	M ; 5	45
	b_j	45	20	30	30	5	

$\theta = 10$ et $\Delta Z_2 = (-5)(\theta) = (-5)(10) = -50$

$Z_3 = Z_2 + \Delta Z_2 = 1120 - 50 = 1070$ UM

Testons encore l'optimalité de cette nouvelle solution :

		$v_1=8$ V_A	$v_2=6$ V_B	$v_3=12$ V_C	$v_4=2$ V_D	$v_5=M-3$ V_F	
$u_1=0$	C_1	8 ; 25	6 ; 10	10 ; >(2)	9 ; ≤	M ; ≤	35
$u_2=1$	C_2	9 ; 20	12 ; ≤	13 ; ≤ ; 30	7 ; ≤	M ; ≤	50
$u_3=3$	C_3	14 ; ≤	9 ; 10	16 ; ≤	5 ; 30	M ; 5	45
	b_j	45	20	30	30	5	

$\theta = 25$ et, par conséquent, $\Delta Z_3 = -2(25) = -50$

$Z_4 = Z_3 + \Delta Z_3 = 1070 - 50 = 1020$ UM

Testons encore l'optimalité de Z_4

		$v_1=6$ V_A	$v_2=6$ V_B	$v_3=10$ V_C	$v_4=2$ V_D	$v_5=M-3$ V_F	
$u_1=0$	C_1	8 ; ≤	6 ; 10	10 ; 25	9 ; ≤	M ; ≤	35
$u_2=3$	C_2	9 ; 45	12 ; ≤	13 ; 5	7 ; ≤	M ; ≤	50
$u_3=3$	C_3	14 ; ≤	9 ; 10	16 ; ≤	5 ; 30	M ; 5	45
	b_j	45	20	30	30	5	

[5] Pour établir la nouvelle solution, il va falloir ajouter la quantité $\theta = 10$ à la case D_3C_2, la soustraire de la case D_2C_2, la rajouter à la case D_2C_3 et enfin la soustraire de la case D_3C_3.

En effet, $Z_4 = (10)(6) + (25)(10) + (45)(9) + (5)(13) + (10)(9) + (30)(5) + (5)(0) = 1020$ UM.

Cette solution est optimale du fait que toutes les cases vides (variables hors base) comportent des signes «≤ » ; il n'est donc pas possible de réduire davantage la valeur du coût total.

Cette solution consiste donc à alimenter les 4 villes en adoptant le plan optimal trouvé en supportant un coût total minimum qui s'élève à 1020 UM. La centrale C_3 ne va cependant épuiser la totalité de sa capacité puisqu'elle va desservir uniquement 40 gigawatts (10 +30) pour les villes B et D alors qu'elle dispose d'une puissance totale qui est de 45 GW.

On remarque que l'obtention de la solution optimale à partir de la solution de base obtenue par la règle du coin nord-ouest a été laborieuse du fait qu'elle a nécessité plusieurs itérations. On se permettra, à présent, de retrouver cette solution optimale en partant des solutions de base résultant de l'application des deux autres méthodes à savoir la méthode du moindre coût et de la méthode de Vogel.

<u>Recherche de la solution optimale à partir de la solution de base obtenue par la méthode du moindre coût</u>

Rappelons alors les résultats obtenus et consignés dans le tableau suivant et appliquons la méthode des coûts duals :

Z_1=1080		v_1 =8 V_A	v_2 =6 V_B	v_3 =12 V_C	v_4 =1 V_D	v_5 =M-4 V_F	
u_1 = 0	C_1	8 - 15	6 20	10 >(2) +	9 ≤	M ≤	35
u_2 =1	C_2	9 + 30	12 ≤	13 20 -	7 ≤	M ≤	50
u_3 =4	C_3	14 ≤	9 >(1)	16 10	5 30	M 5	45
	b_j	45	20	30	30	5	

$\theta = 15 \Rightarrow \Delta Z_1 = (-2)(15) = -30 \Rightarrow Z_2 = 1080-30 = 1050$ UM.

Z_2=1050		v_1 =6 V_A	v_2 =6 V_B	v_3 =10 V_C	v_4 =-1 V_D	v_5 =M-6 V_F	
u_1 = 0	C_1	8 ≤	6 - 20	10 + 15	9 ≤	M ≤	35
u_2 =3	C_2	9 45	12 ≤	13 5	7 ≤	M ≤	50
u_3 =6	C_3	14 ≤	9 >(3) +	16 10 -	5 30	M 5	45
	b_j	45	20	30	30	5	

$\theta = 10 \Rightarrow \Delta Z_2 = (-3)(10) = -30 \Rightarrow Z_3 = 1050-30 = 1020$ UM.

Z_3=1020		V_A	V_B	V_C	V_D	V_F	
	C_1	8	6 / 10	10 / 25	9	M	35
	C_2	9 / 45	12	13 / 5	7	M	50
	C_3	14	9 / 10	16	5 / 30	M / 5	45
	b_j	45	20	30	30	5	

Nous avons retrouvé le même tableau ; il n'est pas nécessaire de le tester puisque nous l'avons déjà fait précédemment. Il s'agit de la même solution optimale (voir la page précédente).

Essayons maintenant de retrouver cette solution en partant de la solution de base obtenue par la méthode de Vogel.

Pour ce faire, rappelons d'abord les résultats de la solution de base obtenue par Vogel et appliquons une nouvelle fois la méthode des coûts duals.

Z = 1020	Ville A	Ville B	Ville C	Ville D	Ville F	a_i
Centrale 1	8	6 / 5	10 / 30	9	M	35
Centrale 2	9 / 45	12	13 / ε	7	M / 5	50
Centrale 3	14	9 / 15	16	5 / 30	M	45
b_j	45	20	30	30	5	

N'oublions pas que la valeur optimale obtenue précédemment est égale à 1020 UM. La solution de base résultant de l'application de la méthode de Vogel donne la même solution mais avec un autre plan de transport. Ce dernier doit donc être optimal. C'est ce qu'on tentera de montrer avec la méthode des coûts duals.

	Z=1020	v_1 =9 V_A	v_2 =9 V_B	v_3 =13 V_C	v_4 =5 V_D	v_5 =M V_F	
u_1 = -3	C_1	8 ≤	6 / 5	10 / 30	9 ≤	M ≤	35
u_2 =0	C_2	9 / 45	12 ≤	13 / ε	7 ≤	M / 5	50
u_3 =0	C_3	14 ≤	9 / 15	16 ≤	5 / 30	M ≤	45
	b_j	45	20	30	30	5	

Cette solution est en effet optimale du fait que tous les signes au niveau des cases vides sont du type « ≤ ».

Remarquons toutefois que les tableaux optimaux obtenus ne sont pas tout à fait identiques mais qui donnent la même valeur à Z. Ce qui nous permet de conclure que la solution optimale obtenue n'est pas unique mais multiple. Autrement dit, le problème tel qu'il est posé admet plusieurs solutions optimales équivalentes.

Solution unique ou multiple

On remarque que dans la case D_3C_5 du dernier tableau le coût marginal est nul. On peut donc se permettre de remplir cette case sans autant détériorer la solution courante mais qui ne permet pas non plus de l'améliorer. Ce qui nous conduit à une autre solution optimale équivalente.

Z=1020		$v_1=9$ V_A	$v_2=9$ V_B	$v_3=13$ V_C	$v_4=5$ V_D	$v_5=M$ V_F	
$u_1=-3$	C_1	8 ≤	6 5 +	10 - 30	9 ≤	M ≤	35
$u_2=0$	C_2	9 45	12 ≤	13 + ε	7 ≤	M 5 -	50
$u_3=0$	C_3	14 ≤	9 15 -	16 ≤	5 30	M = +	45
	b_j	45	20	30	30	5	

$\theta = 5 \Rightarrow \Delta Z_1 = (0)(5) = 0 \Rightarrow Z_1 = 1020-0 = 1020$ UM $= Z$

Z=1020		$v_1=9$ V_A	$v_2=9$ V_B	$v_3=13$ V_C	$v_4=5$ V_D	$v_5=M$ V_F	
$u_1=-3$	C_1	8	6 10	10 25	9 ≤	M ≤	35
$u_2=0$	C_2	9 45	12 ≤	13 5	7 ≤	M	50
$u_3=0$	C_3	14 ≤	9 10	16 ≤	5 30	M = 5	45
	b_j	45	20	30	30	5	

La solution optimale est dite unique lorsqu'il existe un seul plan de transport qui permet de minimiser le coût total désigné par la fonction économique. Cette situation se présente lorsque tous les signes résultant de la comparaison entre les coûts duals « u_i+v_j » et les coûts unitaires «c_{ij}» au niveau des cases vides (variables hors base) sont strictement négatifs. Dans ce cas, tout changement de base induira inévitablement la détérioration de la solution (augmentation du coût total).

En revanche, si l'on constate la présence d'une ou plusieurs case(s) vide(s) comportant le signe «= » (coût dual = coût unitaire), on déduit que la solution obtenue est multiple ; c'est-à-dire qu'il existe d'autres solutions optimales équivalentes (qui donnent à la fonction économique Z la même valeur). Il suffit d'introduire la nouvelle variable dont le coût marginal est nul dans la base, d'établir le parcours (circuit) correspondant pour aboutir à une autre solution équivalente.

CAS D'INTERDICTION

Le cas d'interdiction se traduit par une contrainte interdisant l'exploitation d'une ou plusieurs cases quelconques de la matrice des coûts unitaires. On peut citer, à titre d'exemple, la non-existence d'un chemin (voie ferrée) depuis une ville vers une destination ou l'absence de coopération entre une unité de production et un point de vente.

Pour résoudre un tel problème contenant le cas d'interdiction, il suffit de pénaliser la (les) case(s) correspondante(s) en y introduisant des coûts très élevés « M » pour éviter de les exploiter.