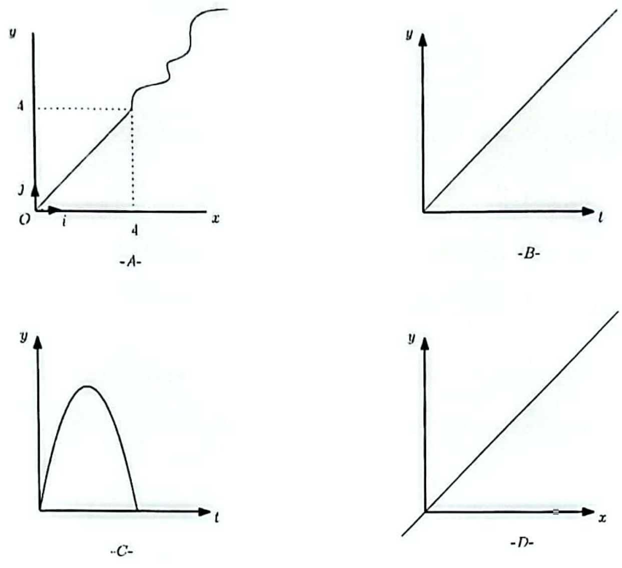
Série N°2 (à traiter en 7 séances)

Exercice 1

Soit les figures ci-dessous

A : Trajectoire du point M allant de 0 vers l'infini.
B : Point M se déplaçant le long de l'axe (OY).
C : Point M se déplaçant le long de l'axe (OY).
D: Trajectoire de M allant de $-\infty$ vers $+\infty$



Quelle est la nature du mouvement de M? Justifier.

Exercice 2

Un point matériel M est animé d'un mouvement rectiligne suivant l'axe (OX). Son équation horaire est :

$$x(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 1$$

1. Déterminer les expressions de la vitesse et de l'accélération du point matériel.
2. Déterminer les instants où le point matériel s'arrête.
3. Déterminer les périodes durant lesquelles le point matériel se déplace vers les x positifs et négatifs.
4. Déterminer les périodes pendant lesquelles le mouvement de ce point matériel est accéléré ou retardé.

Exercice 3

Dans un repère cartésien (O, x, y), muni de la base $(\vec{i}, \vec{j})$, un point M est en mouvement tel que :

$$\overrightarrow{OM} = (1 + \cos t)\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}.$$

1. Déterminer la nature de la trajectoire de M ?
2. Exprimer le vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes et déterminer son module.
3. En déduire la nature du mouvement et déterminer la vitesse angulaire ω ?
4. Exprimer le vecteur accélération en coordonnées cartésiennes et déterminer son module. Que représente cette accélération dans le repère de Frenet et pourquoi ?
5. Déterminer l'angle α que fait l'accélération avec la vitesse ?

ateur assis

6. Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur accélération en coordonnées polaires ?

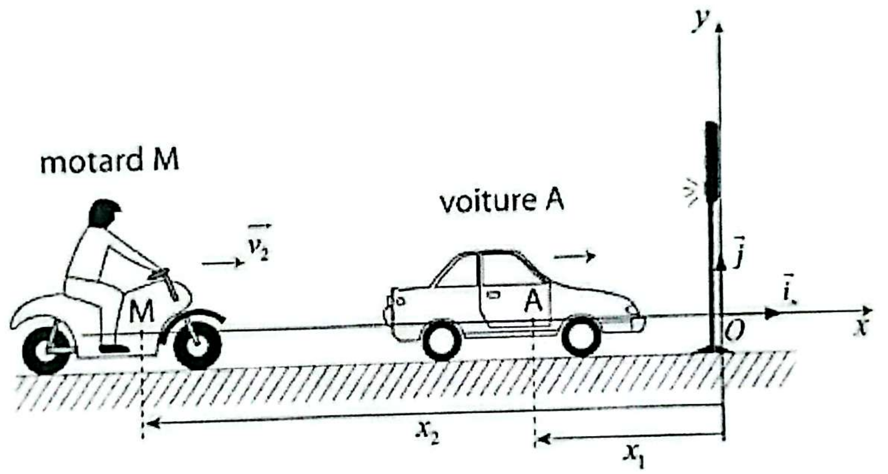
Exercice 4

Dans un plan OXY, un point M est repéré à tout instant par ses coordonnées cartésiennes:
$x(t) = \alpha\cos(\beta t)$, $y(t) = \alpha\sin(\beta t)$. ($\alpha$ *et* β constantes positives).

1. Déterminer les coordonnées polaires (ρ, θ) associées a la base locale $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$.
2. Déterminer les vecteurs position et vitesse de la particule M dans la base des coordonnées polaires.
3. Déterminer son vecteur accélération. Le mouvement est-il uniforme?
4. Représenter graphiquement les vecteurs vitesse et accélération à l'instant $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2\beta}$.
5. En s'appuyant de vos résultats précédants, donner les vecteurs vitesse et accélération dans la base locale de Frénet (accélération tangentielle a_T et accélération normale a_N). Ensuite déterminer l'abscisse curviligne $s(t)$.
6. Combien de temps faut-il à la particule M pour qu'elle fasse deux tours?
7. Notre particule M se déplace aussi suivant l'axe (OZ): $z(t) = \gamma t$. (γ constante positive). Tel que sa trajectoire peut etre décrite en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z). * Donner les coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) de M. Puis déterminer son vecteur position.
8. Représenter graphiquement la trajectoire de M en indiquant le début et le sens du mouvement.

Exercise 5

Une voiture A est arrêtée sur une route horizontale rectiligne à une distance $|x_1| = 3$ m d'un feu rouge. Lorsque le feu passe au vert à l'instant $t = 0$, la voiture démarre avec une accélération constante $a_1 = 3m/s^2$. Au même moment un motard M roulant à une vitesse constante $v_2 = 15$ m/s se trouve à une distance $|x_2| = 24$ m de la voiture.
La voiture et le motard considérés comme des points matériels sont repérée à l'instant t à l'aide de leurs vecteurs positions respectifs $\overrightarrow{OA} = x_A\vec{i}$ et $\overrightarrow{OM} = x_M\vec{i}$. On choisira comme origine O des abscisses la position du feu tricolore. (voir figure 1)



Part 1

1. Déterminer les équations horaires $x_A(t)$ et $x_M(t)$ de la voiture et du motard respectivement.
2. Déterminer les **instants** des dépassements ainsi que les **positions de la voiture et du motard** à ces instants.
3. Interpréter le résultat obtenu.

Part 2

On s'intéresse à présent à la trajectoire de la moto. Celle-ci aborde un rond-point de rayon $R = 10$ m avec une vitesse $v_2 = 6$ m/s (cette dernière a été réduite par le motard afin d'aborder le rond-point en toute sécurité) et maintient une vitesse constante.

1. Le mouvement a-t-il une accélération ? Expliquez.
2. Quelle est la nature du mouvement ?

3. On considère maintenant que la moto garde toujours une vitesse constante $v_2 = 6m/s$, mais la composante normale (centripète) de l'accélération varie. Quelle est la nature de ce mouvement a ce moment ?

Exercice 6

On considère une courbe (C) sur laquelle se déplace un point matériel M d'abscisse curviligne $s(t)$.
Le vecteur vitesse du point M dans un repère orthonormé direct $\mathscr{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est $\vec{V}(M/\mathscr{R})$ de module V.
On définit la base locale (ou base de Frenet) $(\vec{e_T},\vec{e_N},\vec{b})$ telle que :

$$\vec{V}(M/\mathscr{R}) = V\,\vec{e_T}.$$

1. Que désignent les vecteurs $\vec{e_T}$, $\vec{e_N}$ et $\vec{b}$?
2. Quelle relation existe-t-il entre $s(t)$ et V ?
3. Montrer que le vecteur accélération du point M dans le repère $\mathscr{R}$ est donné par :

$$\vec{a}(M/\mathscr{R}) = \frac{dV}{dt}\,\vec{e_T} + \frac{V^2}{R_c}\,\vec{e_N}$$

R_c étant le rayon de courbure de la trajectoire (C) au point M.

Exercice 7

Un point matériel se déplace sur une courbe (C) telle que sa position soit donnée à chaque instant par :

$$\vec{r}(t) = 3\cos(t)\,\vec{i} + 3\sin(t)\,\vec{j} + (4t-2)\,\vec{k}.$$

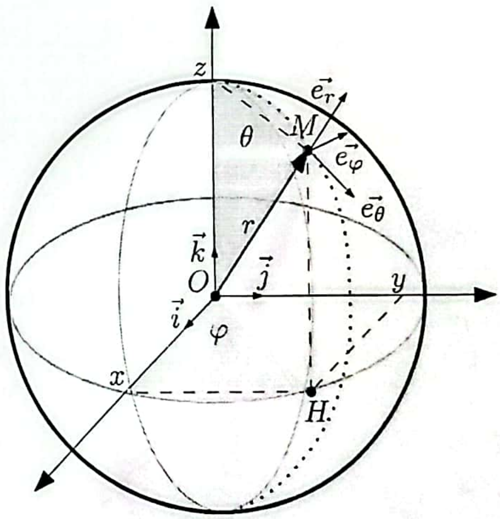
1. Trouver les expressions des vecteurs vitesse et accélération. En déduire leur module.
2. Trouver les expressions des vecteurs unitaires tangentiel $\vec{u_t}$ et normal $\vec{u_n}$ de la base intrinsèque. En déduire le rayon de courbure de la courbe (C).
3. Écrire le vecteur position $\vec{r}(t)$ dans la base $(\vec{e_\rho},\vec{e_\theta},\vec{e_z})$ associée aux coordonnées cylindriques (ρ,θ,z).
4. Déduire les expressions des vecteurs vitesse et accélération dans la base $(\vec{e_\rho},\vec{e_\theta},\vec{e_z})$.

Exercice 8

Le repérage d'un point M dans l'espace en utilisant les coordonnées cartésiennes est donné par ses coordonnées (x,y,z) avec :

x : l'abscisse, y : l'ordonnée, z : la hauteur (le côté).

Le même point peut être repéré dans un autre système de coordonnées appelé *système de coordonnées sphériques* par les coordonnées (r,θ,φ), avec r : le rayon, θ : la latitude et φ : la longitude. Comme le montre la figure ci-contre :



1. Écrire les coordonnées (r,θ,φ) en fonction de (x,y,z).
2. Écrire les coordonnées (x,y,z) en fonction de (r,θ,φ).
3. Ecrire le vecteur $\vec{e_r}$ en fonction des vecteurs de la base cartésuenne $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Puis determiner les vecteur $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$.
4. Ecrire le vecteur position, vitesse et accélération encoordonnées sphériques.

Exercice 9

Un train démarre avec une accélération horizontale constante $\vec{a}_e = a_0\vec{i}$ à l'instant $t=0$.
A un moment $t=t_0>0$; un enfant debout sur le quai lance sa balle vers le bas avec une vitesse $\vec{u}_0 = -u_0\vec{k}$ à partir d'une hauteur z_0 par rapport au sol:

1. Sachant que la bille est soumise seulement à l'accélération de la pesanteur $\vec{g} = -g\vec{k}$; déterminer sa vitesse $\vec{v}_a$ et sa position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ par rapport au repère terrestre dont l'origine coïncide avec les pieds de l'enfant (repère absolu)

2. Caractériser le mouvement du repère lié au train (repère relatif), en prenant comme son origine un observateur assis dans ce train, qui se trouvait en face de l'enfant à l'instant $t = 0$.

3. Déterminer la position $\vec{r'} = \overrightarrow{O'M}$ et la vitesse $\vec{v}_r$ relatives de la balle par rapport au train.

Exercice 10

Soit un repère fixe ($Oxyz$). Un repère mobile (O'X'Y'Z') tourne autour de "Oz" avec une vitesse angulaire ω constante. le point O' se déplace sur l'axe "Ox": $\overrightarrow{OO'} = \alpha t\vec{i}$. Un point M se déplace sur l'axe O'Y' tel que : $\overrightarrow{O'M} = bt^2\vec{j'}$ avec a et b des constantes positives.

Déterminer:

1. La vitesse relative $\vec{v_r}$ et la vitesse d'entrainement $\vec{v_e}$. En déduire sa vitesse absolue $\vec{v_a}$.
2. L'accélération relative $\vec{a_r}$, l'accélération d'entrainement $\vec{a_e}$ et l'accélération de Coriolis $\vec{a_c}$. En déduire l'accélération absolue $\vec{a_a}$.

Correction

Exercice 1

A: le graphe represente une trajectoir

$x \in [0, 4[$: **Mouvement Rectiligne.**
$x \in]4, +\infty[$: **Mouvement Curviligne.**

B: le point M se deplace le long de l'axe (oy) =====> mouvement rectiligne.
le graphe represente le diagramme de l'espace y et $\frac{dy}{dt}$ est constante =======> **Mouvement Rectiligne Uniforme.**

C: le graphe represente le diagramme de l'espace y.
Mouvement Rectiligne.

D: le graphe represente la trajectoire de M dans l'espace avec son equation de la trajectoir $y = ax$ =========>
Mouvement Rectiligne.

Exercice 2

1.

$$x(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 1 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 18t + 12 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{dv}{dt} = 12t - 18$$

2. Le mobile s'arrête $\Rightarrow v = 0 \Rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0$

$$\Delta = 1, \quad t_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \text{ s}, \quad t_2 = \frac{3+1}{2} = 2 \text{ s}$$

3. Le point matériel se déplace vers les x positifs : $v > 0 \Rightarrow t \in [0, 1[\cup]2, +\infty[$
Le point matériel se déplace vers les x négatifs : $v < 0 \Rightarrow t \in]1, 2[$

4.

$$a = \frac{dv}{dt} = 12t - 18 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \text{ pour } t = \frac{3}{2}$$

Donc :

$$a < 0 \text{ si } t \in [0, 3/2[, \quad a > 0 \text{ si } t \in]3/2, +\infty[$$

t		1		$\frac{3}{2}$		2	
$v(t)$	+	0	−	−	−	0	+
$a(t)$	−	−	−	0	+	+	+
$a \cdot v$	−	0	+	0	−	0	+

Exercice 3

1)– Nature de la trajectoire :

$$x = 1 + \cos t \quad \text{et} \quad y = \sin t$$

D'où :

$$(x-1)^2 = \cos^2 t \quad .... (1)$$
$$y^2 = \sin^2 t \quad .... (2)$$

(1) + (2) nous donne :

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

La trajectoire est donc un cercle de rayon $R = 1\,\text{m}$ et de centre $(1, 0)$.

2)– Vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}$$

Le module de la vitesse est :

$$v = 1\,\mathrm{m/s}$$

3)– La nature du mouvement :
La vitesse est constante donc le mouvement est **circulaire uniforme**. La vitesse angulaire ω est constante :

$$\omega = \frac{v}{R} = 1\,\mathrm{rad/s}$$

4)– Vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j}$$

Le module de l'accélération est : $a = 1\,\mathrm{m/s^2}$
Cette accélération représente l'accélération normale a_n dans le repère de Frenet car le mouvement est circulaire uniforme : l'accélération tangentielle est nulle $a_t = 0\,\mathrm{m/s^2}$.

5)– L'angle α entre l'accélération et la vitesse :
Par le produit scalaire ou le produit vectoriel :

$$\vec{a} \times \vec{v} = -\cos^2 t\,(\vec{i} \times \vec{j}) - \sin^2 t\,(\vec{j} \times \vec{i})$$

$$\Rightarrow \vec{a} \times \vec{v} = -\vec{k}$$

$$|\vec{a} \times \vec{v}| = 1$$

D'autre part :

$$|\vec{a} \times \vec{v}| = av\sin(\alpha) \Rightarrow \sin(\alpha) = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

6)– Vecteur vitesse et vecteur accélération en coordonnées polaires :
en coordonnée polaire
on a

$$\vec{OM} = r\vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{r}_\theta$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$$

On a

$$r = \sqrt{2(1+\cos t)} = 2\cos\frac{t}{2}$$

ou $1 + \cos t = 2\cos^2\frac{t}{2}$ et $\sin t = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$

$$\theta = \mathrm{atan}\left(\frac{\sin t}{1+\cos t}\right) = \frac{t}{2}$$

Au final

$$\vec{v} = -2\sin\frac{t}{2}\vec{e}_r + \cos\frac{t}{2}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = -\cos\frac{t}{2}\vec{e}_r + \sin\frac{t}{2}\vec{e}_\theta$$

Exercice 4

1.

$$\rho = \alpha, \qquad \theta = \beta t$$

2. $\vec{OM} = \alpha\vec{e_\rho}$
   $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{\rho}\vec{e_\rho} + \rho\dot{\theta}\vec{e_\theta} = \alpha\beta\vec{e_\theta}$

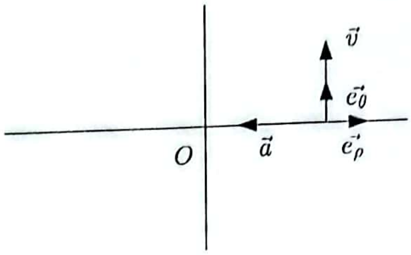
3. $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\rho}\vec{e_\rho} + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \rho\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - \rho\dot{\theta}^2\vec{e_\rho}$

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\vec{e_\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right)\vec{e_\theta}$$

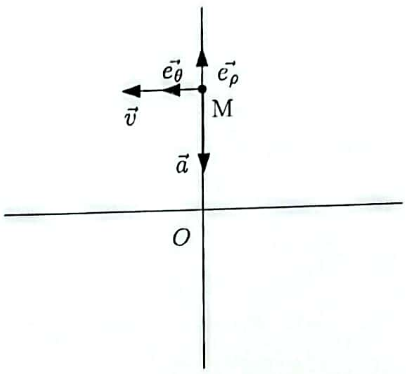
$$\vec{a} = -\alpha\beta^2\vec{e_\rho}$$

$v = \alpha\beta \rightarrow$ vitesse constante $\Rightarrow$ le mouvement est uniforme.
Et puisque ρ est constante $\Rightarrow$ MVT circulaire uniforme de centre O.

4. à t=0 $\Rightarrow \theta = 0$



à $t = \dfrac{\pi}{2\beta} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$



5. Puisque on est dans un MVT circulaire de centre $O \Rightarrow$ dans la base de Frenet

$$\vec{e_\theta} = \vec{e_T}$$

$$\vec{e\rho} = -\vec{e_N}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_T = 0 \\ a_N = \alpha\beta^2 \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = \alpha\beta^2\vec{e_N}$$

Calcule de l'abscisse curviligne. On a

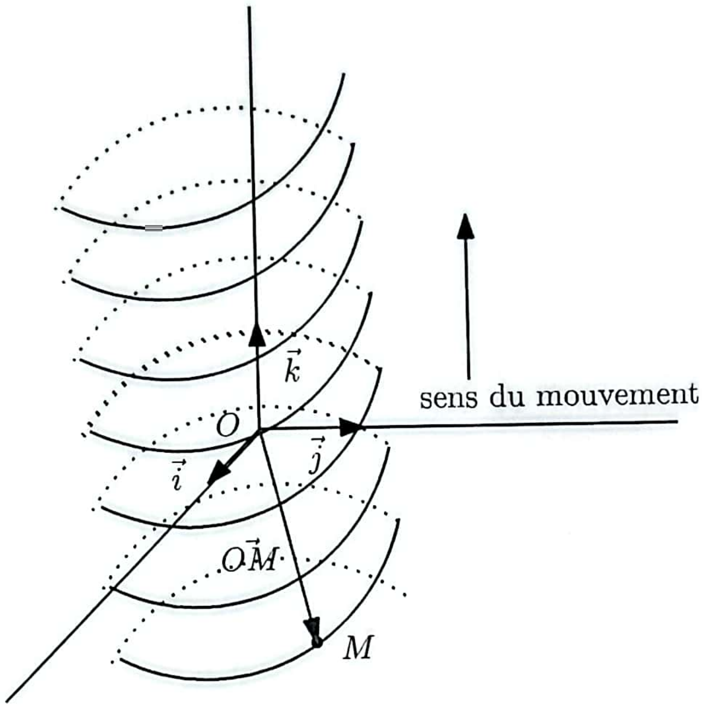
$$v = \frac{dS}{dt} = \alpha\beta \Rightarrow S(t) = \alpha\beta t + C$$

et a $t = 0$, $S(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

6. Pour 2 tour, on a $S(t) = 4\pi\alpha = \alpha\beta t \Rightarrow t = \frac{4\pi}{\beta}$ s

7. $(\alpha, \beta t, \gamma t)$

$$\vec{OM} = \alpha\vec{e_\rho} + \gamma t\vec{k}$$



8.

Exercice 5

Données

Origine O au feu tricolore, axe x orienté vers la droite.

$$x_A(0) = -3 \text{ m}, \qquad x_M(0) = x_A(0) - 24 = -27 \text{ m},$$

$$a_1 = 3 \text{ m/s}^2, \qquad v_2 = 15 \text{ m/s}.$$

Partie 1

(1) Équations horaires

Voiture A (mouvement uniformément accéléré, $v_A(0) = 0$) :

$$x_A(t) = x_A(0) + \tfrac{1}{2}a_1 t^2 = -3 + \tfrac{3}{2}\,t^2, \qquad v_A(t) = a_1 t = 3t.$$

Motard M (mouvement uniforme) :

$$x_M(t) = x_M(0) + v_2 t = -27 + 15t.$$

(2) Instants des dépassements

On résout $x_A(t) = x_M(t)$:

$$-3 + \tfrac{3}{2}t^2 = -27 + 15t \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{3}{2}t^2 - 15t + 24 = 0$$

$$t^2 - 10t + 16 = 0 \Longrightarrow t = \frac{10 \pm \sqrt{36}}{2} \Rightarrow t_1 = 2 \text{ s}, \; t_2 = 8 \text{ s}.$$

Positions :

$$x(t_1) = x_A(2) = -3 + \tfrac{3}{2} \cdot 2^2 = 3 \text{ m}, \qquad x(t_2) = x_A(8) = -3 + \tfrac{3}{2} \cdot 8^2 = 93 \text{ m}.$$

(3) Interprétation

Au départ le motard est derrière la voiture. Il la rattrape et la dépasse à $t_1 = 2$ s (après le feu). Plus tard la voiture, accélérant, redevient plus rapide et rattrape le motard à $t_2 = 8$ s.

Partie 2 – rond-point

Le motard aborde le rond-point de rayon $R = 10$ m avec une vitesse réduite $v = 6$ m/s.

1. Y a-t-il une accélération ? Oui : bien que la norme de la vitesse soit constante, la direction change continûment sur le cercle. Il y a donc une accélération centripète.

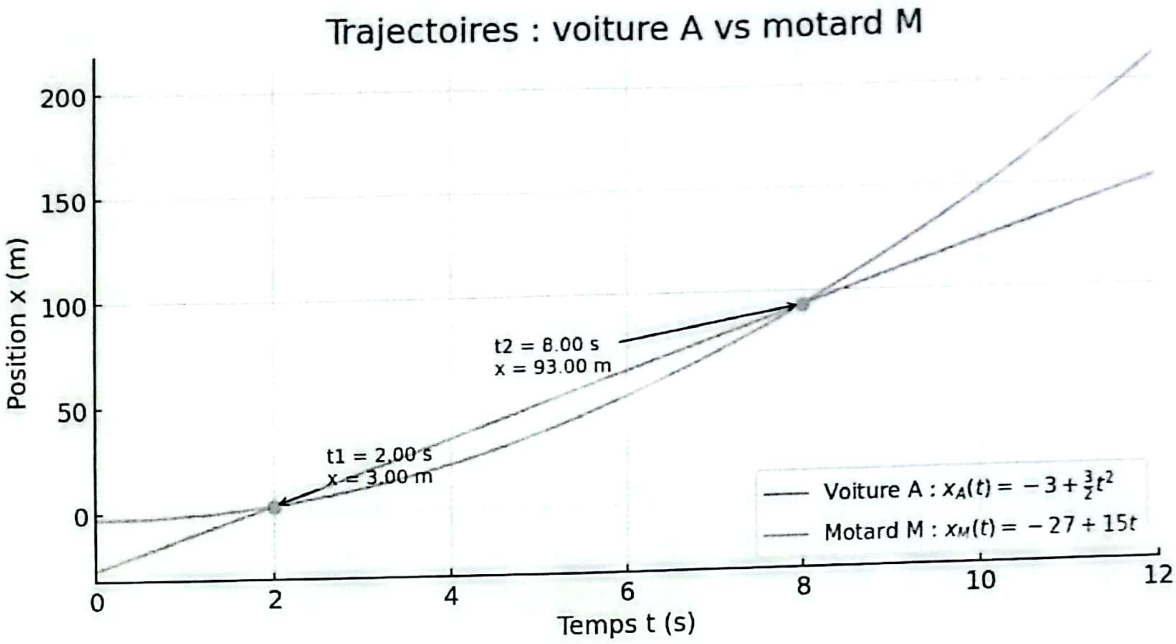


Figure 1:

2. Nature du mouvement Mouvement circulaire uniforme, avec norme de l'accélération centripète

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{6^2}{10} = 3{,}6 \text{ m/s}^2,$$

et vitesse angulaire

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{6}{10} = 0{,}6 \text{ rad/s}.$$

3. Nature du Mouvement, 2eme cas

- Si v_2 est constante, alors toute variation de a_N provient d'une variation du rayon de courbure R.
- Autrement dit, le mobile ne décrit plus un cercle de rayon fixe, mais une trajectoire courbe dont le rayon de courbure change avec le temps.

Au final:
Le mouvement est **curviligne uniforme** (vitesse constante) mais non circulaire, car le rayon de courbure varie.

Exercice 6

1. Si la trajectoire d'un mobile M est connue

On peut l'orienter et choisir un point origine O. La position du mobile M est repérée par son abscisse curviligne s (valeur algébrique de l'arc $\widehat{OM}$). Le repère de Frenet est lié au point M. Il comporte deux vecteurs unitaires $\vec{e_T}$ et $\vec{e_N}$ suivant la direction $\vec{T}$ et la direction normale $\vec{N}$ donc :

$$\begin{cases} \vec{e_T} : & \text{Vecteur unitaire tangent à la trajectoire en } M \text{ et de même sens que le mouvement,} \\ \vec{e_N} : & \text{Vecteur unitaire normal à la trajectoire en } M \text{ et dirigé vers le centre de la courbure,} \\ \vec{b} : & \text{Vecteur unitaire perpendiculaire au plan contenant } \vec{e_T} \text{ et } \vec{e_N}. \end{cases}$$

On obtient $\vec{b}$ par la relation :

$$\vec{b} = \vec{e_T} \wedge \vec{e_N}.$$

2. Relation entre $s(t)$ et V

Lorsque l'on fait varier de façon élémentaire la position du point M en décrivant la trajectoire, l'*abscisse curviligne* s varie. Le point M passe de s à $s + ds$ entre l'instant t et l'instant $t + dt$. Le déplacement élémentaire est tangent à la trajectoire et s'écrit alors :

$$d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = ds\,\vec{e_T}.$$

Ainsi, la vitesse est donnée par :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec{e_T}.$$

3. Vecteur accélération du point M dans la base de Frenet

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{e_T})}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{e_T} + v\frac{d\vec{e_T}}{dt}.$$

Donc, la composante tangentielle de l'accélération est :

$$\vec{a_T} = \frac{dv}{dt}\vec{e_T}, \qquad a_T = \frac{dv}{dt}, \quad v = \|\vec{v}\|.$$

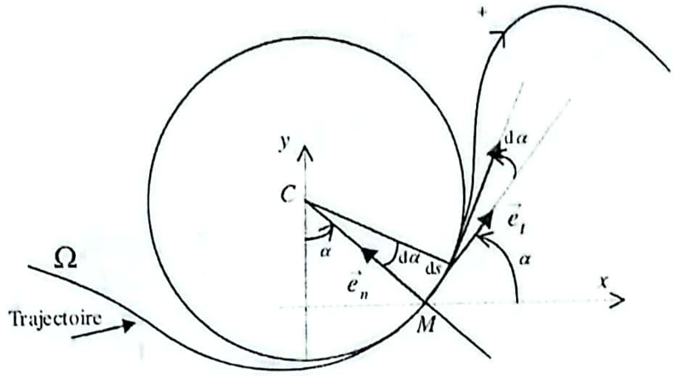
Calculons maintenant la dérivée de $\vec{e_T}$:

$$\frac{d\vec{e_T}}{dt} = \frac{d\vec{e_T}}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\vec{e_T}}{d\alpha}\frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{dt}.$$

Ou α est l'angle entre $\vec{OM}$ et $\vec{OM'}$.

La dérivée du vecteur unitaire $\vec{e_T}$ par rapport à α correspond à un vecteur unitaire qui lui est perpendiculaire, qu'on note $\vec{e_N}$, dirigé vers le centre du cercle osculateur C. Le vecteur $\vec{e_N}$ est donc normal à la trajectoire au point M et dirigé vers la concavité de la courbe.

D'après la figure, l'arc de cercle $ds = R_c\, d\alpha$, donc :



$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R_c},$$

où R_c est le rayon de courbure (ou rayon du cercle osculateur).

$$\frac{ds}{dt} = \dot{S} = v$$

$$\frac{d\vec{e_T}}{dt} = \frac{1}{R_C}v\vec{e_N}$$

Donc

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e_T} + \frac{v^2}{R_C}\vec{e_N}$$

Remarque:

- On pourra vérifier que ce résultat est toujours vrai quelle que soit la concavité de la trajectoire.
- La composante normale étant toujours positive, le vecteur accélération est toujours tourné vers la concavité de la trajectoire au point considéré.

Exercice 7

1. Vecteur vitesse et accélération

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -3\sin(t)\,\vec{i} + 3\cos(t)\,\vec{j} + 4\,\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -3\cos(t)\,\vec{i} - 3\sin(t)\,\vec{j}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{9\sin^2(t) + 9\cos^2(t) + 16} = 5, \qquad \|\vec{a}\| = \sqrt{9\cos^2(t) + 9\sin^2(t)} = \sqrt{9} = 3$$

2. Les vecteurs unitaires $\vec{u}_t$ et $\vec{u}_n$

$$\vec{u}_t = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}, \qquad \vec{u}_n = \frac{\vec{a}_n}{a_n} = \frac{\vec{a}_n}{\|\vec{a}_n\|}$$

$$\vec{u}_t = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{5}\left(-3\sin(t)\,\vec{i} + 3\cos(t)\,\vec{j} + 4\,\vec{k}\right)$$

On a $\dfrac{d\|\vec{v}\|}{dt} = 0$, donc $a_t = 0$ et ainsi $\vec{a}_n = \vec{a}$.

$$\vec{u}_n = \frac{\vec{a}_n}{a_n} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = -(\cos(t)\,\vec{i} + \sin(t)\,\vec{j})$$

3. Coordonnées cylindriques

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = 3, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = t$$

Les coordonnées cylindriques de M sont :

$$\rho = 3, \quad \theta = t, \quad z(t) = (4t - 2)t$$

Vecteur position :

$$\vec{r} = 3\,\vec{e}_\rho + (4t - 2)\,\vec{k}$$

Pour le vecteur vitesse et accélération, on a:

$$\frac{d\theta}{dt} = 1, \qquad \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta = \vec{e}_\theta, \qquad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\,\vec{e}_\rho = -\vec{e}_\rho$$

Vecteur vitesse :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 3\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + 4\,\vec{k} = 3\vec{e}_\theta + 4\,\vec{k}, \qquad v = 5$$

Vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 3\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -3\vec{e}_\rho, \qquad a = 3$$

Exercice 8

Un système de coordonnées sphérique est un système de coordonnées tridimensionnel qui peut être vu comme une extension à trois dimensions d'un système polaire et dans lequel la position d'un point est donnée par:

- le rayon r qui est la distance entre le point et l'origine du repère utilisé,
- la longitude φ et la latitude θ, deux angles dont la définition exacte est donnée plus bas.

Au même titre que des coordonnées polaires permettent de représenter la position de n'importe quel point dans le plan, les coordonnées sphériques permettent de représenter la position de n'importe quel point dans l'espace. Cela dit, elles sont plus simples à comprendre si on admet que tous les points dont on désire représenter la position se trouvent à la surface d'une sphère dont le centre est l'origine du repère utilisé. Dans ce cas, le rayon de chacun des points est identique, et les deux coordonnées restantes — la longitude et la latitude — suffisent donc à représenter leur position.

1. (r, θ, φ) en fonction de (x, y, z) :

On a $\rho = OH = \sqrt{x^2 + y^2} = r\sin\theta$, $\quad HM = z$

Attention: Le point H se trouve a l'interieur de la sphere de rayon r et sur le cercle de rayon ρ, $r \geq \rho$

$$\begin{cases} r = \sqrt{OH^2 + HM^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \tan\theta = \dfrac{\rho}{z} = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

2. (x, y, z) en fonction de (r, θ, φ) :

$$\begin{cases} x = OH\cos\varphi = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = OH\sin\varphi = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

3. Représentation vectorielle

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = r\sin\theta\cos\varphi\vec{i} + r\sin\theta\sin\varphi\vec{j} + r\cos\theta\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM} = r(\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k})$$

En coordonnées sphériques on a :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$$

Par identification :

$$\vec{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}$$

On peut déterminer le vecteur unitaire $\vec{e}_\theta$ par :

$$\vec{e}_\theta = \frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k}$$

On peut déterminer le vecteur unitaire $\vec{e}_\varphi$ par :

$$\vec{e}_\varphi = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}$$

4. Vecteurs position, vitesse et accélération dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$

Sachant que $\theta = \theta(t)$ et $\varphi = \varphi(t)$, on montre que

$$\frac{d\vec{e_r}}{dt} = \dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{\varphi}\sin\theta\vec{e_\varphi}$$

$$\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e_r} + \dot{\varphi}\cos\theta\vec{e_\varphi}$$

$$\frac{d\vec{e_\varphi}}{dt} = -\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e_r} - \dot{\varphi}\cos\theta\vec{e_\theta}$$

Vecteur position:

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$$

Vecteur vitesse

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e_r} + r\frac{d\vec{e_r}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\,\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$

Vecteur accélération

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi\right) \\ &= \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + \dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\sin\theta\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\end{aligned}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\,\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)\,\vec{e}_\theta + (r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta)\,\vec{e}_\varphi$$

Exercice 9

1. Position de la balle

$$\vec{a} = -g\vec{k} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v_x = C_1 \\ v_z = -gt + C_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v_x = 0 \\ v_z = -g(t - t_0) - u_0 \end{cases}$$

où nous avons utilisé les conditions $v_x(t_0) = 0$ et $v_z(t_0) = -u_0$ afin de fixer C_1 et C_2.
Après intégration et en utilisant les conditions $x(t_0) = 0$ et $z(t_0) = z_0$, on aboutit aux coordonnées de la balle :

$$\begin{cases} x = C_3 \\ z = -\dfrac{gt^2}{2} + (gt_0 - u_0)t + C_4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = -\dfrac{g}{2}(t - t_0)^2 - u_0(t - t_0) + z_0 \end{cases}$$

2. Mouvement du repère relatif

Les vecteurs des bases des deux repères sont les mêmes ($\vec{i} = \vec{i'}$ et $\vec{k} = \vec{k'}$) car le train est en translation. Par contre, l'origine O' du repère relatif (le train) démarre à partir de O avec une accélération $a_0\vec{i}$ par rapport au repère absolu (la Terre), et cela depuis l'instant $t = 0$.

En effet :

$$\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = a_0\vec{i} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_e = a_0 t\,\vec{i} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OO'} = \frac{a_0}{2}t^2\vec{i}.$$

3. Position relative de la balle

$$\vec{r'} = \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'} = \left(-\frac{g}{2}(t - t_0)^2 + u_0(t - t_0) + z_0\right)\vec{k} - \frac{a_0}{2}t^2\vec{i}.$$

La vitesse relative est :

$$\vec{v}_r = \vec{v}_a - \vec{v}_e = \left[-g(t - t_0) - u_0\right]\vec{k} - a_0 t\,\vec{i}.$$

Exercice 10

On considère :

$$\vec{OO'} = at\,\vec{i} \qquad \vec{O'M} = bt^2\,\vec{j'}$$

avec a et b des constantes positives, et

$$\vec{\omega} = \omega\,\vec{k'} = \omega\,\vec{k}.$$

1. Vitesse dans le repère fixe

$$\vec{V}_r = \left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right|_{R'} = 2bt\,\vec{j'}.$$

$$\vec{V}_e = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{O'M} = a\vec{i} + \omega bt^2(\vec{k'} \times \vec{j'}) = a\vec{i} - \omega bt^2\,\vec{i'}.$$

$$\boxed{\vec{V}_e = a\vec{i} - \omega bt^2\,\vec{i'}}.$$

Relations de passage

$$\begin{cases} \vec{i'} = \cos(\omega t)\,\vec{i} + \sin(\omega t)\,\vec{j} \\ \vec{j'} = -\sin(\omega t)\,\vec{i} + \cos(\omega t)\,\vec{j} \end{cases}$$

$$\vec{V}_r = 2bt\,\vec{j'} = -2bt\sin(\omega t)\,\vec{i} + 2bt\cos(\omega t)\,\vec{j}.$$

$$\vec{V}_e = (a - \omega bt^2\cos(\omega t))\vec{i} - \omega bt^2\sin(\omega t)\,\vec{j}.$$

$$\boxed{\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e}.$$

$$\vec{V}_a = (a - \omega bt^2\cos\omega t - 2bt\sin\omega t)\vec{i} + (2bt\cos\omega t - \omega bt^2\sin\omega t)\vec{j}.$$

2. Accélération

Accélération relative

$$\vec{a}_r = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{V}_r}{\mathrm{d}t}\right|_{R'} = 2b\,\vec{j}' = 2b(-\sin\omega t\,\vec{i} + \cos\omega t\,\vec{j}).$$

Accélération d'entraînement

$$\vec{a}_e = \frac{\mathrm{d}\vec{V}_e}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times O'\vec{M} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times O'\vec{M}).$$

$$\vec{a}_e = 0 + \omega\vec{k}' \times (-\omega bt^2\vec{i}') = -\omega^2 bt^2\vec{j}'.$$

$$\boxed{\vec{a}_e = -\omega^2 bt^2\vec{j}'} = -\omega^2 bt^2[-\sin(\omega t)\vec{i} + \cos(\omega t)\vec{j}].$$

Accélération de Coriolis

$$\vec{a}_c = 2(\vec{\omega} \times \vec{V}_r) = 2(\omega\vec{k}' \times 2bt\vec{j}') = 4\omega bt(-\vec{i}').$$

$$\boxed{\vec{a}_c = -4\omega bt\vec{i}'} = -4\omega bt[\cos(\omega t)\vec{i} + \sin(\omega t)\vec{j}].$$

Accélération absolue

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c.$$

$$\boxed{\vec{a}_a = [-2b\sin(\omega t) + \omega^2 bt^2\sin(\omega t) - 4\omega bt\cos(\omega t)]\vec{i} + [2b\cos(\omega t) - \omega^2 bt^2\cos(\omega t) - 4\omega bt\sin(\omega t)]\vec{j}}.$$