Série N°01

Exercice N°1 :

1. Déterminer les dimensions et les unités dans le système international (SI) des grandeurs physiques suivantes : Énergie cinétique, Puissance.

2. La vitesse d'un mobile dans un mieux fluide est donnée par la relation suivante :

$$v = v_0 e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

Où $\boldsymbol{v_0}$ et $\boldsymbol{\tau}$ sont des constantes physiques. Trouver la dimension de $\boldsymbol{v_0}$ et $\boldsymbol{\tau}$, ainsi que leurs unités dans le système international.

3. Vérifier l'homogénéité des formules suivantes :

$$x = 3at^2 + vt + h\,;v = gx\cos(\omega t)$$

Où v est une vitesse, a une accélération, t un temps, g l'accélération de la pesanteur, ω une pulsation et , h des distances.

4. On considère un satellite de masse m effectuant une trajectoire circulaire de rayon R autour de la Terre de masse M.Soit T la période de révolution du satellite. Par analyse dimensionnelle, retrouver la 3ème loi de Kepler de la forme :

$$\frac{T^\alpha}{T^\beta} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

G est la constante gravitationnelle dont l'unité dans le système international (SI) est $m^3.\,kg^{-1}.\,s^{-2}$

- Trouver les valeurs de α et β.

Exercice N° 2 :

On considère, dans un repère cartésien orthonormé $\mathcal{R}(Oxyz)$, les trois vecteurs suivants :

$$\vec{V}_1 = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 4\vec{k}\ ;\ \vec{V}_2 = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 4\vec{k}\,;\ \vec{V}_3 = 5\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}$$

1. Calculer leurs modules.

2. Représenter le vecteur $\vec{V}_1$

3. Calculer les composantes du vecteur $\vec{U} = \vec{V}_1 - 2\vec{V}_2 + 3\vec{V}_3$

4. Déterminer le vecteur unitaire porté par le vecteur $\vec{V}_1$.

5. Calculer le produit scalaire $\vec{V}_1.\vec{V}_2$ et en déduire l'angle formé par ces deux vecteurs.

6. Calculer le produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ et en déduire l'aire du parallélogramme formé par ces deux vecteurs.

7. Calculer le produit mixte $\vec{V}_1.\,(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$ et le double produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$.

Exercice N° 3 :

1. Calculer le gradient du champ scalaire suivant:

$$(x,y,z) = 2x^2yz^3 - 3x^3y^2z$$

2. Calculer la divergence du champ vectoriel suivant :

$$\vec{V}(x,y,z) = (x^3y - 2xz)\,\vec{\imath} + (y^3z - 2yx)\,\vec{\jmath} + (z^3x - 2zy)\,\vec{k}$$

3. Calculer le rotationnel du champ vectoriel suivant :

$$\vec{V}\,(x,y,z) = (2xy + z^3)\vec{\imath} + (x^2 + 2y)\vec{\jmath} + (3x\,z^2 - 2)\vec{k}$$

Exercices supplémentaires

Exercice S1

La masse volumique $\boldsymbol{\rho}$ d'un cylindre de masse $\boldsymbol{m}$, de rayon $\boldsymbol{R}$ et de longueur $\boldsymbol{l}$ est donnée par la relation suivante

$$\rho = \frac{m^{x}}{\pi l^{y} R^{2}}$$

- En utilisant l'analyse dimensionnelle, trouver les deux constantes $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ *;*
- En déduire l'expression exacte de la masse volumique $\boldsymbol{\rho}$.

Exercice S2

Deux points A et B, ont pour coordonnées cartésiennes dans l'espace : $(3,4,-4)$,$B(6,8,3)$. Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ ainsi que son module, sa direction et son sens.

Exercice S3

Soient les vecteurs $\vec{V}_1\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, $\vec{V}_2\begin{pmatrix}3\\3\sqrt{3}\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{V}_3\begin{pmatrix}0\\\sqrt{3}\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$:

1. Représenter dans un repère orthonormé $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ le vecteur $\vec{V}_1$.
2. Calculer les modules de ces trois vecteurs.
3. Calculer $2\vec{V}_1 - 3\vec{V}_2 + 4\vec{V}_3$.
4. Déduire les expressions des vecteurs unitaires $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ des directions de $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$.
5. Calculer $\vec{V}_1.\vec{V}_2$, $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$, $\vec{V}_1.(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$ et $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$.
6. En considérant l'angle θ compris entre 0 et π, calculer $\cos\theta = \cos(\vec{u}_2, \vec{u}_3)$. Calculer les composantes du vecteur $\vec{u}_{23} = \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3$. En déduire $\sin\theta$.

Exercice S4

a- Soient les trois points : $A(2,-3)$, $B(3,0)$ et $C(-2,x)$

1. Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Déterminer x pour que les trois points soient alignés.

b- Déterminer la valeur du nombre a pour laquelle les vecteurs $\vec{V}_1 = 3\vec{\imath} + a\vec{\jmath} + \vec{k}$ et $\vec{V}_2 = 4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 2\vec{k}$ soient perpendiculaires.

Exercice S5

Calculer le module, la première dérivée et la seconde dérivée de la fonction, de la variable t, suivante :

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{1}{2}t^2 - 3t + 2\right)\vec{\imath} + (e^{-\alpha t})\vec{\jmath} + (\cos(\omega t))\vec{k}(\alpha\ et\ \omega\ sont\ des\ constantes)$$

Calculer l'intégrale $\int \vec{v}(t)dt$ sachant que:

$\vec{v}(t) = (-2t+3)\vec{\imath} + (3t^2)\vec{\jmath} + (\sin(\omega t) + e^{\alpha t})\vec{k}$ $(\alpha\ et\ \omega\ sont\ des\ constantes)$ sachant que $\vec{v}(0) = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$

Exercice S6

Calculer le gradient du champ scalaire suivant:

$$V(x,y,z) = xyz + xy^2z + xyz^2$$

Calculer la divergence du champ vectoriel suivant:

$$\vec{E}(x,y,z) = (xyz)\vec{\imath} + (x+y+z)\vec{\jmath} + \left(\frac{xy}{z}\right)\vec{k}$$

Calculer le rotationnel du champ vectoriel suivant:

$$\vec{B}(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{y}{z}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{z}{x}\right)\vec{k}$$

Corrigé de la série de TD N°1

Exercice N°1 :

1- Les dimensions et les unités des grandeurs physiques :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow [E_c] = \left[\frac{1}{2}\right][m][v]^2 = ML^2T^{-2}, unité : kg.m^2.s^{-2}\ (Joule, J)$$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{E}{t} \rightarrow [P] = \frac{[W]}{[t]} = \frac{ML^2T^{-2}}{T} = ML^2T^{-3}, unité : kg.m^2.s^{-3}\ (Watt)$$

2- La dimension de $\boldsymbol{v_0}$ et $\boldsymbol{\tau}$, ainsi que leurs unités dans le système international.

$$[v] = [v_0]\left[\exp(-\frac{t}{\tau})\right] \Rightarrow [v] = [v_0] \text{ et } \left[\frac{t}{\tau}\right] = 1$$

Donc $[v_0] = LT^{-1}$ et $[\tau] = [t] = T$.

L'unité en SI de v_0 est $\left(\frac{m}{s}\right)$

L'unité en SI de τ est (s)

3- l'homogénéité des formules :

$$[x] = L, [\alpha] = LT^{-2}, [t] = T, [h] = L$$
$$[x] = L$$
$$[3][\alpha][t]^2 = LT^{-2}T^2 = L\ et\ \ [h] = L$$

Elle est homogène mais elle n'est pas juste. Donc, une équation homogène n'est pas obligatoirement juste.

$$[v] = \frac{[d]}{[t]} = LT^{-1},$$
$$[v] = \frac{[g]}{[g]}[\cos(\omega t)]$$

On a $[\cos(\omega t)] = 1\ par\ definition$ $\quad \omega = \frac{2\pi}{T_1}\ (T_1\ la\ periode) \rightarrow [\omega] = \frac{[2\pi]}{[T_1]} = T^1$

$$[\omega t] = 1$$

$$[v] = \frac{[g]}{[x]} = \frac{LT^{-2}}{L} = T^{-2} \neq LT^{-1} \rightarrow elle\ \ n'estpas\ homogene$$

4- Les valeurs de α et β

$$T^\alpha/R^\beta = 4\pi^2/GM \rightarrow \frac{[T]^\alpha}{[R]^\beta} = \frac{1}{[G]^\gamma[M]^\lambda} \rightarrow T^\alpha L^{-\beta} = L^{-3}T^2 \rightarrow \begin{cases}\alpha = 2\\ \beta = 3\end{cases}$$

Exercice N°2 :

$$\|\vec{V}_1\| = \sqrt{41}\ ;\ \ \|\vec{V}_2\| = \sqrt{29}\ ;\ \ \|\vec{V}_3\| = \sqrt{35}$$

$$\vec{U} = \vec{V}_1 - 2\vec{V}_2 + 3\vec{V}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -13 \\ 21 \end{pmatrix}$$

$$\vec{U} = 14\vec{\imath} - 13\vec{\jmath} + 21\vec{k}$$

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{V}_1}{\|\vec{V}_1\|} = \frac{3}{\sqrt{41}}\vec{\imath} - \frac{4}{\sqrt{41}}\vec{\jmath} + \frac{4}{\sqrt{41}}\vec{k}$$

$$\vec{V}_1.\vec{V}_2 = -22 = \|\vec{V}_1\|\|\vec{V}_2\|\cos(\vec{V}_1,\vec{V}_2) \Rightarrow \cos(\vec{V}_1,\vec{V}_2) = \frac{\vec{V}_1.\vec{V}_2}{\|\vec{V}_1\|\|\vec{V}_2\|} = -\frac{22}{1395}$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 4\vec{\imath} + 20\vec{\jmath} + 17\vec{k}$$

L'aire du parallélogramme formé par les deux vecteurs : $S = \|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\| = \sqrt{693}\ u.s$

$$\vec{V}_1.(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 71$$

N.B. On peut aussi calculer $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$ ensuite on fait le produit scalaire $\vec{V}_1.(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$

Exercice N°3 :

$$\overrightarrow{grad}U = \vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

$\frac{\partial U}{\partial x} = 4xyz^3 - 9x^2y^2z$; $\frac{\partial U}{\partial y} = 2x^2yz^3 - 6x^3yz$ et $\frac{\partial U}{\partial z} = 6x^2yz^2 - 3x^3y^2$

$$\overrightarrow{grad}U = (4xyz^3 - 9x^2y^2z)\vec{\imath} + (2x^2z^3 - 6x^3yz)\vec{\jmath} + (6x^2yz^2 - 3x^3y^2)\vec{k}$$

$$div\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 3(x^2y + y^2z + z^2x) - 2(x + y + z)$$

$$\overrightarrow{rotV} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\vec{k} = \vec{0}$$