LE MODELE D'AFFECTATION:

Le programme d'affectation a trait à une catégorie spéciale de programmes linéaires dans laquelle la fonction économique consiste à affecter un nombre de sources (ou origines) au même nombre de destination à un coût minimum ou à un profit maximum. Le problème d'affectation est donc un cas particulier d'un problème de transport où a_i = 1, i = 1,2, …,m et b_j = 1, j= 1,2, …, n ; de plus n = m et les valeurs des variables de décision sont binaires (0 ou 1).

Le problème de d'affectation consiste à déterminer par exemple l'affectation optimale de n individus à n postes de travail qui minimiserait le temps de fabrication.

Formulation d'un programme d'affectation :

Min ou Max Z = $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$

Avec les contraintes $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = 1,2,...,n$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1,2,...,n$$

X_{ij} = 1 ou 0 pour tout i et j (X_{il} correspond à l'affectation éventuelle de la ressource i à l'activité j :

- X_{ij} =1 si la ressource i est affectée à l'activité j,
- sinon X_{ij} = 0 si la ressource i n'est pas affectée à l'activité j.

c_{ij} correspond au coût associé à l'affectation de la ressource i à l'activité j.

Comme le problème d'affectation est considéré comme un cas particulier du problème de transport, on peut donc se permettre de le résoudre à l'aide des méthodes conçues pour la résolution des problèmes de transport[1].

Toutefois, il est également possible de recourir à une méthode dite hongroise ou méthode de Kuhn qui consiste à suivre les étapes suivantes :

1. En partant de la matrice initiale des coûts $[C_{ij}]$, trouver le minimum de chaque ligne (L_i) et soustraire cette valeur de toutes les cases pour obtenir une nouvelle matrice : $[C'_{ij}]= [C_{ij} - L_i]$;
2. En partant de cette nouvelle matrice $[C'_{ij}]$, trouver le minimum des colonnes C_j et soustraire cette valeur de toutes les cases pour obtenir une autre nouvelle matrice $[C''_{ij}]= [C'_{ij} - C_j]$. A ce moment là, on obtient une matrice qui contient beaucoup de « 0 » ;
3. Couvrir les zéros de la matrice $[C''_{ij}]$ avec le minimum possible de traits (horizontaux ou verticaux). Il faut noter qu'il est toujours possible de le faire avec « n » traits (n étant le nombre de sources ou de destinations puisque m=n). Si le nombre minimum de traits utilisés est n (si t=n), la solution optimale est alors obtenue en procédant à l'affection des sources aux destinations en se servant des zéros de la matrice obtenue $[C''_{ij}]$. Si le nombre de traits utilisés est inférieur à n (t<n), poursuivre avec l'étape suivante :

[1] L'application de ces différentes techniques de transport pour la résolution des problèmes d'affectation nécessite plusieurs itérations et conduit généralement au traitement de la dégénérescence. C'est pourquoi, on préfère plutôt recourir à la méthode de Kuhn qui s'avère plus efficace.

4. Trouver le nombre « f » qui correspond au minimum des éléments non couverts de la matrice C_{ij} ;
5. Trouver une nouvelle matrice [C'''_{ij}] telles :
   - [C'''_{ij}] = [C''_{ij}] si l'élément (i,j) est couvert une seule fois (soit horizontalement soit verticalement). C'est-à-dire les éléments couverts par un seul trait (horizontalement ou verticalement) ne changent pas.
   - [C'''_{ij}] = [C''_{ij} - f] si l'élément (i,j) est n'est pas du tout couvert (si l'élément de la matrice C_{ij} n'est pas du tout couvert par un trait, on doit lui soustraire la valeur « f »).
   - [C'''_{ij}] = [C''_{ij} + f] si l'élément (i,j) est doublement couvert (horizontalement et verticalement) ; c'est-à-dire si l'élément de la matrice C_{ij} est couvert par deux traits (l'un vertical et l'autre horizontal), il convient de lui rajouter la valeur « f ».
   - Retourner à l'étape 3.

Application numérique :

Considérons un atelier où il y a quatre machines M_j qu'on désire affecter aux quatre tâches T_i. Le coût de réalisation de la tache T_i par la machine M_j est c_{ij} (en UM). Le tableau suivant renferme les différents coûts à supporter :

C_{ij}	T_1	T_2	T_3	T_4	L_i
M_1	**3**	5	8	4	3
M_2	6	**4**	6	6	4
M_3	4	**3**	7	7	3
M_4	5	**3**	4	7	3

Après avoir identifié le minimum de chaque ligne « L_i », on soustrait ce minimum de chaque élément de la ligne de la matrice C_{ij}. On obtient alors une nouvelle matrice C'_{ij} ci-contre.

C'_{ij}	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	0	2	5	1
M_2	2	0	2	2
M_3	1	0	4	4
M_4	2	0	1	4

C'_{ij}	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	**0**	2	5	**1**
M_2	2	**0**	2	2
M_3	1	0	4	4
M_4	2	0	**1**	4
C_j	0	0	1	1

Après avoir identifié le minimum de chaque colonne « C_j », on soustrait ce minimum de chaque élément de la colonne de la matrice C'_{ij}. On obtient alors une nouvelle matrice C''_{ij} ci-contre.

C''_{ij}	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	0	2	4	0
M_2	2	0	1	1
M_3	1	0	3	3
M_4	2	0	0	3

Nous avons obtenu une matrice C''_{ij} qui contient beaucoup de zéros. Couvrons tous ces derniers en utilisant le minimum possible de traits (verticaux ou horizontaux).
Conseil : pour utiliser le minimum possible de traits « t », il est préférable de repérer une ligne ou une colonne contenant un seul zéro puis de procéder à la couverture du zéro ainsi trouvé soit verticalement soit horizontalement de manière à barrer le maximum de zéros s'y trouvant sur la ligne ou la colonne. Si on n'y trouve pas de ligne ou colonne contenant un seul zéro, on procède au choix de la ligne ou colonne contenant deux zéro et ainsi de suite.

Appliquons ces règles à la matrice C''$_{ij}$ précédente :

C''$_{ij}$	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	0	2	4	0
M_2	2	0	1	1
M_3	1	0	3	3
M_4	2	0	0	3

Dans la 1ère colonne, il ya un seul zéro, barrons ce zéro horizontalement pour couvrir l'autre zéro qui se trouve dans la quatrième colonne.
Ensuite, dans la 2ème ligne, il y a un seul zéro, barrons-le verticalement pour couvrir les autres zéros de la 2ème colonne. Enfin, il nous reste un seul zéro, barrons –le soit horizontalement soit verticalement (de façon arbitraire)

Tous les zéros sont couverts ; le nombre de traits « t » utilisés pour couvrir ces zéros est t=3.

Le nombre de sources ou destinations n= 4.

On conclue que t<n, la solution optimale n'est pas encore obtenue ; il convient alors de rechercher la nouvelle matrice C'''$_{ij}$ et de procéder par étapes la suite des calculs comme suit :

Déterminons d'abord le minimum des éléments non couverts : on constate que f= 1

Reportons les éléments qui ne changent pas (éléments couverts une seule fois par un trait vertical ou par un trait horizontal).

C'''$_{ij}$	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	0		4	0
M_2		0		
M_3		0		
M_4	2		0	3

Ensuite, déterminons les valeurs des éléments de la matrice C'''$_{ij}$ correspondant aux éléments de C''$_{ij}$ qui ne sont pas du tout couverts. On doit soustraire la valeur f de ces derniers.

C'''$_{ij}$	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	0		4	0
M_2	1	0	0	0
M_3	0	0	2	2
M_4	2		0	3

Enfin, pour les éléments doublement couverts (par 2 traits) on va leur ajouter la valeur f.
Aussitôt on termine d'inscrire tous les éléments de la matrice C'''$_{ij}$, on tentera encore de couvrir tous les zéros de la nouvelle matrice obtenue en utilisant toujours le minimum de traits.

C'''$_{ij}$	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	0	3	4	0
M_2	1	0	0	0
M_3	0	0	2	2
M_4	2	1	0	3

C'''$_{ij}$	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	0	3	4	0
M_2	1	0	0	0
M_3	0	0	2	2
M_4	2	1	0	3

Nous avons couvert tous les zéros et on constate que le nombre de traits utilisés à cet effet est égal à 4. Puisque t=4=n, on arrête les calculs et on détermine la solution optimale.

On reprend la dernière matrice et on choisit un zéro (de la même façon dont ont a procédé pour la couverture des zéros) et on élimine les autres zéros figurant sur la même ligne ou la même colonne.
A noter que dans chaque ligne et chaque colonne, on devrait encadrer un zéro. Ce qui correspond à l'affectation de la source à la destination.

Il convient également de noter que si plusieurs choix se présentent pour encadrer un zéro, cela veut dire que nous sommes en face d'un problème acceptant deux ou plusieurs solutions optimales équivalentes. Si par contre, il s'avère qu'il existe une seule façon de choisir un zéro dans chaque ligne et dans chaque colonne, on déduit que le problème en question accepte une solution optimale unique.

C'''_{ij}	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	0	3	4	0
M_2	1	0	$\cancel{0}$	0
M_3	0	0	2	2
M_4	2	1	$\boxed{0}$	3

Choisissons la 4ème ligne contenant 1 seul zéro et hachurons l'autre zéro figurant sur la colonne 3. On constate ensuite que les lignes et les colonnes restantes contiennent chacune 2 zéros. Le choix est multiple, optons pour l'un des zéros de façon arbitraire comme suit :

C'''_{ij}	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	$\boxed{0}$	3	4	$\cancel{0}$
M_2	1	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$
M_3	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$	2	2
M_4	2	1	$\boxed{0}$	3

En choisissant le 1er zéro (ligne 1, colonne 1), on barre les autres zéros figurant sur cette ligne et cette colonne. Puis, on optera de fait pour l'autre zéro figurant seul dans la ligne 3 et on barre le zéro figurant sur cette colonne. Enfin, on choisit le zéro restant en colonne 4 (ligne 2). Ce qui donne l'affectation suivante : M_1T_1, M_2T_4, M_3T_2 et M_4T_3 et la valeur du coût total z= 3+6+3+4= 16 UM.

Puisque dans le tableau précédent, on avait un choix multiple concernant le repérage des zéros, on conclue donc que le problème admet une autre solution optimale équivalente. Pour l'identifier, il suffit de choisir un autre zéro dans la première ligne (ligne 1 et colonne 4 au lieu de la ligne 1 et colonne 1).

C'''_{ij}	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	$\cancel{0}$	3	4	$\boxed{0}$
M_2	1	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$
M_3	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	2	2
M_4	2	1	$\boxed{0}$	3

On reprend la situation précédente (après le choix du zéro de la ligne 4). Ensuite, en choisissant le 2ème zéro (ligne 1, colonne 4), on barre les autres zéros figurant sur cette ligne et cette colonne. Puis, on optera de fait pour l'autre zéro restant seul sur la ligne 2 et on barre les autres zéros figurant sur la ligne et la colonne correspondantes. Finalement, on choisit le zéro de la ligne 3. Ce qui donne l'affectation suivante : M_1T_4, M_2T_2, M_3T_1 et M_4T_3 et la valeur du coût total z= 4+4+4+4= 16 UM.

MODELE D'AFFECTATIONT DESEQUILIBRE

Le traitement d'un problème d'affectation déséquilibré (le nombre de sources ne correspond pas au nombre de destinations) se fait de la même manière que celui du transport (nous avons d'ailleurs noté précédemment que le modèle d'affectation est un cas particulier du modèle de transport). Il suffit de rajouter une ligne ou une colonne manquante (source ou destination fictive) et de pénaliser les cases correspondantes par l'introduction des coûts très élevés « M ». Après application de la méthode de Kuhn au modèle équilibré ainsi trouvé, on ignorera la source ou la destination fictive en considérant *in fine* que M = 0. Ce qui débouchera sur une solution (unique ou multiple) acceptant une source sans destination ou une destination sans source.

Application numérique (modèle d'affectation déséquilibré)

Une agence de promotion immobilière doit réaliser quatre lots de logements. Cinq entreprises ont soumissionné en proposant les devis indiqués dans le tableau ci-après. La législation impose à l'agence de n'accorder qu'un seul lot pour une entreprise (un x signifie que l'entreprise n'a pas fait de proposition de devis).

Les devis ci-dessous sont exprimés en millions de dinars :

	Entreprise 1	Entreprise 2	Entreprise 3	Entreprise 4	Entreprise 5
Lot 1	16	15	18	12	14
Lot 2	17	16	17	x	15
Lot 3	15	14	16	12	13
Lot 4	x	16	15	13	16

En utilisant la méthode hongroise (Kuhn), déterminer l'affectation optimale permettant de minimiser les coûts de réalisation des projets ?

<u>Solution :</u>

Nous sommes en face d'un problème d'affectation déséquilibré contenant des cas d'interdiction. Ajoutons donc une source fictive (lot fictif L_F) pour équilibrer le modèle et procédons ensuite à la pénalisation aussi bien des cases du lot fictif que celles des cases concernées par les cas d'interdiction.

C_{ij}	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	L_i
L_1	16	15	18	12	14	12
L_2	17	16	17	M	15	15
L_3	15	14	16	12	13	12
L_4	M	16	15	13	16	13
L_F	M	M	M	M	M	M

→

C'_{ij}	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
L_1	4	3	6	0	2
L_2	2	1	2	M-15	0
L_3	3	2	4	0	1
L_4	M-13	3	2	0	3
L_F	0	0	0	0	0
C_j	0	0	0	0	0

C''_{ij}	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
L_1	4	3	6	0	2
L_2	2	1	2	M-15	0
L_3	3	2	4	0	1
L_4	M-13	3	2	0	3
L_F	0	0	0	0	0

→

C'''_{ij}	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
L_1	4	3	6	0	2
L_2	2	1	2	M-15	0
L_3	3	2	4	0	1
L_4	M-13	3	2	0	3
L_F	0	0	0	0	0

t=3<n=5, f= 1

C'''_{ij}	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
L_1	3	2	5	0	2
L_2	1	0	1	M-15	0
L_3	2	1	3	0	1
L_4	M-14	2	1	0	3
L_F	0	0	0	1	1

t=3
f= 1

C'''_{ij}	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
L_1	2	1	4	0	1
L_2	1	0	1	M-14	0
L_3	1	0	2	0	0
L_4	M-15	1	0	0	2
L_F	0	0	0	2	1

Il est impossible d'utiliser moins de 5 traits pour pouvoir couvrir tous les zéros, nous avons donc à la solution optimale. Comme nous avons eu deux choix possibles quant à la façon de barrer les derniers zéros de la matrice précédente (soit horizontalement soit verticalement), nous déduisons de ce fait que le problème admet deux solutions optimales équivalentes que nous allons identifier.

C'''_{ij}	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
L_1	2	1	4	$\boxed{0}$	1
L_2	1	$\boxed{0}$	1	M-14	~~0~~
L_3	1	~~0~~	2	~~0~~	$\boxed{0}$
L_4	M-15	1	$\boxed{0}$	~~0~~	2
L_F	$\boxed{0}$	~~0~~	~~0~~	2	1

Ou bien

C'''_{ij}	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
L_1	2	1	4	$\boxed{0}$	1
L_2	1	~~0~~	1	M-14	$\boxed{0}$
L_3	1	$\boxed{0}$	2	~~0~~	~~0~~
L_4	M-15	1	$\boxed{0}$	~~0~~	2
L_F	$\boxed{0}$	~~0~~	~~0~~	2	1

Solution 1 : L_1E_4, L_2E_2, L_3E_5, L_4E_3 et L_FE_1
Coût total min : 12+16+13+15+0= 56 UM

Solution 2 : L_1E_4, L_2E_5, L_3E_2, L_4E_3 et L_FE_1
Coût total min : 12+15+14+15+0=56 UM.

On remarque que les deux solutions suggèrent l'élimination de l'entreprise 1 car elle propose des devis plus chers.

<u>Cas de maximisation dans le modèle d'affectation :</u>

Reconsidérons l'exercice précédent concernant l'atelier qui dispose de quatre machines qu'on désire affecter aux quatre tâches. Admettons que les chiffres indiqués dans la matrice désignent plutôt des profits à réaliser (au lieu de coûts). On doit donc envisager de maximiser le profit total tout en appliquant la méthode hongroise (Kuhn).

P_{ij}	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	3	5	**8**	4
M_2	6	4	6	6
M_3	4	3	7	7
M_4	5	3	4	7

Pour maximiser le profit total, il est d'abord nécessaire de transformer cette matrice qui appelle la maximisation en une matrice appelant la minimisation. Pour ce faire, identifions l'élément le plus grand de la matrice initiale (ici, nous avons 8 comme max des profits) et retranchons tous les profits de cet élément. Ce qui nous donne la nouvelle matrice suivante :

Tab1	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	5	3	0	4
M_2	2	4	2	2
M_3	4	5	1	1
M_4	3	5	4	1

Appliquons la méthode de Kuhn en commençant par retrancher le minimum de chaque ligne

Tab 2	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	5	3	0	4
M_2	0	2	0	0
M_3	3	4	0	0
M_4	2	4	3	0

Déterminons le minimum de chaque colonne et faisons les différences

Tab3	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	5	1	0	4
M_2	0	0	0	0
M_3	3	2	0	0
M_4	2	2	3	0

Barrons les zéros avec le minimum possible de traits.

Tab 4	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	5	1	0	4
M_2	0	0	0	0
M_3	3	2	0	0
M_4	2	2	3	0

t= 3 ; n = 4 ; f = 1

Tab5	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	4	0	0	4
M_2	0	0	1	1
M_3	2	1	0	0
M_4	1	1	3	0

Barrons les zéros avec le minimum possible de traits.

Tab 4	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	~~4~~	~~0~~	~~0~~	~~4~~
M_2	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~
M_3	~~2~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~
M_4	~~1~~	~~1~~	~~3~~	~~0~~

t= n = 4 ; nous avons atteint la solution optimale, identifions la en tenant compte de la matrice initiale des profits :

Tab5	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	4	0	~~0~~	4
M_2	0	~~0~~	1	1
M_3	2	1	0	~~0~~
M_4	1	1	3	0

Machine	Tâche	Profit	Profit total maximum = 5+6+7+7= 25 UM. C'est une solution optimale unique.
M_1	T_2	5	
M_2	T_1	6	
M_3	T_3	7	
M_4	T_4	7	

<u>Conseils pratiques</u>

- Avant d'entamer la résolution d'un problème de transport (ou d'affectation) et ce quelle que soit la technique utilisée, il est nécessaire de procéder à l'équilibrage du modèle.
    - S'il y a un excès de disponibilité, cela veut dire qu'il y a un manque de demande. Pour équilibrer le modèle de transport (ou affectation), il convient alors de compenser ce manque en rajoutant une demande virtuelle (colonne fictive). Les cases correspondantes vont comporter des coûts nuls. Toutefois, l'annulation des coûts figurant sur la colonne fictive peut présenter un inconvénient majeur à savoir privilégier ces cases contenant des coûts très bas alors qu'il est souhaitable de les éviter du fait qu'elles sont virtuelles. De même, on peut supposer l'existence des coûts réels mais nuls (cas où, par exemple, les coûts sont à la charge du client). Ce qui prête à confusion entre coûts nuls et coûts virtuels également nuls. C'est pourquoi, il est préférable de procéder à la pénalisation des cases de la colonne fictive rajoutée en y indiquant des coûts très élevés « M ». Après avoir obtenu la solution optimale, on ignore la colonne ou la ligne fictive ainsi rajoutée et dont les cases sont pénalisées.
    - Face à un problème de transport déséquilibré où la demande est supérieure à l'offre, une attention particulière doit être prêtée à sa résolution. Si le problème tel qu'il est posé exige que soit satisfaite la demande totale, on déduit que ce problème n'admet pas de solution (puisqu'il est impossible de satisfaire cette contrainte). Si par contre, la situation le permet (on accepte une solution où il n'est pas exigé de satisfaire la totalité de la demande exprimée), il suffit d'équilibrer le modèle en question et de pénaliser les cases (en y indiquant des coûts unitaires colossaux M) de la colonne ou de la ligne fictive rajoutée.

- Le modèle de transport traite généralement les problèmes de minimisation (la fonction économique consiste souvent à trouver le minimum de Z). Si toutefois, le problème correspond à une situation à maximiser (bénéfice, chiffre d'affaires, profit, etc.), on peut résoudre un tel problème en transformant la matrice initiale qui requiert la maximisation en une matrice qui requiert la minimisation pour pouvoir appliquer les techniques connues du modèle de transport. Pour ce faire, il suffit d'identifier l'élément le plus élevé de la matrice à maximiser et de soustraire ensuite tous les coefficients de la matrice initiale de ce maximum pour obtenir une nouvelle matrice. On applique ensuite l'une des techniques connues (Nord-Ouest, Vogel ou moindre coûts pour trouver la solution de base) à la nouvelle matrice ainsi trouvée et on enchaine avec la recherche de la solution optimale (affectation optimale). Pour déterminer la valeur optimale de la fonction économique originale, il suffit alors de revenir à la matrice initiale (de maximisation) en adoptant le plan optimal ainsi trouvé depuis la matrice transformée.

- Pour éviter la dégénérescence dans le problème de transport et notamment lors de la recherche de la solution de base (affectation des quantités du produit depuis les sources vers les différentes destinations), il est recommandé de ne pas saturer simultanément la ligne et la colonne sinon, on aura moins de « n+m-1 » variables de base. Pour ce faire, il est nécessaire de décider de saturer soit ligne soit la colonne concernée (et non pas les deux à la fois) et dans l'autre on décide d'affecter une quantité « ε » dans l'une de ses cases. Cela revient à considérer que la variable de base en question (case contenant « ε ») est nulle.

- Cette dégénérescence se présente aussi lors de l'établissement des boucles censées améliorer la solution obtenue lorsqu'on est amené à remplir une case et vider plusieurs autres. Compte tenu d'un circuit préétabli, il convient alors de remplir une seule case (faire entrer une nouvelle variable de base, c'est-à-dire remplir une seule case qui était vide) et de vider une seule case qui était remplie (faire sortir une seule variable de la base) et dans les autres cases concernées par le circuit et contenant des quantités nulles, on y indiquera la même valeur « ε ». Cette dernière sera finalement (dans le dernier tableau optimal) considérée comme nulle.

- Dans le problème de transport ou d'affectation, on peut imaginer des cas d'interdiction (contrainte imposant le non remplissage d'une case ou plusieurs cases). A titre d'exemple, on peut supposer la non-existence d'un chemin menant d'une source « i » vers une destination « j ». Dans ce cas, il convient de pénaliser la case correspondante en y indiquant un coût colossal « M » (inutile de spécifier sa valeur). Ce coût très très élevé nous permettra d'éviter le remplissage de la case concernée par l'interdiction après application de l'une des techniques de transport qu'on a vues précédemment.