Analyse I

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année LMD
Année universitaire 2025–2026

✠– Série d'application numéro 2–✠

Exercice 1 :
a. Déterminer la limite éventuelle de chacune des suites numériques suivantes :

1. $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$, 2. $v_n = \dfrac{\sin n + \cos n}{n}$
3. $w_n = \dfrac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$ 4. $t_n = \dfrac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$.

b. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite définie par : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+k}$.
Montrer, à l'aide du théorème d'encadrement, que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 2 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par :

$$\begin{cases} 0 < u_1 < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ u_{n+1} = u_n - 2u_n^3 \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $0 < u_n < \frac{1}{\sqrt{2}}$.
2. Étudier la monotonie de (u_n).
3. Déduire la convergence de (u_n) et calculer sa limite.
4. Déterminer $supE$, $InfE$ où $E = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 3 : Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a < b$. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = b \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}. \end{cases}$$

Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 4 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = -5$.
1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Déterminer le sens de variation de le suite (u_n).
4. Quelle est la limite de (u_n).

Exercice 5 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$.
1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Déterminer le sens de variation de le suite (u_n).
4. Quelle est la limite de (u_n).

«Corrigé»

Exercice n°1

Q.

Multiplié et divisé par le conjugué

1) $\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1} = \dfrac{\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)\left(\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}\right)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}$

$= \dfrac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}} = \dfrac{2\cancel{n}}{\cancel{n}\left[\sqrt{1+1/n+1/n^2}+\sqrt{1-1/n+1/n^2}\right]}$

$= \dfrac{2}{\left(\sqrt{1+1/n+1/n^2}+\sqrt{1-1/n^2+1/n^2}\right)}$. Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{2} = 1}$$

2) $\dfrac{\sin n+\cos n}{n}$. Il est clair que $\begin{cases} -1 \leq \sin n \leq 1 \\ -1 \leq \cos n \leq 1 \\ -2/n \leq v_n \leq 2/n \end{cases}$

alors $-2 \leq \sin n+\cos n \leq 2 \Rightarrow$

Si on prend $u_n = -2/n$, $w = 2/n$, $n \in \mathbb{N}^*$, on trouve que $u_n \leq v_n \leq w_n$ avec $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$. Donc d'après le théorème d'encadrement (Gendarmes)

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$$

3) $\dfrac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n} = \dfrac{n\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right)}{n\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)}$. Comme

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\left(\dfrac{1-\frac{(-1)^n}{n}}{1+\frac{(-1)^n}{n}}\right) = 1$

4) $\dfrac{3^n-2^n}{3^n+2^n} = \dfrac{3^n\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{3^n\left(1+\left(2/3\right)^n\right)} = \dfrac{1-\left(2/3\right)^n}{1+\left(2/3\right)^n}$.

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2/3\right)^n = 0$ car $0<2/3<1$, donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} \cancel{}_n = 1$.

b. $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+k}$. Comme $k\in\{1,2,\dots,n\}$,

alors $1 \leq k \leq n \Rightarrow 1+n^2 \leq k+n^2 \leq n+n^2$

$\Rightarrow \dfrac{1}{n^2+n} \leq \dfrac{1}{k+n^2} \leq \dfrac{1}{n^2+1}$

$\Rightarrow \dfrac{n}{n^2+n} \leq \dfrac{n}{k+n^2} \leq \dfrac{n}{n^2+1}$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+n} \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+k} \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+1}$

$n\left(n/_{n^2+n}\right)$ $\qquad$ $n\left(\dfrac{n}{n^2+1}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \dfrac{n^2}{n^2+1}$

or $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = 1 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$. donc

d'après le théoreme d'encodrement

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$$

? ?

Exercice n° 2 : $0 < u_n < 1/\sqrt{2}$

1/ Démonstration par recurrence.

* pour $n=1$, on a $0 < u_1 < 1/\sqrt{2}$ (est vérifiee / initialisation)

* Supposons qu'elle est vraie pour n c'est-à-dire

$0 < u_n < 1/\sqrt{2}$ (hypothèse de recurrence)

et montrons que $0 < u_{n+1} < 1/\sqrt{2}$

✓ on a $u_{n+1} = u_n - 2u_n^3 = u_n(1 - 2u_n^2)$.

Comme $u_n < 1/\sqrt{2} \Rightarrow u_n^2 < 1/2 \Rightarrow 2u_n^2 < 1$

$\Rightarrow (1 - 2u_n^2) > 0 \Rightarrow \boxed{u_{n+1} > 0}$ ★

✓ Posons $f(x) = x - 2x^3$ (fct à étudier sur $]0, \sqrt{1/2}[$

$f'(x) = 1 - 6x^2 > 0 \ \forall x \in]0, 1/\sqrt{6}[$

$f'(x) = 1 - 6x^2 < 0 \ \forall x \in]1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{2}[$.

x	0		$1/\sqrt{6}$		$1/\sqrt{2}$
$f(x)'$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{6}}$ Max	$\searrow$	$\square$

le maximum est atteint en $1/\sqrt{6}$

Comme $\frac{2}{3\sqrt{6}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors $\forall x \in]0\ 1/\sqrt{2}[$

$f(x) < 1/\sqrt{2}$ donc $u_{n+1} < 1/\sqrt{2}$ $**$

$*$ et $**$ montrent que

$0 < u_{n+1} < 1/\sqrt{2}$, alors

par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $0 < u_n < 1/\sqrt{2}$

2/ Monotonie de u_n : $u_{n+1} - u_n = -2u_n^3 < 0$

car $u_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Donc u_n est strictement décroissante $\searrow$

3/ Convergence de (U_n) et $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

$U_n \searrow$ et minorée par 0, alors U_n converge vers une limite $\ell \geq 0$.

$U_{n+1} = U_n - 2U_n^3 \underset{\begin{pmatrix}\text{passage}\\ \text{à la}\\ \text{limite}\end{pmatrix}}{\Rightarrow} \ell = \ell - 2\ell^3$

$\Rightarrow \cancel{\ell} - \cancel{\ell} + 2\ell^3 = 0 \Rightarrow 2\ell^3 = 0 \Rightarrow \boxed{\ell = 0}$

Donc U_n converge vers 0.

4) $E = \{U_n, n \in \mathbb{N}^*\}$

$U_n \searrow \Rightarrow \sup(E) = U_1$

U_n minorée par 0 (en plus tend vers 0 quand $n \to +\infty$)

alors $\inf(E) = 0$

Exercice n° 03 1) U_n et V_n sont adjacentes ?

Montrons que U_n est $\nearrow$ croissante.

$U_{n+1} = \sqrt{U_n V_n}$ Dans ce cas on doit vérifier que U_n, V_n sont bien définis et sont positifs.

* Montrons par recurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$

$0 < U_n < V_n$

On a: $U_0 = a > 0$, $V_0 = b > 0$, $a < b$ donc

$\boxed{0 < U_0 < V_0}$ verifiée pour $n=0$

Supposons quelle est vraie pour n c'est-à-dire

$\boxed{0 < U_n < V_n}$ et montrons que

$\boxed{0 < U_{n+1} < V_{n+1}}$.

$0 < U_n < V_n \Rightarrow U_n V_n > 0$, donc $U_{n+1} = \sqrt{U_n V_n}$ est bien définie et positif.

On a aussi $V_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2} > 0$.

maintenant ~~...~~ on va montrer que

$U_{n+1} < V_{n+1}$.

On a $U_{n+1} = \sqrt{U_n V_n} < \dfrac{U_n + V_n}{2} = V_{n+1}$

car $(\sqrt{V_n} - \sqrt{U_n})^2 = V_n + U_n - 2\sqrt{U_n V_n} > 0$

$\Rightarrow 2\sqrt{U_n V_n} < U_n + V_n \Rightarrow \boxed{\sqrt{U_n V_n} < \dfrac{U_n + V_n}{2}}$

(ici l'inégalité est stricte car $\boxed{U_n \neq V_n}$

(6)

a) $u_n \nearrow$?
$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} > \sqrt{u_n u_n} = u_n \quad \left(\text{car } u_n < v_n\right)$$

b) $v_n \searrow$?
$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} < \frac{v_n + v_n}{2} = v_n \quad \left(\text{car } u_n < v_n\right)$$

c) $\lim (v_n - u_n) \overset{?}{=} 0$

On a : $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n}$
$$= \frac{1}{2}\left[u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n}\right] = \frac{1}{2}\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right)^2$$

Or $\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right)^2 = \left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right)\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right) <$
$\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right)\left(\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}\right)$, donc

$\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right)^2 < (v_n - u_n)$, alors

$v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n)$. On peut utiliser cette inégalité de la même manière pour $v_n - u_n$ c'est-à-dire

$\left(u_n - v_n < \frac{1}{2}(v_{n-1} - u_{n-1})\right.$

Donc on obtient

$$\cancel{v}_{n+1} - u_{n+1} < \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(v_{n-1} - u_{n-1}\right)$$

..... et à la fin on obtient

$$v_{n+1} - u_{n+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\left(v_0 - u_0\right)$$

Ce qui montre que car $\underline{(u_n - v_n) < \left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a)}$

$$\lim_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$$

Donc a, b, c montrent que

u_n et v_n sont adjacentes

<u>Exercice n° 4</u> $u_0 = -5$, $r = 2$ $\left(u_n = u_0 + nr\right)$

1) $u_1 = -3$, $u_2 = -1$

$u_3 = 1$

2) $u_n = u_0 + nr = \boxed{-5 + 2n}$

3) $u_{n+1} - u_n = 2 > 0$

$\Rightarrow u_n$ st $\nearrow$

4) $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to \infty}(-5 + 2n)$

$= \boxed{+\infty}$

Exercice n° 05

$u_0 = 1/2$, $q = 2$

1)

$u_1 = 1$, $u_2 = 2$

$u_3 = 4$

2) $u_n = u_0 \times q^n = \frac{1}{2} \cdot 2^n$

$= 2^{n-1}$

3)

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 > 1$, alors

$u_n \nearrow$.

Rq : on a utilise

$\frac{u_{n+1}}{u_n}$ car tous

les termes de u_n

sont positifs

Sinon $\frac{-2}{-1} = 2 > 1$

mais $(u_{n+1} = -2) <$

$(u_n = -1)$

4)

$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} 2^{n-1}$

$= \boxed{+\infty}$