Série d'application 03 : les fonctions réelles à une seule variable

Exercice 1 : Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ **2)** $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{2}{x^2-4}$ **3)** $h(x) = \ln(4-x^2)$

4) $k(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-3}$ **5)** $m(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-4}}$

Exercice 2 : Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$ **2)** $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^3-x+1}{3x^3+2x^2-5}$ **3)** $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{3x}$

4 $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ **5)**$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$

Exercice 3 : Étudier la continuité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ au point $x = 1$
2. $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ au point $x = 0$
3. $k(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$ au point $x = 1$

Exercice 4 :

1. La fonction $f(x) = |x-2|$ est-elle dérivable en $x = 2$?
2. Étudier la dérivabilité de $h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en $x = 0$

Exercice 5 :

1. Montrer que $f(x) = x(x-1)(x-2)$ satisfait le théorème de Rolle sur $[0, 2]$
2. Le théorème de Rolle s'applique-t-il à $f(x) = |x|$ sur $[-1, 1]$?
3. Utiliser le TAF pour prouver que $|\sin a - \sin b| \leq |a-b|$
4. Trouver c dans le TAF pour $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $[1, 3]$

Exercice 6 : Calculer les limites suivantes en utilisant la règle de L'Hôpital :

1) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-x-1}{x^2}$ **2)** $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{e^x}$ **3)** $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$

4) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$ **5)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ **6)** $\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x$

Exercice 7 : I) Pour chaque fonction, déterminer le domaine de définition et la dérivée :

1) $f(x) = \arcsin(2x-1)$ **2)** $g(x) = \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)$

3) $h(x) = \text{argch}(x^2-2)$ **4)** $k(x) = \ln(\arccos x)$

II) Démontrer que :

1)$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1, 1]$, **2)**$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \forall x > 0$

Solutions détaillées série d'application : Fonctions d'une variable réelle

Exercice 1 : Domaine de définition

1. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$
   Solution : $9 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$
   $\boxed{[-3, 3]}$
2. $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{2}{x^2-4}$
   Solution :
   — $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$
   — $x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$
   $\boxed{]1, +\infty[\setminus\{2\}}$
3. $h(x) = \ln(4 - x^2)$
   Solution : $4 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow -2 < x < 2$
   $\boxed{]-2, 2[}$
4. $k(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-3}$
   Solution :
   — $x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$
   — $x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$
   $\boxed{[-2, 3[\cup]3, +\infty[}$
5. $m(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-4}}$
   Solution : $\frac{x-1}{x-4} \geq 0$
   Tableau de signes :
   — $x < 1$: positif
   — $1 < x < 4$: négatif
   — $x > 4$: positif
   $\boxed{]-\infty, 1]\cup]4, +\infty[}$

Exercice 2 :

1. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$
   Solution : $\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = x^2 + x + 1$
   $\boxed{3}$
2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-x+1}{3x^3+2x^2-5} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3}{3x^3}$
   $\boxed{\dfrac{2}{3}}$

3. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{3x}$
   Solution : $\frac{\tan(2x)}{3x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\tan(2x)}{2x}$
   $\boxed{\dfrac{2}{3}}$
4. $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$
   Solution : $\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$
   $\boxed{\dfrac{1}{4}}$
5. $\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$
   Solution : $\lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+3x)}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{3\ln(1+3x)}{3x}} = e^3$
   $\boxed{e^3}$

Exercice 3 :

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$
   Solution :
   — $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$
   — $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$
   — $f(1) = 1$
   $\boxed{\text{Continue en } x = 1}$
2. $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en $x = 0$
   Solution : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = g(0)$
   $\boxed{\text{Continue en } x = 0}$
3. $k(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$ en $x = 1$
   Solution :
   — $\lim_{x\to 1^-} k(x) = -1$
   — $\lim_{x\to 1^+} k(x) = 1$
   $\boxed{\text{Non continue en } x = 1}$

Exercice 4 :

1. $f(x) = |x-2|$ en $x = 2$
   Solution :
   — $f'_-(2) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = -1$
   — $f'_+(2) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = 1$
   $\boxed{\text{Non dérivable en } x = 2}$
2. $h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en $x = 0$
   Solution :

— $h'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$
— $h'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$

$\boxed{\text{Non dérivable en } x = 0}$

Exercice 5 :

1. Théorème de Rolle pour $f(x) = x(x-1)(x-2)$ sur $[0, 2]$
   Solution :
   — $f(0) = f(2) = 0$
   — $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$
   — $f'(c) = 0 \Rightarrow 3c^2 - 6c + 2 = 0$

   $\boxed{c = 1 \pm \dfrac{\sqrt{3}}{3}}$
2. Théorème de Rolle pour $f(x) = |x|$ sur $[-1, 1]$
   Solution : f n'est pas dérivable en $x = 0$
   $\boxed{\text{Le théorème ne s'applique pas}}$
3. Preuve de $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$
   Solution : Par TAF : $\sin a - \sin b = \cos c \cdot (a - b)$
   $|\sin a - \sin b| = |\cos c| \cdot |a - b| \leq |a - b|$
   $\boxed{\text{Preuve complète}}$
4. TAF pour $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $[1, 3]$
   Solution :
   — $\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{\frac{1}{3}-1}{2} = -\frac{1}{3}$
   — $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
   — $f'(c) = -\frac{1}{3} \Rightarrow c^2 = 3$

   $\boxed{c = \sqrt{3}}$

Exercice 6 : Règle de L'Hôpital

1. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$
   Solution : Forme $\frac{0}{0}$, dérivées : $\frac{e^x - 1}{2x} \to \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$
   $\boxed{\dfrac{1}{2}}$
2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x}$
   Solution : Forme $\frac{\infty}{\infty}$, dérivées : $\frac{2x}{e^x} \to \frac{2}{e^x} = 0$
   $\boxed{0}$
3. $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$
   Solution : $\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$, forme $\frac{\infty}{\infty}$, dérivée : $\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x = 0$
   $\boxed{0}$
4. $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1}$
   Solution : Forme $\frac{0}{0}$, dérivée : $\frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$
   $\boxed{1}$

5. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$
   Solution : Forme $\frac{0}{0}$, dérivées : $\frac{\cos x-1}{3x^2} \to \frac{-\sin x}{6x} \to \frac{-\cos x}{6} = -\frac{1}{6}$
   $\boxed{-\dfrac{1}{6}}$
6. $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x$
   Solution : $e^{\lim_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{2}{x})} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{2}{x})}{\frac{1}{x}}}$
   Dérivée : $e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1+\frac{2}{x}}} = e^2$
   $\boxed{e^2}$

Exercice 7 :

I) Fonction 1 : $f(x) = \arcsin(2x-1)$

1. **Domaine de définition :**

$$-1 \leq 2x-1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 2x \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$$

$$D_f = [0,1]$$

2. **Dérivée :**

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-(4x^2-4x+1)}} = \frac{2}{\sqrt{4x-4x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$$

Fonction 2 : $g(x) = \arctan\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

1. **Domaine de définition :** Le dénominateur ne doit pas s'annuler : $x \neq -1$

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

2. **Dérivée :**

$$g'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+\frac{x^2}{(x+1)^2}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{\frac{(x+1)^2+x^2}{(x+1)^2}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2+x^2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2x^2+2x+1}$$

Fonction 3 : $h(x) = \operatorname{argch}(x^2-2)$

1. **Domaine de définition :** Pour argch, on doit avoir : $x^2-2 \geq 1$

$$x^2 \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x \geq \sqrt{3}$$

$$D_h =]-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty[$$

2. **Dérivée :**

$$h'(x) = \frac{2x}{\sqrt{(x^2-2)^2-1}} = \frac{2x}{\sqrt{x^4-4x^2+4-1}}$$

$$h'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^4-4x^2+3}}$$

Fonction 4 : $k(x) = \ln(\arccos x)$

1. **Domaine de définition :**
   — Pour arccos : $-1 \leq x \leq 1$
   — Pour ln : $\arccos x > 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

$$D_k = [-1, 1[$$

2. **Dérivée :**

$$k'(x) = \frac{1}{\arccos x} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\frac{1}{\arccos x \cdot \sqrt{1-x^2}}$$

II)

1. **Preuve :** $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ Soit $\theta = \arcsin(x)$, alors $\sin(\theta) = x$ On a : $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta) = x$ Donc $\frac{\pi}{2} - \theta = \arccos(x)$ Ainsi $\theta + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$
2. **Preuve :** $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ pour $x > 0$ Soit $\alpha = \arctan(x)$ et $\beta = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ Alors $\tan(\alpha) = x$ et $\tan(\beta) = \frac{1}{x}$ On a : $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)} = \frac{x+\frac{1}{x}}{1-1} = \infty$ Donc $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ Comme $x > 0$, $\alpha, \beta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, donc $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$