Université A. Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie

$1^{\text{ère}}$ **année ST**
Année universitaire
2025 / 2026

Corrigé de la série de TD n°1 (Algèbre1)-LMD : Ensembles et relations

Exercice n°1

On considère les ensembles :

$$A =]-\infty, 4], \quad B = [-5, +\infty[, \quad E = [-4, 1[.$$

(1) $A \cap B = [-5, 4]$.

(2) $A \cup B = \mathbb{R}$.

(3) $A - B =]-\infty, -5[$.

(4) $B - A =]4, +\infty[$.

(5) $A - E =]-\infty, -4[\cup [1, 4]$.

(6) $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) =]-\infty, -5[\cup (4, +\infty[$.

(7) $C_B^E = [-5, -4[\cup [1, +\infty[$.

Exercice n°2

Soient E un ensemble et A, B et C trois parties de E.
a) Montrons que

1. $C_E^{(A\cap B)} = C_E^A \cup C_E^B$.
   Soit $x \in C_E^{(A\cap B)}$,

$$\begin{aligned}
x \in C_E^{(A\cap B)} &\Leftrightarrow (x \notin A \cap B) \text{ et } (x \in E) \\
&\Leftrightarrow (x \notin A \text{ ou } x \notin B) \text{ et } (x \in E) \\
&\Leftrightarrow (x \notin A \text{ et } x \in E) \text{ ou } (x \notin B \text{ et } x \in E) \\
&\Leftrightarrow x \in C_E^A \text{ ou } x \in C_E^B \\
&\Leftrightarrow x \in C_E^A \cup C_E^B.
\end{aligned}$$

   Donc $C_E^{(\Lambda\cap B)} = C_E^A \cup C_E^B$.

2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Soit $x \in A \cup (B \cap C)$,

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\Leftrightarrow (x \in A) \text{ ou } (x \in (B \cap C)) \\ &\Leftrightarrow (x \in A) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \text{ et } x \in (A \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

Donc $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

3. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
Soit $(x, y) \in A \times (B \cup C)$,

$$\begin{aligned} (x, y) \in A \times (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } y \in (B \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } (y \in B \text{ ou } y \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } y \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } y \in C) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \text{ ou } (x, y) \in (A \times C) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C). \end{aligned}$$

Donc $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

b) Simplifier : $(\overline{A \cap B}) \cup (\overline{C \cap \bar{A}})$.

$$\begin{aligned} (\overline{A \cap B}) \cup (\overline{C \cap \bar{A}}) &= (\bar{A} \cup \bar{B}) \cup (\bar{C} \cup A) \\ &= (\bar{A} \cup A) \cup (\bar{C} \cup \bar{B}) \\ &= E \cup (\bar{C} \cup \bar{B}) \\ &= E. \end{aligned}$$

Exercice n°3

I. D'après le graphe, on a :

$$1\mathcal{R}1, 1\mathcal{R}2, 2\mathcal{R}1, 2\mathcal{R}2, 3\mathcal{R}3, 3\mathcal{R}4, 4\mathcal{R}3, 4\mathcal{R}4$$

Pour tout $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ on a $n\mathcal{R}n$ donc la relation $\mathcal{R}$ est réflexive. On a d'une part $1\mathcal{R}2$ et $2\mathcal{R}1$ et $3\mathcal{R}4$ et $4\mathcal{R}3$ ce qui montre que la relation est symétrique et évidemment elle est transitive, donc il s'agit d'une relation d'équivalence. 2. Il y a deux classes d'équivalence $E_1 = \{1, 2\}$ et $E_1 = \{3, 4\}$ par conséquent $E/\mathcal{R} = \{E_1, E_2\}$.

II. Soit $\mathcal{S}$ la relation binaire définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\mathcal{S}y \Longleftrightarrow x^3 - y^3 = x - y$$

(1) Montrons que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.

a) Réflexivité :
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x^3 - x^3 = x - x = 0$$

donc $x\mathcal{S}x$. Ainsi, $\mathcal{S}$ est réflexive.
b) Symétrie :
Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x\mathcal{S}y$. Alors :

$$x^3 - y^3 = x - y$$

en multipliant par (-1) :

$$y^3 - x^3 = y - x$$

donc $y\mathcal{S}x$. Ainsi, $\mathcal{S}$ est symétrique.
c) Transitivité :
Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}z$.
On a :

$$x^3 - y^3 = x - y \quad \text{et} \quad y^3 - z^3 = y - z$$

En additionnant :

$$x^3 - z^3 = x - z$$

donc $x\mathcal{S}z$. Ainsi, $\mathcal{S}$ est transitive.
La relation $\mathcal{S}$ est réflexive, symétrique et transitive, donc c'est une relation d'équivalence.

(2) Déterminons la classe d'équivalence $\bar{x}$.
On peut écrire $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$.
Par suite $x^3 - y^3 = x - y \Rightarrow x^2+xy+y^2 = 1 \backslash x \neq y$
donc si $x = y$ on a $x^3 - y^3 = x - y$ est toujours vraie.
La classe d'équivalence est donc

$$\bar{x} = \{y \in \mathbb{R} \setminus y = x \text{ ou } x^2 + xy + y^2 = 1\}.$$

$x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 + xy + x^2 - 1 = 0 \quad (E)$
$\Delta = x^2 - 4(x^2 - 1) = -3x^2 + 4$
(E) admet deux solutions y_1, y_2 ssi $-3x^2 + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow |x| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$
$y_1 = \dfrac{-x + \sqrt{-3x^2+4}}{2}$,
$y_2 = \dfrac{-x - \sqrt{-3x^2+4}}{2}$,
$\bar{x} = \{x, \frac{-x+\sqrt{-3x^2+4}}{2}, \frac{-x-\sqrt{-3x^2+4}}{2}\} = E_1$ si $|x| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\bar{x} = \{x\} = E_2$ sinon.
$\mathbb{R}/\mathcal{S} = \{E_1, E_2\}$.

III. Sur $\mathbb{R}^2$, on considère la relation $\mathcal{T}$ définie par :

$$(x,y)\mathcal{T}(x',y') \Leftrightarrow x+y=x'+y',$$

1. Montrons que $\mathcal{T}$ est une relation d'équivalence.
a) Réflexivité de $\mathcal{T}$: Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a

$$x+y=x+y.$$

Donc $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,(x,y)S(x,y)$. D'où la réflexivité de T.
b) Symétrie de $\mathcal{T}$: soient $(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2$ tels que $(x,y)\mathcal{T}(x',y')$.
Montrons que $(x',y')\,\mathcal{T}(x,y)$. On a

$$\begin{aligned}(x,y)\mathcal{T}(x',y') &\Rightarrow x+y=x'+y'\\ &\Rightarrow x'+y'=x+y \text{ (symétrie de l'egalité)}\\ &\Rightarrow (x',y')\,\mathcal{T}(x,y)\end{aligned}$$

Donc $\forall(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2,(x,y)\mathcal{T}(x',y')\Rightarrow(x',y')\,\mathcal{T}(x,y)$.
D'où la symétrie de S.
c) Transitivité de $\mathcal{T}$: Soient $(x,y),(x',y'),(x'',y'')\in\mathbb{R}^2$ tels que $(x,y)\mathcal{T}(x',y')$ et $(x',y')\,S\,(x'',y'')$.
Montrons que $(x,y)\mathcal{T}(x'',y'')$. On a

$$\left\{\begin{array}{c}(x,y)\mathcal{T}(x',y')\\ \text{et}\\ (x',y')\,\mathcal{T}(x'',y'')\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c}x+y=x'+y'\ldots(1)\\ \text{et}\\ x'+y'=x''+y''\ldots(2)\end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}(1)+(2) &\Rightarrow x+y=x''+y''\\ &(x,y)\mathcal{S}(x'',y'').\end{aligned}$$

Donc $\forall(x,y),(x',y'),(x'',y'')\in\mathbb{R}^2,(x,y)\mathcal{T}(x',y')$ et $(x',y')\,\mathcal{T}(x'',y'')\Rightarrow (x,y)\mathcal{T}(x'',y'')$.
D'où la transitivité de $\mathcal{T}$.
De a), b), c) on a $\mathcal{T}$ est une relation d'équivalence.
b) Déterminons la classe d'équivalence de $(0,0)$.

$$\begin{aligned}\overline{(0,0)} &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,(x,y)\mathcal{T}(0,0)\right\}\\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,x+y=0+0\right\}\\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,y=-x\right\}\\ &= \{(x,-x)/x\in\mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Exercice n°4

I. Vérifions si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

(1) $\forall x,y\in\mathbb{R},\ x\mathcal{R}y\Leftrightarrow x-y\in\mathbb{N}$.
a) Réflexivité : $\forall\in x\mathbb{R}, x-x=0\in\mathbb{N}\Rightarrow x\mathcal{R}x$
donc $\mathcal{R}$ est réflexive

b) Antisymétrie : Soient $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{l} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}x \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x-y \in \mathbb{N} \\ y-x \in \mathbb{N} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{N} : & x-y=k \\ \exists k' \in \mathbb{N} : & y-x=k' \end{cases}$$

$\Rightarrow (x-y)+(y-x) = k+k' \Rightarrow k+k'=0 \Rightarrow k=0$ et $k'=0 \Rightarrow x=y$.

Ce qui prouve que $\mathcal{R}$ est antisymétrique.

c) Transitivité : Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{l} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}z \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x-y \in \mathbb{N} \\ y-z \in \mathbb{N} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{N} : & x-y=k \\ \exists k' \in \mathbb{N} : & y-z=k' \end{cases}$$

$\Rightarrow (x-y)+(y-z) = k+k' = k'' \Rightarrow x-z = k'' \in \mathbb{N} \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

Ce qui prouve que $\mathcal{R}$ est transitive.

Comme $\mathcal{R}$ est réflexive, antisymétrique et tansitive alors $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

(2) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x-y \in \mathbb{Z}$.

a) Réflexivité : $\forall \in x\mathbb{R}, x-x=0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x\mathcal{R}x$

donc $\mathcal{R}$ est réflexive

b) Antisymétrie : Soient $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{l} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}x \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x-y \in \mathbb{Z} \\ y-x \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} : & x-y=k \\ \exists k' \in \mathbb{Z} : & y-x=k' \end{cases}$$

Rien n'indique que $x=y$ prenons un contre-exemple.

$$\left\{\begin{array}{l} x=\frac{7}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x-y=3 \in \mathbb{Z} \\ y-x=-3 \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}x \end{cases}$$

Et pourtant $x \neq y$ La relation n'est pas antisymétrique, elle n'est donc pas une relation d'ordre.

II. Dans $\mathbb{N}^*$, on définit la relation $\mathcal{S}$ par :

$$x\mathcal{S}y \Leftrightarrow x \text{ divise } y \quad (\exists k \in \mathbb{N}^* : y=kx)$$

1. Montrons que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre.

a) Réflexivité : $\forall x \in \mathbb{N}^*, x$ divise $x(x=1.x) \Rightarrow x\mathcal{S}x$

donc $\mathcal{S}$ est réflexive

b) Antisymétrie : Soient $x, y \in \mathbb{N}^*$:

$$\left\{\begin{array}{l} x\mathcal{S}y \\ y\mathcal{S}x \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x \text{ divise } y \\ y \text{ divise } x \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{N}^* : & y=kx \\ \exists n \in \mathbb{N}^* : & x=ny \end{cases}$$

$$\Rightarrow x=nkx \Rightarrow nk=1 \Rightarrow n=k=1\,(n,k \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow x=y.$$

Ce qui prouve que $\mathcal{S}$ est antisymétrique.
c) Transitivité : Soient x, y et $z \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} x\mathcal{S}y \\ y\mathcal{S}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \text{ divise } y \\ y \text{ divise } z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{N}^* & : y = kx \\ \exists n \in \mathbb{N}^* & : z = ny \end{cases}$$
$$\Rightarrow z = nk \cdot x$$
$$\Rightarrow x\mathcal{S}z$$

donc $\mathcal{S}$ est transitive.
Comme $\mathcal{S}$ est réflexive, antisymétrique et tansitive alors $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre.
2. Cet ordre est partiel, car $\exists x = 2, y = 3$ tels que :

$$2 \not\mathcal{S} 3 \text{ et } 3 \not\mathcal{S} 2.$$