

Corrigé de la série de TD N°01 : Ensembles et relations binaires

Exercice n°1 .

1. On considère les ensembles :

$$B = \{x \in \mathbb{Z} / |x| < 3\}, E = \{x \in \mathbb{Z} / -5 < x \leq 5\} \quad \text{et} \quad A = E \cap \mathbb{N}^*.$$

On détermine $A \cap B$. On a

$$\begin{aligned} B &= \{x \in \mathbb{Z} / |x| < 3\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} / -3 < x < 3\} \\ &= \{-2, -1, 0, 1, 2\} \end{aligned}$$

d'autre part, on a

$$E = \{x \in \mathbb{Z} / -5 < x \leq 5\} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

donc

$$A = E \cap \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

ensuite

$$A \cap B = \{1, 2\}$$

On détermine : $\mathbb{C}_E^{A \cup B}$.

$$\mathbb{C}_E^{A \cup B} = \{x \in E / x \notin A \cup B\}$$

comme : $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, d'où

$$\mathbb{C}_E^{A \cup B} = \{-4, -3\}$$

On détermine : $A \setminus B$.

$$A - B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{-2, -1, 0, 1, 2\} = \{3, 4, 5\}$$

On détermine : $(A \cap B) \cap \mathbb{C}_E^{A \cap B}$:

$$(A \cap B) \cap \mathbb{C}_E^{A \cap B} = \{1, 2\} \cap \{-4, -3, -2, -1, 0, 3, 4, 5\} = \emptyset$$

2. Soient E un ensemble non vide et A, B, C et D quatre parties de E .

a) Montrons que : $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset C_E B$.

On suppose que $A \cap B = \emptyset$ et on démontre que : $A \subset C_E B$.

Soit $x \in A$.

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow x \notin B \text{ car } A \cap B = \emptyset \\ &\Rightarrow x \in C_E B, \end{aligned}$$

donc $\forall x : x \in A \Rightarrow x \in C_E B$, d'où $A \subset C_E B$.

Alors, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset C_E B$

b) Montrons que : $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

Soit $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$.

On a :

$$\begin{aligned} (x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D) &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \text{ et } (x, y) \in (C \times D) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } y \in B) \text{ et } (x \in C \text{ et } y \in D) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in C) \text{ et } (y \in B \text{ et } y \in D) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap C \text{ et } y \in B \cap D \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D) \end{aligned}$$

Donc, $\forall (x, y) : (x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$.

Alors, $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

c) Montrons que : $A \cap (B - C) = (A \cap B) \cap (A - C)$

Soit $x \in A \cap (B - C)$, on a

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B - C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in (B - C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } (x \in B \text{ et } x \notin C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ et } (x \in A \text{ et } x \notin C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \text{ et } x \in (A - C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cap (A - C). \end{aligned}$$

Donc, $\forall x : x \in A \cap (B - C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cap (A - C)$.

Alors, $A \cap (B - C) = (A \cap B) \cap (A - C)$.

3 Soit $E = \{-1, 0, 1, 2\}$

a) Donnons l'ensemble $E \times E$.

On a :

$$\begin{aligned} E \times E &= \{(x, y) / x \in E \text{ et } y \in E\} \\ &= \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (-1, 2), (0, -1), (0, 0), (0, 1), \\ &\quad (0, 2), (1, -1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, -1), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\} \end{aligned}$$

b) Déterminons les ensembles A, B et C .

$$\begin{aligned} A &= \{(i, j) \in E \times E / i < j\} \\ &= \{(-1, 0), (-1, 1), (-1, 2), (0, 1), (0, 2), (1, 2)\} \\ B &= \{(i, j) \in E \times E / i > j\} \\ &= \{(0, -1), (1, -1), (1, 0), (2, -1), (2, 0), (2, 1)\} \\ C &= \{(i, j) \in E \times E / i = j\} \\ &= \{(-1, -1), (0, 0), (1, 1), (2, 2)\} \end{aligned}$$

c) Montrons que A, B et C forment une partition de $E \times E$.

On a :

1. $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ et $C \neq \emptyset$.
2. $A \cap B = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$ et $A \cap C = \emptyset$.
3. $A \cup B \cup C = E$.

D'où A, B et C forment une partition de $E \times E$.

Exercice n°2 .

Soit $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, et $\mathfrak{R}$ la relation binaire définie sur E par :

$x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow x + y$ est pair.

1. Le graphe représentatif de $\mathfrak{R}$: je vais vous l'envoyer en photo après

2. Montrons que $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence :

i. $\mathfrak{R}$ est réflexive car on a $\forall x \in E, x\mathfrak{R}x$

$$0\mathfrak{R}0, 1\mathfrak{R}1, 2\mathfrak{R}2, 3\mathfrak{R}3, 4\mathfrak{R}4.$$

ii. $\mathfrak{R}$ est symétrique car on a $\forall x, y \in E, x\mathfrak{R}y \Rightarrow y\mathfrak{R}x$

$$0\mathfrak{R}0 \Rightarrow 0\mathfrak{R}0$$

$$0\mathfrak{R}2 \Rightarrow 2\mathfrak{R}0$$

$$0\mathfrak{R}4 \Rightarrow 4\mathfrak{R}0$$

$$1\mathfrak{R}1 \Rightarrow 1\mathfrak{R}1$$

$$1\mathfrak{R}3 \implies 3\mathfrak{R}1$$

$$2\mathfrak{R}0 \implies 0\mathfrak{R}2$$

$$2\mathfrak{R}2 \implies 2\mathfrak{R}2$$

$$2\mathfrak{R}4 \implies 4\mathfrak{R}2$$

$$3\mathfrak{R}1 \implies 1\mathfrak{R}3$$

$$3\mathfrak{R}3 \implies 3\mathfrak{R}3$$

$$4\mathfrak{R}0 \implies 0\mathfrak{R}4$$

$$4\mathfrak{R}2 \implies 2\mathfrak{R}4$$

$$4\mathfrak{R}4 \implies 4\mathfrak{R}4.$$

iii. $\mathfrak{R}$ est transitive car on a $\forall x, y, z \in E, x\mathfrak{R}y$ et $y\mathfrak{R}z \implies x\mathfrak{R}z$.

$$0\mathfrak{R}0 \text{ et } 0\mathfrak{R}0 \implies 0\mathfrak{R}0, 0\mathfrak{R}0 \text{ et } 0\mathfrak{R}2 \implies 0\mathfrak{R}2, 0\mathfrak{R}0 \text{ et } 0\mathfrak{R}4 \implies 0\mathfrak{R}4,$$

$$0\mathfrak{R}2 \text{ et } 2\mathfrak{R}0 \implies 0\mathfrak{R}0, 0\mathfrak{R}2 \text{ et } 2\mathfrak{R}2 \implies 0\mathfrak{R}2, 0\mathfrak{R}2 \text{ et } 2\mathfrak{R}4 \implies 0\mathfrak{R}4,$$

$$0\mathfrak{R}4 \text{ et } 4\mathfrak{R}0 \implies 0\mathfrak{R}0, 0\mathfrak{R}4 \text{ et } 4\mathfrak{R}2 \implies 0\mathfrak{R}2, 0\mathfrak{R}4 \text{ et } 4\mathfrak{R}4 \implies 0\mathfrak{R}4,$$

$$1\mathfrak{R}1 \text{ et } 1\mathfrak{R}1 \implies 1\mathfrak{R}1, 1\mathfrak{R}1 \text{ et } 1\mathfrak{R}3 \implies 1\mathfrak{R}3,$$

$$1\mathfrak{R}3 \text{ et } 3\mathfrak{R}1 \implies 1\mathfrak{R}1, 1\mathfrak{R}3 \text{ et } 3\mathfrak{R}3 \implies 1\mathfrak{R}3,$$

$$2\mathfrak{R}0 \text{ et } 0\mathfrak{R}0 \implies 2\mathfrak{R}0, 2\mathfrak{R}0 \text{ et } 0\mathfrak{R}2 \implies 2\mathfrak{R}2, 2\mathfrak{R}0 \text{ et } 0\mathfrak{R}4 \implies 2\mathfrak{R}4,$$

$$2\mathfrak{R}2 \text{ et } 2\mathfrak{R}0 \implies 2\mathfrak{R}0, 2\mathfrak{R}2 \text{ et } 2\mathfrak{R}4 \implies 2\mathfrak{R}4, 2\mathfrak{R}2 \text{ et } 2\mathfrak{R}2 \implies 2\mathfrak{R}2,$$

$$2\mathfrak{R}4 \text{ et } 4\mathfrak{R}0 \implies 2\mathfrak{R}0, 2\mathfrak{R}4 \text{ et } 4\mathfrak{R}2 \implies 2\mathfrak{R}2, 2\mathfrak{R}4 \text{ et } 4\mathfrak{R}4 \implies 2\mathfrak{R}4,$$

$$3\mathfrak{R}1 \text{ et } 1\mathfrak{R}1 \implies 3\mathfrak{R}1, 3\mathfrak{R}1 \text{ et } 1\mathfrak{R}3 \implies 3\mathfrak{R}3,$$

$$3\mathfrak{R}3 \text{ et } 3\mathfrak{R}1 \implies 3\mathfrak{R}1, 3\mathfrak{R}3 \text{ et } 3\mathfrak{R}3 \implies 3\mathfrak{R}3,$$

$$4\mathfrak{R}0 \text{ et } 0\mathfrak{R}0 \implies 4\mathfrak{R}0, 4\mathfrak{R}0 \text{ et } 0\mathfrak{R}2 \implies 4\mathfrak{R}2, 4\mathfrak{R}0 \text{ et } 0\mathfrak{R}4 \implies 4\mathfrak{R}4,$$

$$4\mathfrak{R}2 \text{ et } 2\mathfrak{R}0 \implies 4\mathfrak{R}0, 4\mathfrak{R}2 \text{ et } 2\mathfrak{R}2 \implies 4\mathfrak{R}2, 4\mathfrak{R}2 \text{ et } 2\mathfrak{R}4 \implies 4\mathfrak{R}4,$$

$$4\mathfrak{R}4 \text{ et } 4\mathfrak{R}0 \implies 4\mathfrak{R}0, 4\mathfrak{R}4 \text{ et } 4\mathfrak{R}2 \implies 4\mathfrak{R}2, 4\mathfrak{R}4 \text{ et } 4\mathfrak{R}4 \implies 4\mathfrak{R}4.$$

(On est pas obligé de leurs écrire tout sur le tableau, mais on peut juste leurs expliquer sur le graphe que c'est une relation d'équivalence)

Finalement, de i, ii et iii, $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence.

3. Déterminons la classe de 0, et l'ensemble quotient $E/\mathfrak{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\bar{0} &= \{x \in E, x\mathfrak{R}0\} \\ &= \{x \in E, x + 0 \text{ est pair}\} \\ &= \{0, 2, 4\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{1} &= \{x \in E, x\mathfrak{R}1\} \\ &= \{x \in E, x + 1 \text{ est pair}\} \\ &= \{1, 3\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{2} &= \{x \in E, x\mathfrak{R}2\} \\ &= \{x \in E, x + 2 \text{ est pair}\} \\ &= \{0, 2, 4\} = \bar{0}.\end{aligned}$$

$$\bar{3} = \bar{1}, \quad \text{et } \bar{4} = \bar{0}.$$

d'où

$$E/\mathfrak{R} = \{\bar{0}, \bar{1}\}.$$

Exercice n°3 .

Soit τ une relation définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ comme suit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x\tau y \iff \cos^2 x + \sin^2 y = 1$$

.

1. Montrons que τ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$:

- i. Réflexivité de τ : Soit $x \in \mathbb{R}$. De la formule $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, on déduit que la relation est réflexive.
- ii. Symétrie de τ : Soient $x, y \in \mathbb{R}; x\tau y$, alors on a :

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 y + \sin^2 y &= (\cos^2 x + \sin^2 y) + (\cos^2 y + \sin^2 x) \\ &= 1 + (\cos^2 y + \sin^2 x) \end{aligned}$$

mais, $\sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 y + \sin^2 y = 1 + 1 = 2$, d'où

$$\cos^2 y + \sin^2 x = 1$$

et donc τ est symétrique.

- iii. Transitivité de τ : Soient $x, y, z \in \mathbb{R} : x\tau y$ et $y\tau z$. Montrons que $x\tau z$.
Si $x\tau y$ et $y\tau z$, on a :

$$\cos^2 x + \sin^2 y = 1 \text{ et } \cos^2 y + \sin^2 z = 1$$

ce implique

$$\cos^2 x + (\cos^2 y + \sin^2 y) + \sin^2 z = 2$$

d'où

$$\cos^2 x + \sin^2 z = 1$$

Donc τ est transitive. Finalement, de i, ii et iii, τ est une relation d'équivalence.

- 2. Déterminons la classe d'équivalence de $\frac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{6}\right) &= \left\{x \in \mathbb{R} / x\tau \frac{\pi}{6}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} / \cos^2 x + \sin^2 \frac{\pi}{6} = 1\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} / \cos^2 x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} / \cos^2 x = \frac{3}{4}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} / |\cos x| = \frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} / \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \\ &= \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

Exercice n°4.

1) Dans $\mathbb{R}$, on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \iff x^2 - y^2 \leq x - y.$$

a) Montrons que $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique :

$$\text{On a : } 0\mathcal{R}2, \text{ car } 0^2 - 2^2 = -4 \leq -2 = 0 - 2. \text{ Mais, } 2 \not\mathcal{R}0, \text{ car } 2^2 - 0^2 > 2 = 2 - 0.$$

b) Montrons que $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique :

On a $0\mathcal{R}1$ et $1\mathcal{R}0$, car

$$0^2 - 1^2 \leq 0 - 1 \text{ et } 1^2 - 0^2 \leq 1 - 0.$$

Mais $0 \neq 1$.

2) On définit sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$ la relation binaire $\mathcal{S}$ par :

$$\forall x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}y \iff x^2 - y^2 \leq x - y$$

a) Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre.

i) Réflexivité de $\mathcal{S}$? ($\forall x \in]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}x$) ?

Soit $x \in]\frac{1}{2}, +\infty[$. On a : $x^2 - x^2 = 0 = x - x$.

Donc, $x^2 - x^2 \leq x - x$.

Par la suite, $\forall x \in]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}x$.

D'où, $\mathcal{S}$ est une relation réflexive.

ii) Antisymétrie de $\mathcal{S}$? ($\forall x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}y \text{ et } y\mathcal{S}x \implies x = y$) ?

Soient $x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[$. On suppose que $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}x$ et on démontre $x = y$. On a

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x\mathcal{S}y \\ \text{et} \\ y\mathcal{S}x \end{array} \right. &\implies \left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 \leq x - y \\ \text{et} \\ y^2 - x^2 \leq y - x \end{array} \right. \\ &\implies \left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 \leq x - y \\ \text{et} \\ x^2 - y^2 \geq x - y \end{array} \right. \end{aligned}$$

Par la suite, $x^2 - y^2 = x - y$.

On a :

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 = x - y &\implies (x - y)(x + y - 1) = 0. \\ &\implies \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ \text{ou} \\ x = 1 - y \text{ (impossible, car } x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Donc, $\forall x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}y \text{ et } y\mathcal{S}x \implies x = y$.

D'où la relation $\mathcal{S}$ est antisymétrique.

iii) Transitivité de $\mathcal{S}$: ($\forall x, y, z \in]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}y \text{ et } y\mathcal{S}z \implies x\mathcal{S}z$) ?

Soient $x, y, z \in]\frac{1}{2}, +\infty[$. On suppose $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}z$ et on démontre $x\mathcal{S}z$.

On a :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x\mathcal{S}y \\ \text{et} \\ y\mathcal{S}z \end{array} \right. &\implies \left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 \leq x - y \\ \text{et} \\ y^2 - z^2 \leq y - z \end{array} \right. \\ &\implies x^2 - z^2 \leq x - z. \end{aligned}$$

Donc, $\forall x, y, z \in]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}y \text{ et } y\mathcal{S}z \implies x\mathcal{S}z$.

D'où la relation $\mathcal{S}$ est transitive

De (i), (ii) et (iii), on a $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre.

b) Cet ordre est total.

En effet, soient $x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[$.

On a : $x^2 - y^2 \leq x - y$ ou $x^2 - y^2 \geq x - y$.

donc, $x^2 - y^2 \leq x - y$ ou $y^2 - x^2 \leq y - x$.

d'où, $x\mathcal{S}y$ ou $y\mathcal{S}x$.

Alors, $\forall x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[: x\mathcal{S}y$ ou $y\mathcal{S}x$.

Exercice n°5. On définit sur $\mathbb{N}$ la relation binaire $\mathfrak{R}$ par :

$\forall x, y \in \mathbb{N}, x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow \exists n, m \in \mathbb{N}^* : y = nx^m$.

1. Montrons que $\mathfrak{R}$ est une relation d'ordre.

• **Reflexivité** : Soit $x \in \mathbb{N}$. On a $x = 1x^1 \Rightarrow \exists (n = 1, m = 1) \in \mathbb{N}^* : x = nx^m \Rightarrow x\mathfrak{R}x$.

Donc $\forall x \in \mathbb{N}, x\mathfrak{R}x$, d'où la réflexivité de $\mathfrak{R}$

• **Symétrie** : Soient $x, y \in \mathbb{N} : x\mathfrak{R}y$ et $y\mathfrak{R}x$. On a $\begin{cases} \exists n, m \in \mathbb{N}^*, & y = nx^m; \\ \exists n', m' \in \mathbb{N}^*, & x = n'y^{m'}. \end{cases} \Rightarrow \exists n, n', m, m' \in \mathbb{N}^* :$

$y = n(n'y^{m'})^m \Rightarrow \exists n, n', m, m' \in \mathbb{N}^* : y = nn'^m y^{mm'} \Rightarrow nn'^m = 1$ et $mm' = 1$. Comme $n, n', m, m' \in \mathbb{N}^*$, alors $n = n' = 1$ et $m = m' = 1 \Rightarrow$ par suite $x = y$. Donc $\forall x, y \in \mathbb{N}, x\mathfrak{R}y$ et $y\mathfrak{R}x \Rightarrow x = y$. D'où l'antisymétrie de $\mathfrak{R}$.

• **Transitivité** : Soient $x, y, z \in \mathbb{N} : x\mathfrak{R}y$ et $y\mathfrak{R}z \Rightarrow \begin{cases} \exists n, m \in \mathbb{N}^*, & y = nx^m; \\ \exists n', m' \in \mathbb{N}^*, & z = n'y^{m'}. \end{cases} \Rightarrow \exists n, n', m, m' \in \mathbb{N}^* :$

$z = n'(nx^m)^{m'} \Rightarrow \exists n, n', m, m' \in \mathbb{N}^* : z = n'n^{m'} x^{mm'} \Rightarrow \exists n'' = n'n^{m'}, m'' = mm' \in \mathbb{N}^* : z = n''x^{m''} \Rightarrow x\mathfrak{R}z$. Donc $\forall x, y, z \in \mathbb{N}, x\mathfrak{R}y$ et $y\mathfrak{R}z \Rightarrow x\mathfrak{R}z$. D'où la transitivité de $\mathfrak{R}$. Comme $\mathfrak{R}$ est réflexive, antisymétrique et transitive, alors $\mathfrak{R}$ est une relation d'ordre.

2. L'ordre de $\mathfrak{R}$ n'est pas total car si on prend $x = 3$ et $y = 5$. On a $\forall n, m \in \mathbb{N}^* : 5 \neq n3^m$ et $3 \neq n5^m$.