

Corrigé de la série de TD n°2 (Algèbre1)- LMD : Les applications

Exercice 1

1. Montrons que $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

Soit $y \in f(A_1 \cup A_2)$, alors :

$$\begin{aligned} y \in f(A_1 \cup A_2) &\iff \exists x \in (A_1 \cup A_2) : y = f(x) \\ &\iff [\exists x \in A_1 \text{ ou } \exists x \in A_2] : y = f(x) \\ &\iff [\exists x \in A_1 : y = f(x)] \text{ ou } [\exists x \in A_2 : y = f(x)] \\ &\iff y \in f(A_1) \text{ ou } y \in f(A_2) \\ &\iff y \in f(A_1) \cup f(A_2). \end{aligned}$$

Donc $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

2. Montrons que $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

Supposons que $B_1 \subset B_2$ et montrons que $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

Soit $x \in f^{-1}(B_1)$, alors :

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1) &\implies f(x) \in B_1 \\ &\implies f(x) \in B_2 \text{ (car } B_1 \subset B_2) \\ &\implies x \in f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

Exercice 2

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = x^2 - 6x + 9.$$

- 1) • $f(\{1, 5\}) = \{f(1), f(5)\} = \{4\}$.

• $f([0, 1]) = [f(1), f(0)] = [4, 9]$.

• $f^{-1}(\{-1\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = -1\},$
 $= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 6x + 9 = -1\},$
 $= \emptyset.$

• $f^{-1}([0, +\infty[) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0\},$
 $= \{x \in \mathbb{R} \mid (x-3)^2 \geq 0\} = \mathbb{R}.$

2)- f n'est pas injective, car d'après 1) $f(1) = f(5) = 4$ mais $1 \neq 5$.

- f n'est pas surjective, car d'après 1) $y = -1$ n'admet aucun antécédent par l'application f .

- f n'est pas bijective, car elle n'est ni injective ni surjective.

3) Soit $y \in J$.

$$y = f(x) \Rightarrow y = (x-3)^2 \Rightarrow y \in [0, +\infty[.$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 - y = 0.$$

$$\Delta = 6^2 - 4(9 - y) = 4y.$$

$\Delta \geq 0$ pour $y \in [0, +\infty[$. l'équation $y = f(x)$ admet 2 solutions x_1, x_2 :

$$x_1 = \frac{6-2\sqrt{y}}{2} = 3 - \sqrt{y} \leq 3$$

$$x_2 = \frac{6+2\sqrt{y}}{2} = 3 + \sqrt{y} \geq 3.$$

Il suffit de prendre :

$I =]-\infty, 3]$ ou $I = [3, +\infty[$ et $J = [0, +\infty[$ pour que $f : I \longrightarrow J$ soit bijective.

$$f^{-1} : [0, +\infty[\longrightarrow [3, +\infty[$$

$$y \longmapsto f^{-1}(y) = 3 + \sqrt{y}.$$

Ou bien

$$f^{-1} : [0, +\infty[\longrightarrow]-\infty, 3]$$

$$y \longmapsto f^{-1}(y) = 3 - \sqrt{y}.$$

Exercice 3

Soit l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

1. Calculons $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(2)$ et $f(0)$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}, f(2) = \frac{4}{5}, f(0) = 0.$$

2. Calculons $f^{-1}(\{-2\})$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{-2\}) &= \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \{-2\}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / f(x) = -2\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{2x}{1+x^2} = -2\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / 2x = -2 - 2x^2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / 2(1+x+x^2) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / 1+x+x^2 = 0\} \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

3. f n'est pas injective car $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(2)$ mais $\frac{1}{2} \neq 2$.

f n'est pas surjective car, car $\nexists x \in \mathbb{R} / f(x) = -2$.

4. $g : [-1, +1] \longrightarrow [-1, +1] / g(x) = f(x)$.

Montrons que : g est injective :

$$\begin{aligned} g(x_1) = g(x_2) &\implies \frac{2x_1}{1+x_1^2} = \frac{2x_2}{1+x_2^2} \\ &\implies 2x_1(1+x_2^2) = 2x_2(1+x_1^2) \\ &\implies x_1 + x_1x_2^2 = x_2 + x_2x_1^2 \\ &\implies x_1 - x_2 = x_2x_1^2 - x_1x_2^2 \\ &\implies x_1 - x_2 = x_1x_2(x_1 - x_2) \\ &\implies (x_1 - x_2)(1 - x_1x_2) = 0 \\ &\implies (x_1 - x_2) = 0 \vee (x_1x_2 = 1) \\ &\implies (x_1 = x_2) \vee (x_1 = x_2 = 1 \vee x_1 = x_2 = -1) \end{aligned}$$

donc g est injective.

Montrons que g est surjective.

Résolvons l'équation $y = \frac{2x}{1+x^2}$, on a :

$$y = \frac{2x}{1+x^2} \implies yx^2 - 2x + y = 0.$$

$$\Delta = 4 - 4y^2 = 4(1 - y^2) \geq 0, \text{ car } y \in [-1, 1].$$

donc l'équation $y = g(x)$ admet deux solutions ($y \neq 0$) :

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y} \text{ et } x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y} \notin [-1, +1].$$

si $y = 0 \implies x = 0$

d'où g est surjective.

comme g est injective et surjective, alors g est bijective, et

$$g^{-1} : [-1, +1] \longrightarrow [-1, +1]$$

et

$$x = g^{-1}(y) = \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y}.$$