

Série de TD n°2 : Les applications

(A traiter en 2 séances à 2 et demi)

Exercice n°1

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Soient $A_1, A_2 \subset E$ et $B_1, B_2 \subset F$, montrer les propriétés suivantes :

1. $A_1 \subset A_2 \implies f(A_1) \subset f(A_2)$.
2. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

Exercice n°2

Considérons l'application f définie par :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = x^2 + 2x - 3.$$

1. Calculer $f^{-1}(\{-6\})$ et $f^{-1}(\{0\})$.
2. Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f .
3. Donner les intervalles I et J tels que $f : I \longrightarrow J$ soit bijective. Déterminer l'application réciproque f^{-1} .

Exercice n°3

- (1) On considère l'application f définie par :

$$f : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow A$$

$$x \longmapsto f(x) = \frac{ax + b}{x - 1}.$$

Comment doit-on choisir les réels a et b et l'ensemble A pour que f soit bijective ?.

- (2) On considère l'application g définie par :

$$g : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto g(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}$$

- a. Montrer que g est injective.
- b. Calculer $g^{-1}(\{2\})$. g est-elle surjective ?.
- c. Déterminer l'ensemble A pour que $g : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow A$, soit bijective. Donner l'application réciproque g^{-1} .