

PHYSIQUE I

Interrogation écrite N° 1 (7.5Pts)

Sujet 1

I-

La vitesse d'un mobile dans un milieu fluide est donnée par la relation suivante :

$$v = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Où v_0 et τ sont des constantes physiques. Trouver la dimension de v_0 et τ et leurs unités dans le système international.

II-

Dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les vecteurs suivants

$$\vec{V}_1 = 3\vec{i} + 3\vec{j}, \vec{V}_2 = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$$

- Représenter les vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2$.
- Calculer $\|\vec{V}_1\|, \|\vec{V}_2\|$.
- Calculer $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$, puis trouver l'angle formé par les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.
- Déterminer le vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par le vecteur $(\vec{V}_1 + \vec{V}_2)$;

III-

Calculer la divergence du champ vectoriel suivant:

$$\vec{E}(x, y, z) = \left(\frac{yz}{x^2}\right)\vec{i} + (x - 2y^2 + z)\vec{j} + \left(\frac{xy}{z}\right)\vec{k}$$

Réponses

Nom :/Prénom :/Groupe :

I |

$$[v] = [v_0] \left[e^{-\frac{t}{\tau}} \right]$$

$$\text{Sachant que: } \left[e^{-\frac{t}{\tau}} \right] = 1$$

$$\Rightarrow [v_0] = [v] = L \cdot T^{-1}$$

$$\left[\frac{t}{\tau} \right] = \frac{[t]}{[\tau]} = 1 \Rightarrow [\tau] = [t] = T$$

Les unités:

$$[v_0] = L T^{-1} \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$$

$$[t] = [\tau] = T \text{ (s)}$$

II

• Représentation des vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ en coordonnées

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{1 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11}$$

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$\|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2\| = \|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\| \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{\|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2\|}{\|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\|} = \frac{\sqrt{54}}{3\sqrt{22}}$$

$$\Rightarrow \alpha = 31,1^\circ$$

• Le vecteur unitaire $\vec{u}$ partiel par $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = 4\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{4\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{53}} = \frac{1}{\sqrt{53}} (4\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k})$$

III

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$= -2y^3 + 4y - \frac{xy^2}{z^2}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = -2y^3 - 2y - \frac{xy^2}{z^2}$$

Interrogation écrite N° 1 (7.5Pts)

Sujet 2

I-

La masse volumique ρ d'un cylindre de masse m , de rayon R et de longueur l est donnée par la relation suivante

$$\rho = \frac{m}{\pi l R^2} \quad (0,2V)$$

- En utilisant l'analyse dimensionnelle, trouver les deux constantes x et y ;
- En déduire l'expression exacte de la masse volumique ρ .

II-

Soient les trois points : $A(2, -3)$, $B(3,0)$ et $C(-2,2)$

- Déterminer les vecteurs : $\vec{V}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{V}_2 = \overrightarrow{AC}$. (0,2V)
- Représenter dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les deux vecteurs. (0,2V)
- Calculer $\|\vec{V}_1\|$, $\|\vec{V}_2\|$. (1V)
- Les deux vecteurs sont-ils colinéaires ? justifier. (0,2V)
- Calculer $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$, puis trouver l'angle formé par les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$. (1V)
- Déterminer le vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par le vecteur $\vec{V}_1$; (0,2V)

III-

Calculer le gradient du champ scalaire suivant:

$$V(x, y, z) = x^3 y z - x y^2 z + 2 x y z^2 \quad (1,2V)$$

Réponses

Nom :/Prénom :/Groupe :

I-

Les constantes x, y

$$[\rho] = \frac{[m]}{[l] [R]^2} \quad (0,1V)$$

$$\frac{[m]}{[V]} = \frac{[m]}{[l] [R]^2} \quad (0,1V)$$

$$\frac{m}{l^3} = \frac{m^x}{l^y R^z} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y+2=3 \\ 0+2=z \Rightarrow z=2 \end{cases} \quad (0,1V)$$

$$\rho = \frac{m}{l^3} \quad (0,1V)$$

II.

$$\vec{v}_1 = \vec{i} + 3\vec{j} \quad \vec{v}_2 = -4\vec{i} + \vec{j}$$

représentation

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

$\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont colinéaires $\Rightarrow$

$$\vec{v}_1 = \lambda \vec{v}_2 \quad \text{ou} \quad \vec{v}_2 = \mu \vec{v}_1$$

$$\vec{v}_1 = -4\lambda \vec{i} + 3\lambda \vec{j}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4\lambda = 1 \\ 3\lambda = 3 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{4} \quad \lambda = 1$$

$\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont pas colinéaires.

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 1 \cdot (-4) + 3 \cdot 1 = -1$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\|} = \frac{-1}{\sqrt{10} \sqrt{17}}$$

$$\theta = \arccos \left(\frac{-1}{\sqrt{170}} \right)$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{10}} (\vec{i} + 3\vec{j})$$

$$\vec{grad} V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}$$

$$\vec{grad} V = 3x^2 y \vec{i} + 3x^2 \vec{j}$$

$$\vec{grad} V = (3x^2 y \vec{i} + 3x^2 \vec{j}) \cdot \vec{i} +$$

$$(3x^2 y - 2xy \vec{j} + 2xy \vec{j}) \cdot \vec{j} +$$

$$(x^2 y - xy^2 + 4xy \vec{k}) \cdot \vec{k}$$

Interrogation écrite N° 1 (7.5Pts)

Sujet 3

I-

La formule suivante est-elle valide dimensionnellement ? Faire une analyse dimensionnelle pour confirmer ou rectifier.

$$F = \frac{G \cdot m_1}{R}$$

Où F est la force, G une constante dont l'unité dans le système international (SI) est le $m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$, m_1 est une masse et R une longueur.

II-

Dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les trois vecteurs suivants

$$\vec{V}_1 = \frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \vec{V}_2 = \vec{i} + \sqrt{3}\vec{j} + \vec{k}, \vec{V}_3 = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$$

- Représenter les vecteurs $\vec{V}_3$.
- Calculer $\|\vec{V}_1\|$, $\|\vec{V}_2\|$.
- Calculer $\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$.
- Déterminer le vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par le vecteur $(\vec{V}_1 + \vec{V}_3)$.

III-

Calculer la divergence du champ vectoriel suivant:

$$\vec{E}(x, y, z) = (x^2 y z) \vec{i} + (x + y + 2z) \vec{j} + \left(\frac{xy}{z}\right) \vec{k}$$

Réponses

Nom :/Prénom :/Groupe :

I/

homogénéité de la formule

$$[F] = \frac{[G] \cdot [m]}{[R]}$$

$$[F] = [m][a]$$

$$= MLT^{-2}$$

$$[G] = M^{-1} L^3 T^{-2}$$

$$\Rightarrow MLT^{-2}$$

$$MLT^{-2} \neq L^2 T^{-2}$$

$$\frac{M^{-1} L^3 T^{-2} \cdot M}{L}$$

$$L^2 T^{-2}$$

elle n'est pas

valable dimensionnellement

Rectification

$$MLT^{-2} = L^2 T^{-2} M^{-1} - \text{more}$$

$$F = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \quad \text{longueur}$$

II.

Représentation

$$\|\vec{U}_1\| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 1} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$\|\vec{U}_2\| = \sqrt{1 + 3 + 1} = \sqrt{5}$$

$$\vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} (3\sqrt{3} + 1) - (3 - 1) + (-1 - \sqrt{3})$$

$$= \frac{1}{2} (3\sqrt{3} + 1) - 2 - (1 + \sqrt{3})$$

$$= \frac{3\sqrt{3} + 1 - 4 - 2 - 2\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

Le vecteur unitaire $\vec{u}$ est

$$\vec{u} = \frac{\vec{U}_1 + \vec{U}_2}{\|\vec{U}_1 + \vec{U}_2\|}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{U}_1 + \vec{U}_2}{\|\vec{U}_1 + \vec{U}_2\|}$$

$$\vec{u} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 = \frac{3}{2} \vec{i} + \vec{u}_k$$

$$\vec{u} = \frac{\frac{3}{2} \vec{i} + \vec{u}_k}{\sqrt{\frac{9}{4} + 1}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{13}} \left(\frac{3}{2} \vec{i} + \vec{u}_k \right)$$

III

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$= 2xy + 1 + \frac{xy}{z^2}$$

$$= 2xy + \frac{xy}{z^2} + 1$$

Interrogation écrite N° 1 (7.5Pts)

Sujet 4

I-

Deux masses ponctuelles m_1 et m_2 s'attirent avec une force gravitationnelle $\vec{F}_G$ (loi de la gravitation universelle), dont son module est :

$$F_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

G étant la constante universelle de gravitation.
 r est la distance entre les deux masses.

- Quelle est la dimension de la constant G ? En déduire son unité dans le système international.

II-

Dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les vecteurs suivants

$$\vec{V}_1 = 3\vec{i} + 3\vec{j}, \vec{V}_2 = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$$

- Représenter les vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2$.
- Calculer $\|\vec{V}_1\|, \|\vec{V}_2\|$.
- Calculer $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$, puis trouver l'angle formé par les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.
- Déterminer le vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par le vecteur $(\vec{V}_1 + \vec{V}_2)$;

III-

Calculer la divergence du champ vectoriel suivant:

$$\vec{E}(x, y, z) = \left(\frac{yz}{x}\right)\vec{i} + (x - 3y^2 + z)\vec{j} + \left(\frac{xy}{z^2}\right)\vec{k}$$

Réponses

Nom :/Prénom :/Groupe :

I-

$$F_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \Rightarrow G = \frac{F_G r^2}{m_1 m_2}$$

$$[G] = \frac{[F] [r]^2}{[m]^2}$$

$$[F] = [m] [a] \Rightarrow [F] = M L T^{-2}$$

$$[G] = \frac{M L T^{-2} \cdot L^2}{M^2} = M^{-1} L^3 T^{-2}$$

$$L \text{ unitaire: } [G] = M^{-1} L^3 T^{-2} = \frac{kg \cdot m^3}{kg \cdot s^2}$$

II)

* Representation.

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$$

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{1+9+1} = \sqrt{11}$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 3 \times 1 + 3 \times 3 + 0 \times 2$$

$$= 12$$

Distance point,

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \cos \theta$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\|} = \frac{12}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{11}}$$

$$= \frac{2\sqrt{66}}{11}$$

$$\Rightarrow \theta = 21.8^\circ$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{\|\vec{v}_1 + \vec{v}_2\|}$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{\|\vec{v}_1 + \vec{v}_2\|} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{\sqrt{11}}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = 4\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{16+36+1} = \sqrt{53}$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{53}} (4\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k})$$

III.

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$= -\frac{4z}{x^2} - 6y - \frac{2xz}{z^3}$$