

**A quoi sert le rapport des limites (Limits Reports):**

- Le rapport des limites montre les valeurs minimales et maximales que chaque variable peut atteindre sans autant violer les contraintes du programme linéaire. Ce rapport nous montre les variables critiques et les variables qui disposent d'une marge opérationnelle et qui nous permettent de prendre les décisions idoines et agir en conséquence (dans le domaine de production, logistique, etc.). On peut, par exemple, décider d'augmenter la production d'un produit pour répondre à la demande sans violer les capacités de l'entreprise ou d'autres contraintes.
- Ce rapport des limites sert donc à analyser le degré de flexibilité que l'on a face aux valeurs des variables. Si la solution optimale donne  $X_1 = 20$  et que le rapport des limites dit  $\text{Min} = 20$  et  $\text{Max} = 20$ , on conclut que la variable  $X_1$  est forcée par les contraintes et n'offre de ce fait aucune flexibilité (elle est donc très critique car elle est totalement déterminée par les contraintes). Par contre, si  $\text{Min } X_1 = 0$  et  $\text{Max} = 20$ , on déduit que nous avons une marge de manœuvre quant à la fixation de cette variable.
- Le rapport des limites peut nous permettre également de détecter des solutions optimales équivalentes quand on s'aperçoit que la valeur d'une variable peut varier sans autant bouger la valeur optimale (le rapport de sensibilité donne plus d'informations sur ce sujet).
- Il convient de noter que le rapport des limites n'est pas une simulation exacte du modèle complet avec la variable forcée à sa borne. Il calcule la valeur de l'objectif en ne faisant varier qu'une seule variable, toutes les autres étant fixées à leurs valeurs optimales initiales ; il ne ré-optimise pas le modèle.

**A quoi sert le rapport d'analyse de sensibilité (Sensitivity Analysis):**

Le rapport de sensibilité nous montre des informations pertinentes contenues dans les deux parties : des informations relatives aux cellules variables et des informations qui concernent les contraintes du PL.

1. Au niveau des cellules variables (Variables Cells) : le tableau des cellules variables traite des plages d'optimalité ; c'est-à-dire des plages sur lesquelles les coefficients des variables de décision peuvent varier sans modifier les valeurs des variables de décision dans la solution optimale actuelle.
- La colonne des **valeurs finales** des variables (**Final Value**) après l'optimisation : Ce sont les niveaux optimaux des activités considérées (quantités optimales à produire) qui permettent l'atteinte de l'objectif poursuivi (Max ou Min de la fonction économique ou fonction-objectif).
  - La colonne des **coûts réduits** (**Reduced Costs**) : pour chaque variable, nous avons sa valeur optimale et son coût réduit correspondant. La colonne du coût réduit nous montre de combien il faudrait modifier le coefficient de la variable (hors base, donc nulle) dans la fonction-objectif pour que cette variable devienne strictement positive à l'optimum (autrement dit, elle deviendrait variable de base).
    - Quand la variable est positive (nous sommes donc face à une variable de base), son coût réduit est nul. L'activité est donc exploitée car elle est rentable ; il n'est donc pas nécessaire de réduire son coût pour qu'elle rentre dans la solution car elle y est déjà. Dans ce cas, la valeur économique de l'activité est égale au profit (bénéfice) unitaire qu'elle génère.
    - En revanche, si la variable est hors base, elle est donc nulle, le coût réduit sera différent de zéro et l'interprétation économique diffère selon la nature de l'optimum à atteindre :
- Cas de Max : le coût réduit (négatif) désigne la valeur équivalente au coût réduit qu'il convient d'améliorer le coefficient de cette variable dans la fonction économique. Cette variable reste à 0 sauf si on améliore son coefficient d'au moins le coût réduit car elle ne génère pas assez de profit. Si l'on décide de forcer cette variable (par le rajout d'une contrainte supplémentaire en imposant par exemple  $X_1 = 1$  alors que sa valeur optimale est nulle), la valeur du profit va baisser d'un montant équivalent au coût réduit.

- Cas de Min : le coût réduit (positif) désigne la valeur dont il convient de baisser le coefficient dans la fonction économique (Min des Coûts) pour que cette variable devienne positive à l'optimum (deviendrait variable de base). Cette variable resterait à zéro tant qu'on ne baisse pas son coût (car elle est très onéreuse). Si l'on force cette variable à devenir positive, elle engendrera un coût supplémentaire équivalent au coût réduit pour chaque unité.
- Par ailleurs, le coût réduit nous permet de savoir si l'on est en face d'une solution optimale unique ou multiple. Rappelons que pour une variable de base (positive), il est normal que son coût réduit soit nul. En revanche, si l'on est en face d'une variable hors base (variable nulle à l'optimum) et son coût réduit est différent de zéro :
- Cas de Max :
  - Si tous les coûts réduits des variables hors base sont strictement négatifs, la solution optimale obtenue est unique.
  - Si au moins un des coûts réduits des variables hors base est nul, la solution optimale est multiple ; on peut donc introduire la variable correspondante dans la base et obtenir une autre solution optimale équivalente.
- Cas de Min :
  - Si tous les coûts réduits des variables hors base sont strictement positifs, la solution optimale obtenue est unique.
  - Si au moins un des coûts réduits des variables hors base est nul, la solution optimale est multiple ; on peut donc introduire la variable correspondante dans la base et obtenir une autre solution optimale équivalente.

Remarque :

Il convient de noter que dans certaines situations, on peut avoir une variable de base nulle à l'optimum. Dans ce cas, son coût réduit sera nul (du fait qu'elle est de base) et la solution optimale sera donc dégénérée (du fait de la présence d'un zéro dans l'un des éléments du second membre).

2. Au niveau des contraintes (Constraints) associées à l'emploi des ressources : le tableau des contraintes traite des plages de variation des éléments du second membre (côté droit des contraintes qui correspondent généralement aux ressources disponibles) pour lesquelles les prix fictifs (valeurs des variables duales) restent applicables.
- la première colonne de ce tableau nous indique les valeurs finales (après optimisation) des quantités utilisées des ressources.
- La deuxième colonne nous montre la valeur des variables duales ou prix fictif ou d'ombre (Shadow Price). On l'appelle prix d'ombre ou prix fictif, voir prix fantôme car il s'agit d'un prix qui n'est pas visible directement dans le modèle ; il n'apparaît pas dans les équations. Mais il représente une valeur économique cachée, révélée seulement après optimisation, d'où le mot *shadow* (ombre). Le prix fictif d'une ressource ou d'une contrainte mesure la variation de la valeur de la fonction-objectif (Z) suite à l'augmentation du côté droit d'une seule unité. C'est pourquoi on parle de valeur marginale d'une ressource.
  - Dans le cas de Maximisation de Z, le prix fictif mesure de combien le profit s'améliore si l'on décide d'utiliser une unité supplémentaire de la ressource en question.
  - Dans le cas de la recherche d'une minimisation (des coûts), le prix fictif désigne de combien va baisser le coût si l'on détend le côté droit d'une seule unité.

Par ailleurs, il est utile de noter les constats suivants : quand la contrainte est saturée (la quantité utilisée d'une ressource est égale au membre droit, c'est-à-dire à la quantité disponible), la variable d'écart (ou de surplus) correspondante est nulle. La contrainte est donc contraignante (contrainte liée) ; la valeur de la variable duale (prix fictif) de la contrainte correspondante est différente de zéro ; dans ce cas, la contrainte limite réellement l'optimum. C'est pourquoi on parle d'ailleurs de contrainte active. En revanche, quand la contrainte n'est pas saturée, la variable d'écart (ou de surplus) correspondante est différente de zéro (non nulle) ; la contrainte n'est donc pas contraignante (non limitante) et la variable duale correspondante est nulle.

#### Utilité du prix d'ombre (valeur marginale d'une ressource) :

- Le prix d'ombre désigne la valeur économique d'une ressource ; si le prix fictif d'une ressource est nul, la contrainte correspondante n'est donc pas saturée. Il ne sert absolument à rien d'augmenter l'emploi de cette ressource car cela n'impacte pas la valeur de la fonction-objectif ; sa valeur économique est donc nulle. En revanche, si on s'aperçoit que le prix fictif est non nul, on déduit que la variation des disponibilités de la ressource a un impact sur la valeur de la fonction économique. Ainsi, une valeur marginale très élevée correspond à une ressource onéreuse car l'augmentation de l'emploi de cette ressource induit une amélioration du profit (cas de Max). De ce qui précède, on déduit que sur la base des valeurs duales (prix fictifs) :
  - On peut décider quelle ressource il faut augmenter pour améliorer la performance de l'entreprise (établir l'ordre de priorité d'acquisition des ressources utilisées). En partant des niveaux des prix fictifs, on saura ainsi si ça vaut la peine d'augmenter le budget, le montant de la publicité, l'effectif du personnel, etc.
  - Les prix fictifs nous permettent également de calculer les valeurs économiques des activités. C'est ce qui nous permet de répondre à la question de savoir si ça vaut la peine de sous-traiter, de lancer un nouveau produit, de changer de domaine d'activité, etc.
- Les deux dernières colonnes de l'analyse de sensibilité nous montrent les variations autorisées des éléments du second membre (quantité des ressources disponibles) pour exploiter les valeurs des variables duales sans avoir à recalculer les valeurs des variables avec Excel Solver. On peut déduire directement les incidences sur la valeur de la fonction économique (Z) et les valeurs des variables de décision (niveaux d'activités) tant qu'on reste dans les limites des plages de variation autorisées.

Nb : Comment savoir si l'on est face à une solution optimale unique ou multiple :

- Si tous les coûts réduits s'avèrent négatifs (cas de Max) ou positifs (cas de Min), la solution optimale obtenue est unique. Si par contre, une variable principale (de décision) est hors base (elle est donc nulle) possède un coût réduit nul, la solution optimale obtenue est multiple ; on peut trouver une autre solution optimale équivalente en faisant entrer cette variable dans la base (dans Excel Solver, on peut le vérifier en rajoutant par exemple une contrainte forçant cette variable à devenir strictement supérieure à zéro (par exemple  $X_1 \geq 1$ )).
- Si on s'aperçoit que la valeur marginale d'une ressource est nulle alors que la contrainte correspondante est saturée. Cela dénote la présence d'une multiplicité de solutions optimales.
- On peut observer le rapport des limites, si on constate qu'une variable de décision dispose d'une marge de variation (entre limite inférieure et la limite supérieure) et que la valeur cible ne bouge pas (c'est toujours l'optimum), on déduit alors qu'on est en face d'une solution multiple.