

Série de TD n°4 Moment cinétique et Travail , Energie

(à traiter par les chargés de cours)

Moment cinétique

Exercice N°1 :

Dans un repère cartésien (O, x, y, z), le vecteur position d'un point matériel M de masse $m=6\text{kg}$ est donné par :

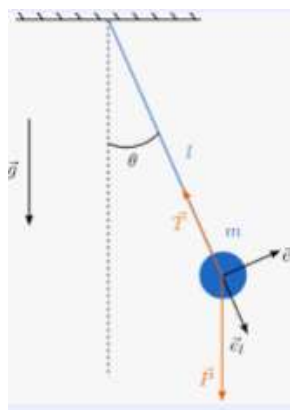
$$\vec{r} = (3t^2 - 6t)\vec{i} - 4t^3\vec{j} + (3t + 2)\vec{k}$$

- 1- Déterminer l'expression de la force \vec{F} agissant sur le point matériel M.
- 2- Déterminer le moment de cette force par rapport à l'origine O, $\vec{M}_{/O}(\vec{F})$.
- 3- Trouver la quantité de mouvement \vec{P} du point M, ainsi que son moment cinétique $\vec{L}_{/O}$.
- 4- Vérifier le théorème du moment cinétique TMC : $\frac{d\vec{L}_{/O}}{dt} = \vec{M}_{/O}(\vec{F})$

Exercice N°2 :

On considère un pendule simple constitué d'une bille de masse m suspendue à un fil inextensible et sans masse de longueur l . Le point de suspension est noté O, et la position du pendule est repérée par l'angle θ entre le fil et la verticale. On néglige les frottements de l'air.

1. Déterminer le moment cinétique \vec{L}_O de la bille par rapport au point O. On exprimera \vec{L}_O en fonction de m, l, θ et du vecteur unitaire \vec{k} perpendiculaire au plan de mouvement (OXY).
2. Calculer la dérivée temporelle $d\vec{L}_O/dt$.
3. Calculer les moments des forces qui s'exercent sur la bille.
4. En utilisant le théorème du moment cinétique, déduire l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$. Montrer que pour les petites oscillations ($\sin \theta \approx \theta$), le mouvement est harmonique et déterminer la pulsation propre ω_0 .



Travail et énergie

Exercice 1

Dans la base vectorielle (\vec{i}, \vec{j}) d'axes Ox et Oy , un point matériel est soumis à une force:

$$\vec{F}(x, y) = (2xy)\vec{i} + (x^2)\vec{j}$$

1. La force \vec{F} est-elle conservative ?
2. Sous l'action de cette force \vec{F} , le point matériel se déplace du point $O(0,0)$ au point $A(2,0)$.
 Calculer le travail reçu par ce point matériel (le travail de la force \vec{F}) lors de ce déplacement.
3. Calculer le travail de la force \vec{F} quand le point est déplacé du point $A(2,0)$ au point $B(2,4)$.
4. Calculer le travail total lors de ces deux déplacements successifs.
5. Calculer le travail de la force \vec{F} quand le point matériel se déplace suivant la courbe $y = x^2$ comprise entre les deux points O et B directement sans passer par le point A .
6. Est-elle une force conservative ? Pourquoi ?

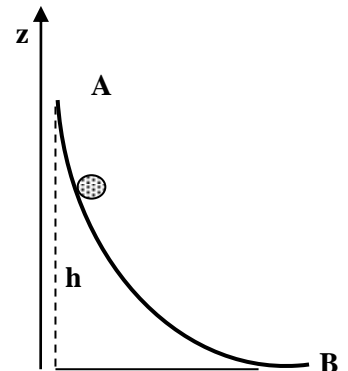
Exercice 3

L'énergie potentielle d'un point matériel est donnée par $E_p = k(x^2 + y^2 + z^2)$ où k est une constante. Quelle est la force agissant sur ce point ?

Exercice 03

Sur une piste AB, Une bille de masse m est lâchée du point A sans vitesse initiale. La bille parvienne le point B de la piste avec une vitesse $v_B = 6m/s$. La hauteur de la piste AB est $h = 2m$. On prend $g = 10 \text{ ms}^{-2}$

- 1- Montrer que la bille est soumise à des forces de frottement.
- 2- Calculer le travail de ces forces entre le point A et B si la masse de la bille est $m = 3kg$



Exercices supplémentaires

Exercice S1

Dans une base cartésienne (\vec{i}, \vec{j}) d'axes Ox et Oy , un point matériel est soumis à une force $\vec{F}(x, y)$, telle que:

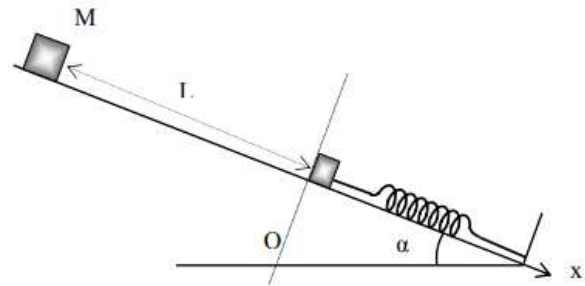
$$\vec{F}(x, y) = (x^2 y^3) \vec{i} + (x^3 y^2) \vec{j}$$

1. Trouver le travail fourni par cette force le long de ligne droite menant du point (0,0) au point (1,1).
2. Montrer que cette force est conservative.
3. Trouver l'expression de l'énergie potentielle $E_p(x, y)$ de laquelle la force \vec{F} dérive.

Exercice S2

Un objet assimilé à un point matériel M de masse m est abandonné sans vitesse initiale sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale où les frottements sont nulles. Après une distance L , l'objet rencontre un butoir solide d'un ressort idéal de masse négligeable et de raideur k (voir figure ci-contre).

1. Etablir un bilan des forces qui travaillent lors du mouvement de l'objet. Ces forces dérivent-elles d'une énergie potentielle ?
2. En prenant l'origine des énergies potentielles au point de contact O , exprimer chacune des énergies potentielles.
3. Ecrire l'énergie mécanique à l'instant initial. Ecrire l'énergie mécanique quand l'objet atteint le butoir ($x = 0, v = v_0$). Ecrire l'énergie mécanique quand le ressort est comprimé ($x > 0$). Quelle est la relation entre les énergies mécaniques trouvées à divers instants ? (justifier votre réponse)
4. En déduire x_{max} , la compression maximale du ressort.



Exercice S3

On considère le système mécanique représenté sur la figure ci-contre. Il est formé par un parcours ABC et un solide de masse $m = 20g$, assimilable à un point matériel. La partie AB est rectiligne confondue avec le plan horizontal. La partie BC est une boucle circulaire de rayon r . On repère le solide dans cette boucle par l'abscisse angulaire $\theta = \widehat{BOM}$. Les frottements sont négligeables sur tout le parcours ABC . On prend l'état de référence pour l'énergie potentielle de pesanteur le plan horizontal et l'axe (Oz) orienté vers le haut. On donne $g = 10 \text{ N/kg}$.

1. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur du solide en fonction de m, g et z l'altitude du solide mesurée à partir de l'état de référence choisi.
2. Déduire l'énergie potentielle de pesanteur au point M en fonction de m, g, r et α .
3. Pour quelle position l'énergie potentielle de pesanteur est maximale ? Justifier votre réponse.
4. Trouver l'expression de l'énergie mécanique du solide aux points suivants : A, B et C , sachant que le solide arrive au point C avec une vitesse v_c .
5. Montrer que le solide parcourt le périmètre du boucle, on doit avoir $E_c(A) > 2mgr$.



6. On donne $r = 1.5 \text{ m}$, calculer la valeur de la vitesse initiale v_A pour que le solide arrête au point C.

Exercice S4

On laisse tomber un objet de masse $m = 1 \text{ kg}$ du haut d'une tour de hauteur $h = 50 \text{ m}$ avec une vitesse initiale $v_0 = 10 \text{ m.s}^{-1}$. Désignons par v_s la vitesse de l'objet au niveau du sol.

1. Calculer l'énergie cinétique de l'objet à l'instant initial.
2. Ecrire l'expression de l'énergie cinétique de l'objet lorsqu'il arrive au niveau du sol en fonction de v_s .
3. Quelles sont les forces agissant sur l'objet pendant sa chute en l'absence de frottement ? Exprimer le travail de chacune de ces forces.
4. Ecrire le théorème de l'énergie cinétique. En déduire v_s la vitesse de l'objet et son énergie au niveau du sol. g). En déduire la valeur de son énergie cinétique lorsqu'il arrive au niveau du sol.

On suppose maintenant que la force de frottement de l'air existe et a comme valeur 1 N.

1. Exprimer le travail de la force de frottement de l'air.
2. Ecrire le théorème de l'énergie cinétique en présence de la force de frottement de l'air. En déduire v_s la valeur de l'énergie cinétique du corps lorsqu'il arrive au niveau du sol