

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique
Université Abderrahmane Mira - Bejaia



Faculté de Technologie
Département d'Hydraulique

Polycopié de cours

(Master 1)

Option : Ouvrages et Aménagements Hydrauliques

Matière

Hydraulique fluviale I

Présenté par :

Dr. SAKHRAOUI Fouad

Maître de conférences classe B

Laboratoire de Recherche en Hydraulique Appliquée et Environnement (LRHAE)

Préambule

L'hydraulique fluviale constitue une branche essentielle de l'hydraulique appliquée, centrée sur l'étude des écoulements à surface libre dans les cours d'eau naturels ou artificiels. Elle joue un rôle fondamental dans la conception, la gestion et la sécurisation des ouvrages hydrauliques, qu'il s'agisse de barrages, de digues, de canaux, de stations de pompage ou d'aménagements de berges.

Le présent cours, intitulé « *Hydraulique fluviale 1* », s'inscrit dans le programme du Master 1 Hydraulique - Option Ouvrages et Aménagements Hydrauliques, au sein du semestre 2, en tant qu'unité d'enseignement fondamentale. Il vise à consolider les acquis en hydraulique appliquée, en mettant l'accent sur les phénomènes d'écoulement en milieu fluvial, qu'ils soient permanents ou non.

Fruit de huit années d'expérience pédagogique, ce cours a été continuellement enrichi pour répondre aux exigences scientifiques et professionnelles du domaine. Il fournit aux étudiants une base solide pour l'analyse et la modélisation des écoulements à surface libre, en intégrant à la fois les fondements théoriques et les approches pratiques.

Le contenu du cours est structuré en quatre chapitres abordant une dimension essentielle de l'hydraulique fluviale. Chaque chapitre combine des éléments théoriques, des applications pratiques, des études de cas, ainsi que des exercices corrigés, afin de permettre aux étudiants de passer de la compréhension conceptuelle à la mise en œuvre opérationnelle.

À travers ce cours, les étudiants seront progressivement amenés à :

- Maîtriser les équations fondamentales de l'hydraulique à surface libre (Saint-Venant, continuité, quantité de mouvement),
- Analyser les différents régimes d'écoulement et leurs impacts hydrauliques,
- Comprendre les méthodes numériques employées pour résoudre les équations du mouvement en hydraulique fluviale,
- Préparer les fondements pour des modélisations hydrauliques 1D et 2D dans des contextes réels.

Dr. Fouad SAKHRAOUI

Sommaire

Chapitre I : Equations de base des écoulements à surface libre monodimensionnels

I.1 Introduction	1
I.2 Généralités sur les écoulements à surface libre	1
I.2.1 Géométrie et caractéristiques géométriques des canaux.....	2
I.2.2 Différents types d'écoulements.....	4
I.2.3 Régimes d'écoulements	5
I.3 Equation de continuité	5
I.4 Equation de la quantité de mouvement.....	6
I.5 Equation du mouvement.....	7
I.6 Equations gouvernant les différents types d'écoulements à surface libre	8
a. Ecoulement permanent.....	8
b. Ecoulement uniforme	8
c. Ecoulement graduellement varié.....	8
d. Ecoulement rapidement varié.....	8
I.7 Energie et énergie spécifique.....	9
I.8 Ecoulement dans les transitions.....	11
I.9 Conclusion.....	13
I.10 Exercices.....	13

Chapitre II : Ecoulements graduellement variés

II.1 Introduction	16
II.2 Définition et caractéristiques des écoulements graduellement variés	16
II.2.1 Hypothèses des écoulements graduellement variés.....	16
II.2.2 Charge spécifique	17
II.2.3 Hauteur normale	18
II.2.4 Régime critique.....	18
II.3 Equation de la surface libre.....	20
II.4 Classification des courbes de remous.....	22
II.4.1 Quelques exemples de profils des courbes de remous	24
II.5 Calcul du profil de la ligne d'eau (courbe de remous).....	27
II.5.1 Méthode par approximations successives (Direct Step Method)	27

II.5.2 Standard Step Method	28
II.6 Conclusion.....	29
II.7 Exercices	29

Chapitre III : Ecoulements non permanents monodimensionnels

III.1 Introduction.....	32
III.2 Equations du mouvement.....	32
a. Equation de continuité.....	32
b. Equation de quantité de mouvement (Saint-Venant).....	32
III.3 Méthodes de résolution	35
III.3.1 Approches numériques	35
III.3.2 Solutions simplifiées	36
III.4 Onde cinématique	36
III.5 Onde diffusive.....	37
III.6 Onde de translation	38
III.7 Conclusion	40
III.8 Exercices.....	40

Chapitre IV : Ecoulements bidimensionnels

IV.1 Introduction.....	42
IV.2 Hypothèses de base	42
IV.3 Equations de base : les équations de Saint-Venant 2D.....	42
IV.3.1 Equation de continuité.....	43
IV.3.2 Equation du mouvement.....	43
IV.4 Résolution des équations du mouvement.....	44
IV.4.1 Méthode des volumes finis	45
IV.4.2 Méthode des différences finies	46
IV.4.2 Méthode des éléments finis	47
IV.5 Applications typiques	49
IV.6 Conclusion.....	49
IV.7 Exercices	49

Références bibliographiques	53
--	-----------

CHAPITRE I : EQUATIONS DE BASE DES ÉCOULEMENTS À SURFACE LIBRE MONODIMENSIONNELS

I.1 Introduction

Les écoulements à surface libre désignent les écoulements dans lesquels une interface libre sépare le fluide de l'atmosphère, comme dans le cas des rivières, des canaux ou des barrages. Leur étude repose sur la mécanique des fluides et sur des équations fondamentales décrivant la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Dans ce chapitre, nous allons donner des généralités sur les écoulements à surface libre et établir les équations régissant ces écoulements en adoptant une approche monodimensionnelle.

I.2 Généralités sur les écoulements à surface libre

Un écoulement à surface libre est caractérisé par une interface entre le fluide en mouvement et l'atmosphère, comme les rivières, les canaux, les lacs, ... (**Figure I.1**). Contrairement aux écoulements en conduite fermée, où la pression joue un rôle dominant, les écoulements à surface libre sont principalement régis par la gravité et qui évolue en fonction des conditions hydrauliques (débit, pente, frottements, ...).

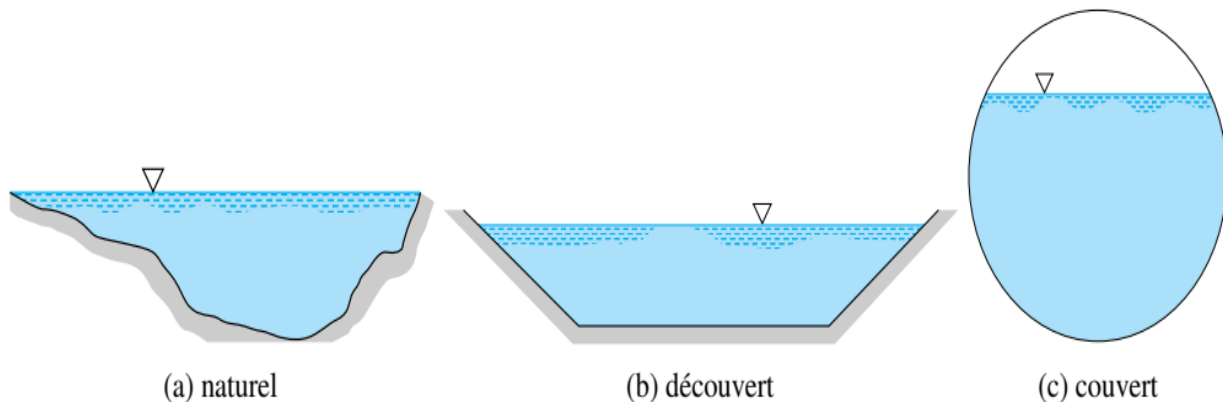


Figure I.1 - Types de canaux

Les canaux peuvent être classés en deux grandes catégories :

a. Les canaux naturels : Ces canaux correspondent aux cours d'eau formés naturellement à la surface ou en sous-sol, tels que les ruisseaux, torrents, oueds, rivières et fleuves. Leur morphologie

et leurs caractéristiques hydrauliques sont souvent irrégulières et varient en fonction des conditions naturelles.

b. Les canaux artificiels : Ils sont conçus et aménagés par l'homme pour diverses utilisations. On distingue deux types de canaux artificiels :

- *Sur terre (découverts)* : situés en surface, ils servent à la navigation, à l'évacuation des eaux, à l'irrigation ou au drainage. Contrairement aux cours d'eau naturels, leurs caractéristiques géométriques et hydrauliques sont généralement plus régulières.
- *Sous terre (couverts)* : ils incluent notamment les systèmes de drainage et les égouts destinés à l'évacuation des eaux usées et pluviales.

I.2.1 Géométrie et caractéristiques géométriques des canaux

La section transversale d'un canal est illustrée par la **figure (I.2)** ci-dessous :

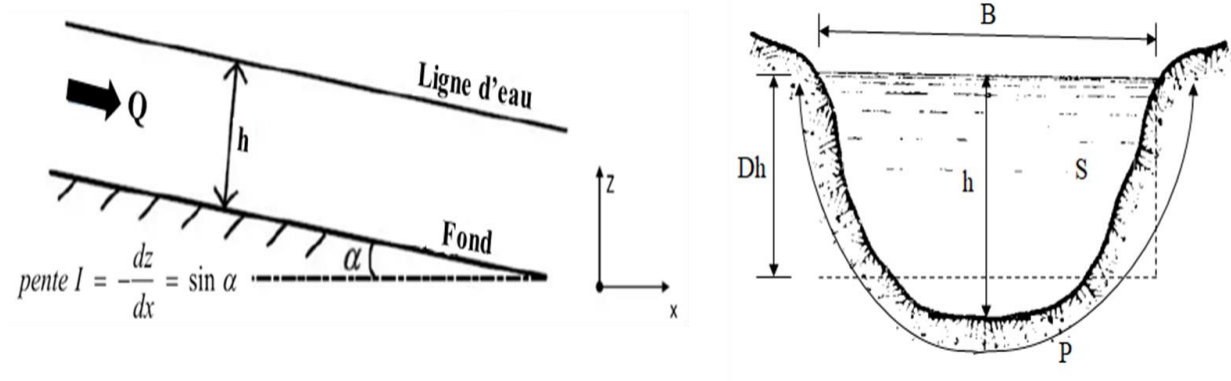


Figure I.2 - Eléments géométriques de la section

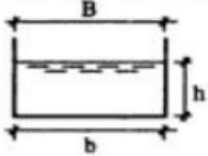
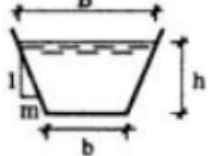
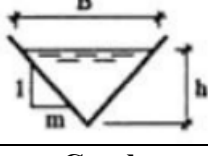
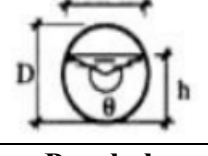
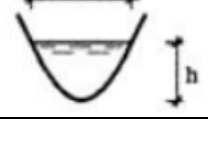
Les principales caractéristiques géométriques d'une section de canal sont les suivantes :

- **Section mouillée (S)** : correspond à la zone immergée du canal, délimitée par les parois et la surface libre,
- **Périmètre mouillé (P)** : représente la longueur de la ligne de contact entre l'eau et les parois du canal,
- **Tirant d'eau ou hauteur d'eau (h)** : désigne la distance entre la surface libre et le point le plus bas de la section du canal,
- **Largeur au miroir (B)** : correspond à la largeur du canal à la surface de l'eau, définie par la relation $B = S/h$,

- **Rayon hydraulique (R_h)** : exprimé par le rapport entre la section mouillée et le périmètre mouillé, soit $R_h = S/P$,
- **Profondeur hydraulique ou diamètre hydraulique (D_h)** : correspond au quotient de la section mouillée par la largeur au miroir, soit $D_h = S/B$,
- **Pente du fond du canal (I)** : définie par la tangente de l'angle d'inclinaison du lit du canal par rapport à l'horizontale.

Les différentes caractéristiques géométriques des canaux sont présentées dans le **tableau I.1**.

Tableau I.1 : Caractéristiques géométriques des canaux

	Section mouillée (S)	Périmètre mouillé (P)	Largeur au miroir (B)	Rayon hydraulique (R_h)	Diamètre hydraulique (D_h)
Rectangle 	$b \cdot h$	$b + 2h$	b	$\frac{b \cdot h}{b + 2h}$	h
Trapèze 	$bh + mh^2$	$b + 2h\sqrt{1 + m^2}$	$b + 2mh$	$\frac{bh + mh^2}{b + 2h\sqrt{1 + m^2}}$	$\frac{bh + mh^2}{b + 2mh}$
Triangle 	$m \cdot h^2$	$2h\sqrt{1 + m^2}$	$2mh$	$\frac{mh}{2\sqrt{1 + m^2}}$	$\frac{1}{2} h$
Cercle 	$\frac{1}{8} (\theta - \sin\theta) D^2$	$\frac{1}{2} (\theta \cdot D)$	$(\sin \theta/2) D$ Où $2\sqrt{h(D - h)}$	$\frac{1}{4} (1 - \frac{\sin\theta}{\theta}) D$	$(\frac{\theta - \sin\theta}{\sin\theta/2}) \frac{D}{8}$
Parabole 	$\frac{2}{3} (Bh)$	$B + \frac{8}{3} \cdot \frac{h^2}{B}$	$\frac{3}{2} \cdot \frac{S}{h}$	$\frac{2(B^2h)}{3B^2 + 8h^2}$	$\frac{2}{3} h$

I.2.2 Différents types d'écoulements

Les écoulements à surface libre peuvent être classés en fonction de leur variabilité dans le temps et dans l'espace :

- **Variabilité dans le temps**

Un écoulement est dit **permanent** lorsque la profondeur hydraulique ainsi que les vitesses (moyennes et ponctuelles) restent constantes au cours du temps. L'écoulement est considéré **non-permanent** si ces paramètres évoluent avec le temps (**Figure I.3**).

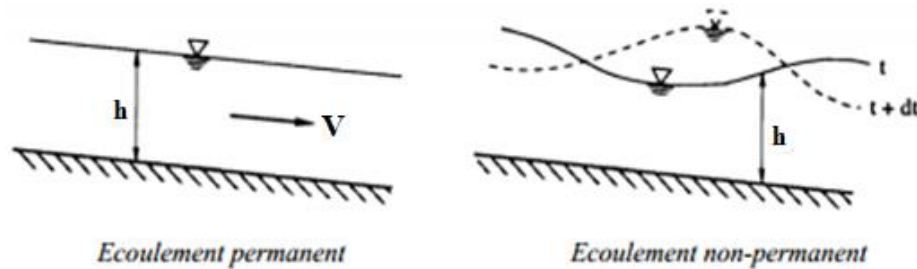


Figure I.3 - Ecoulements permanent et non-permanent

- **Variabilité dans l'espace**

L'écoulement d'un canal est **uniforme** lorsque la profondeur hydraulique et la vitesse ne subissent aucune variation le long du canal, restant identiques dans chaque section transversale. À l'inverse, si ces grandeurs changent d'une section à l'autre, l'écoulement est dit **non-uniforme** (**Figure I.4**).

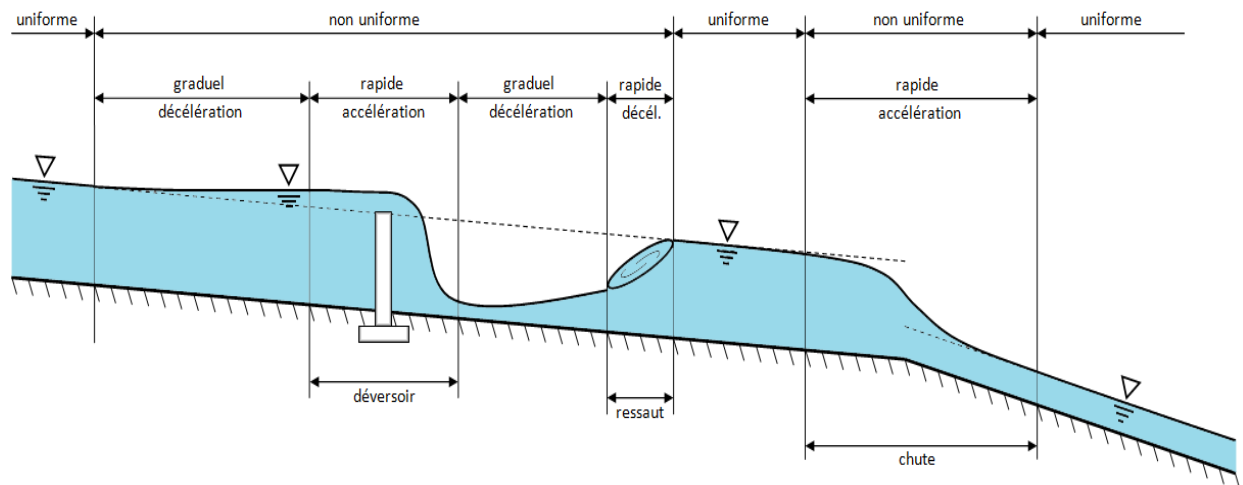


Figure I.4 - Différents types d'écoulement

I.2.3 Régimes d'écoulements à surface libre

Le comportement des écoulements à surface libre est déterminé par un paramètre adimensionnel reflétant l'influence de la gravité : **le nombre de Froude**. Ce dernier correspond au rapport entre les forces d'inertie et les forces gravitationnelles et s'exprime par :

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{g \cdot D_h}} \quad (1)$$

Où :

V : est la vitesse d'écoulement (m/s) ;

g : représente l'accélération de la pesanteur (m/s^2) ;

D_h : désigne la profondeur hydraulique (m).

L'écoulement est qualifié de **fluvial** lorsque le nombre de Froude est inférieur à 1 ($Fr < 1$), ce qui signifie que l'écoulement est principalement influencé par l'aval. À l'inverse, un écoulement **torrentiel** ($Fr > 1$) est gouverné par l'amont. Lorsque $Fr = 1$, l'écoulement atteint une condition **critique** correspondant à une profondeur spécifique, appelée hauteur d'eau critique h_c .

I.3 Equation de continuité

L'équation de continuité traduit la conservation de la masse. Pour un écoulement permanent et monodimensionnel, elle s'écrit sous la forme :

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dQ}{dx} = 0 \quad (2)$$

Où :

S : Section transversale de l'écoulement (m^2),

$Q = V \cdot S$: Débit volumique (m^3/s), où V est la vitesse moyenne de l'écoulement (m/s),

x : est la coordonnée longitudinale (m),

t : est le temps (s),

dS/dt : Variation temporelle de la section transversale,

dQ/dx : Variation spatiale du débit.

Interprétation physique

- Si le débit Q augmente dans la direction x , la section S doit diminuer pour conserver la masse.
- Cette équation est valable pour tout écoulement incompressible.

En régime permanent ($\frac{dS}{dt} = 0$), l'équation de continuité se simplifie en :

$$\frac{dQ}{dx} = 0 \quad (3)$$

Indiquant que le débit est constant le long de l'écoulement.

I.4 Equation de la quantité de mouvement

L'équilibre entre les forces agissant sur un volume de contrôle dans un écoulement à surface libre est illustré dans la **figure I.5** :

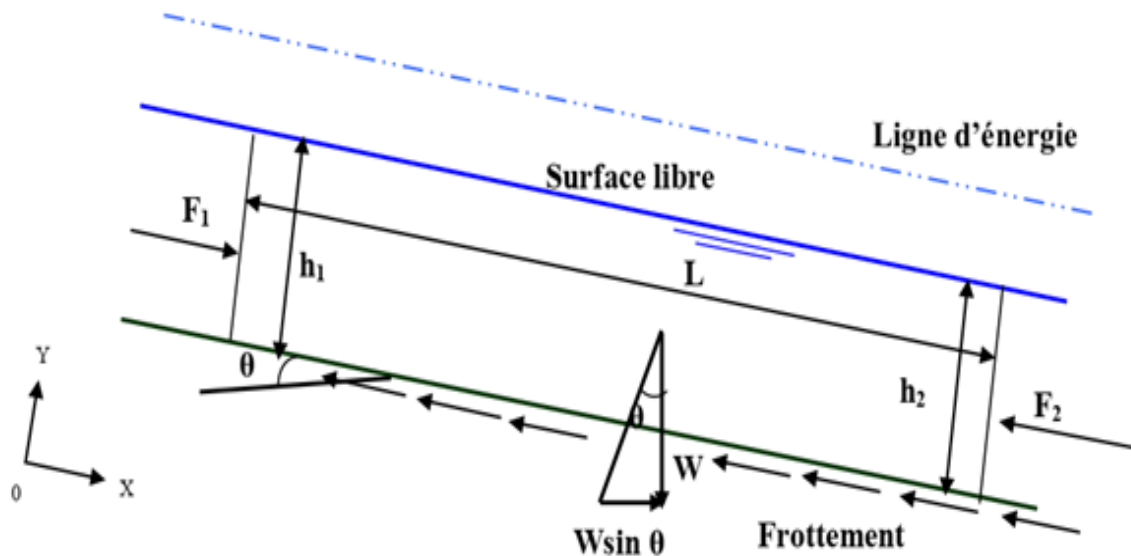


Figure I.5 - Forces agissant sur un volume de contrôle dans un écoulement à surface libre

Où :

Forces de pression (F_1 et F_2) : exercées sur les surfaces du volume de contrôle.

Forces de gravité ($W \sin \theta$) : dues au poids du fluide.

Forces de frottement : induites par les parois du canal et le fond du lit.

L'équation de la quantité de mouvement, ou équation de Saint-Venant, exprime la conservation de la quantité de mouvement. Elle s'écrit :

$$\frac{d(\rho V S)}{dt} + \frac{d(\rho V^2 S)}{dx} + \rho g S \frac{dh}{dx} = \tau_p P \quad (4)$$

Où :

ρ : est la masse volumique du fluide (kg/m³),

g : est l'accélération de la pesanteur (m/s²),

h : est la hauteur d'eau (m),

P : est le périmètre mouillé (m),

τ_p : est la contrainte de frottement au lit du cours d'eau (Pa).

Explication des termes

a. *Terme d'accélération locale* : $d(\rho VS)/dt$, variation temporelle du débit.

b. *Terme d'accélération convective* : $d(\rho V^2 S)/dx$, variation spatiale de l'énergie cinétique.

c. *Terme de pression* : $\rho g S (dh/dx)$, force due au gradient de hauteur d'eau.

d. *Terme de gravité et frottement* : $\tau_p P$, force motrice due à la pente et force résistante due aux frottements.

I.5 Equation du mouvement

L'équation du mouvement résulte de l'équilibre entre les forces d'inertie, gravitationnelles et de frottement.

Si l'on néglige l'accélération locale et que l'on introduit la pente du lit I et la pente de l'énergie J , on obtient l'équation simplifiée de l'équilibre des forces :

$$I - J = \frac{1}{g} \frac{dV}{dx} + \frac{V}{g} \frac{dV}{dx} \quad (5)$$

Dans un écoulement uniforme, $I = J$, ce qui conduit à l'établissement des formules empiriques de **Chézy** et de **Manning**.

I.6 Equations gouvernant les différents types d'écoulements à surface libre

Les équations de Saint-Venant peuvent être adaptées pour décrire différents types d'écoulements :

a. Ecoulement permanent : Les variables ne dépendent pas du temps ($\partial/\partial t = 0$).

- Equation de continuité : $\partial Q/\partial x = 0$ (débit constant).
- Equation dynamique : $\partial/\partial x (\rho V^2 S) + \rho g S \partial h/\partial x = g S (I - J)$.

b. Ecoulement uniforme : La hauteur d'eau et la vitesse sont constantes dans l'espace ($\partial/\partial x = 0$), déterminé par Chézy et Manning.

- Equation de continuité : $Q = \text{constante}$.
- Equation de dynamique : $I = J$ (équilibre entre gravité et frottements).

L'équation de Chézy est définie comme suit :

$$V = C \sqrt{R_h I} \quad (6)$$

Où :

C : est le coefficient de Chézy. Selon Manning, il est égal à :

$$C = \frac{\alpha R_h^{1/6}}{n} \quad (7)$$

Où :

n : est le coefficient de frottement de Manning et α est un coefficient d'unité qui vaut **1** en système international et **1,486** en système anglo-saxon.

En remplaçant le coefficient C dans la formule de Chézy et en introduisant le débit $Q = V.S$, on obtient la formule de Manning :

$$Q = \frac{1}{n} S R_h^{2/3} I^{1/2} \quad (8)$$

c. Ecoulement graduellement varié : Les variations de la surface libre sont lentes.

- Equation simplifiée : $\partial h/\partial x = (I - J) / (1 - Fr^2)$, où Fr est le nombre de Froude.

d. Ecoulement rapidement varié : Les variations de la surface libre sont brusques, présence de chutes, seuils, ressauts hydrauliques.

- L'équation de Bresse permet de modéliser ces variations : $\partial h/\partial x = (I - J) / (1 - Fr^2)$.

I.7 Energie et énergie spécifique

L'équation de l'énergie est basée sur l'équation de Bernoulli appliquée à un écoulement à surface libre (**Figure I.6**).

L'énergie totale dans un écoulement à surface libre est donnée par :

$$E = z + h + \frac{V^2}{2g} \quad (9)$$

Où :

z : est l'altitude du fond du lit,

h : est la hauteur d'eau,

$V^2/2g$: est la charge cinétique.

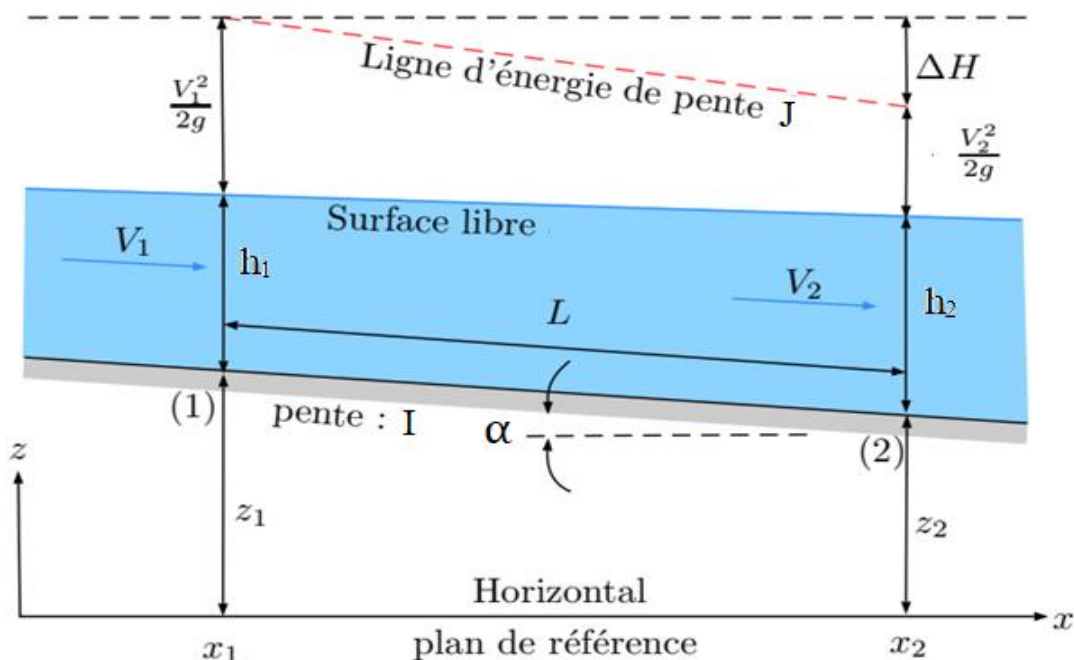


Figure I.6 – Hauteurs d'énergies dans un écoulement à surface libre

Conformément au principe de conservation de l'énergie, l'énergie totale en un point aval est équivalente à celle d'un point amont, à laquelle s'ajoute la dissipation d'énergie due aux pertes par frottement générées par l'écoulement. Cette relation s'exprime par l'équation suivante :

$$z_1 + h_1 + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + h_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H \quad (10)$$

Où : ΔH représente la perte d'énergie, exprimée en hauteur de colonne d'eau.

L'énergie spécifique E_s correspond à l'énergie mesurée par rapport au fond du canal (**Figure I.7**) et se définit par :

$$E_s = h + \frac{V^2}{2g} \quad (11)$$

Le régime critique est atteint lorsque :

$$dE_s/dh = 0$$

Cette condition permet de distinguer les trois régimes d'écoulement : subcritique (fluvial), critique et supercritique (torrentiel).

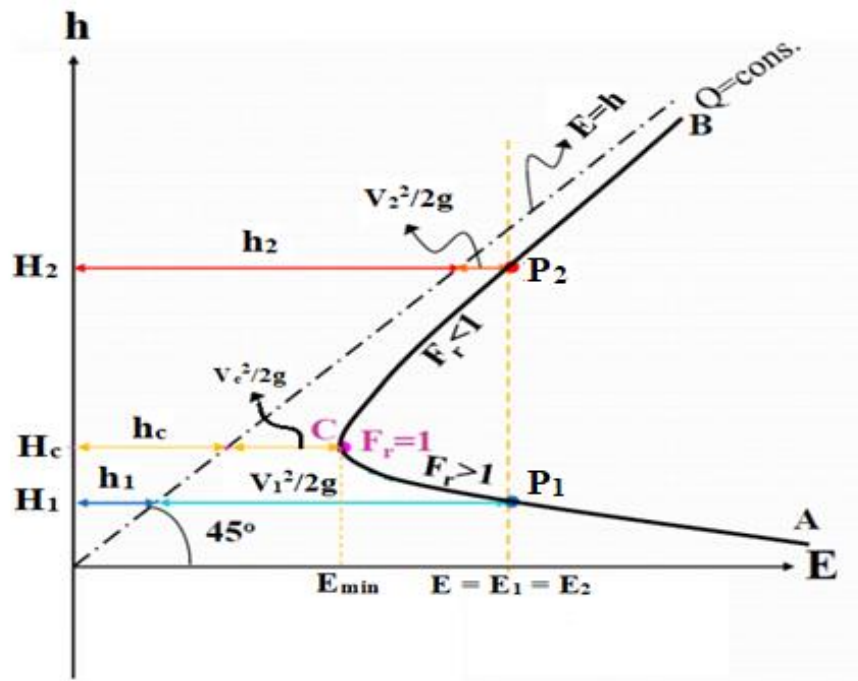


Figure I.7 – Courbe d'énergie spécifique

Caractéristiques de la courbe d'énergie spécifique

La courbe d'énergie spécifique présente deux abscisses : $E = h$ et $h = 0$. Elle est constituée de deux branches distinctes :

- **Branche AC** : qui tend asymptotiquement vers l'axe horizontal lorsque $h \rightarrow 0$.
- **Branche BC** : qui se rapproche progressivement de la ligne $E = h$ lorsque $h \rightarrow \infty$.

Sur cette courbe, le débit Q reste constant. Chaque point **P** de la courbe représente une hauteur d'eau en ordonnée et une énergie spécifique en abscisse.

Pour une valeur donnée d'énergie spécifique, il existe deux profondeurs d'écoulement possibles, notées h_1 et h_2 , qui correspondent respectivement à un régime **supercritique (torrentiel)** et **subcritique (fluvial)** (points P_1 et P_2).

Le point **C** de la courbe représente l'énergie spécifique minimale, qui correspond à un **écoulement critique**, caractérisé par un nombre de Froude égal à 1 ($Fr = 1$). À cet état critique, la hauteur d'eau est égale à la **profondeur critique** h_c .

I.8 Ecoulement dans les transitions

Les transitions sont des zones où la géométrie du canal change brusquement (élargissement, rétrécissement, changement de pente). Les équations de Saint-Venant doivent être adaptées pour tenir compte des variations locales.

- **Rétrécissement**

La section transversale du canal diminue, ce qui entraîne une augmentation de la vitesse d'écoulement selon l'équation de continuité.

La hauteur d'eau diminue si l'écoulement est subcritique et augmente si l'écoulement est supercritique (**Figure I.8**).

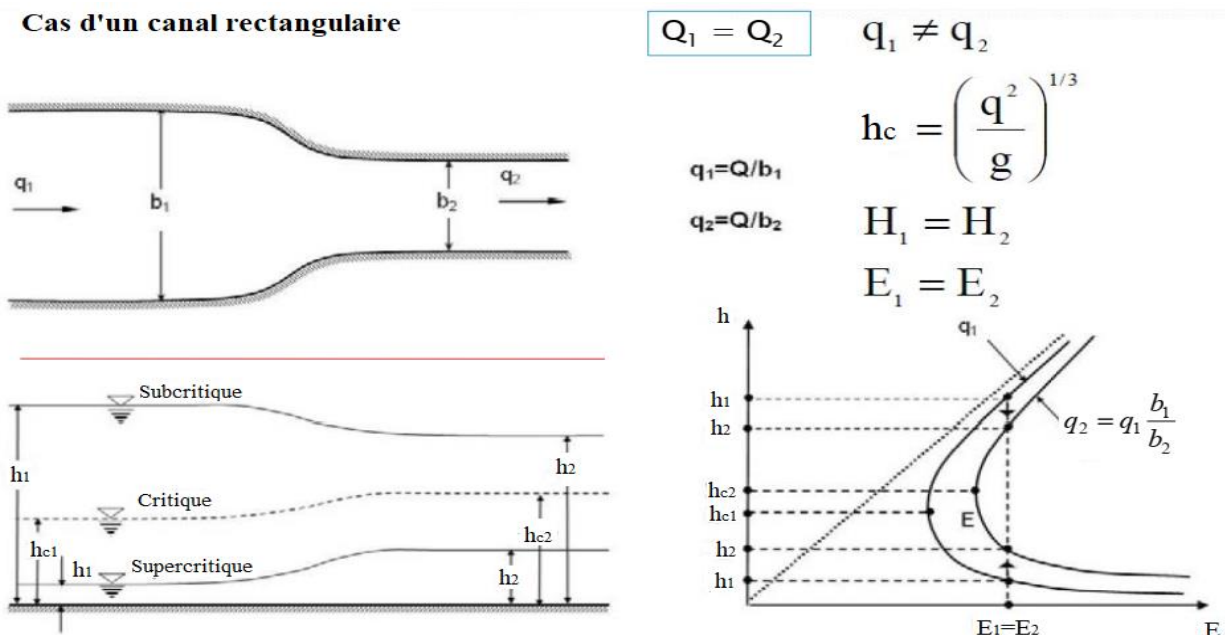


Figure I.8 – Ecoulement à travers un rétrécissement (canal rectangulaire)

- **Elargissement**

La section du canal s'agrandit, réduisant ainsi la vitesse du fluide.

En régime subcritique, la hauteur d'eau augmente, tandis qu'en régime supercritique, elle diminue (Figure I.9).

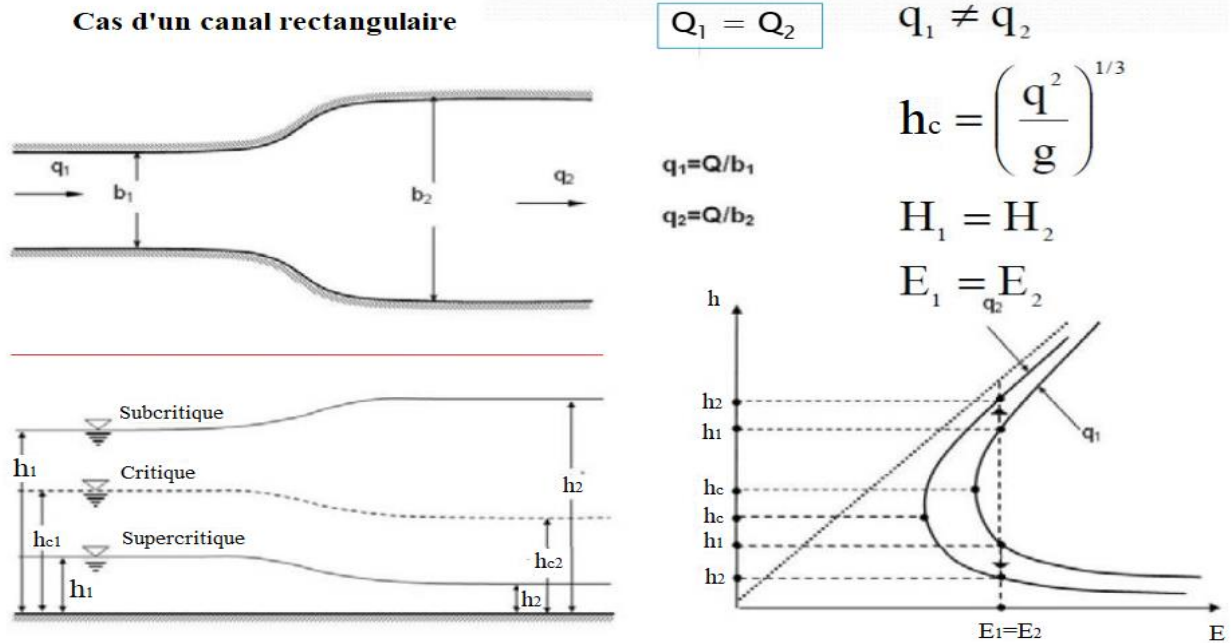


Figure I.9 – Ecoulement à travers un élargissement (canal rectangulaire)

- **Variation de pente**

Une augmentation de la pente du lit du canal peut conduire à une accélération du flux et à une transition vers un écoulement supercritique (Figure I.10).

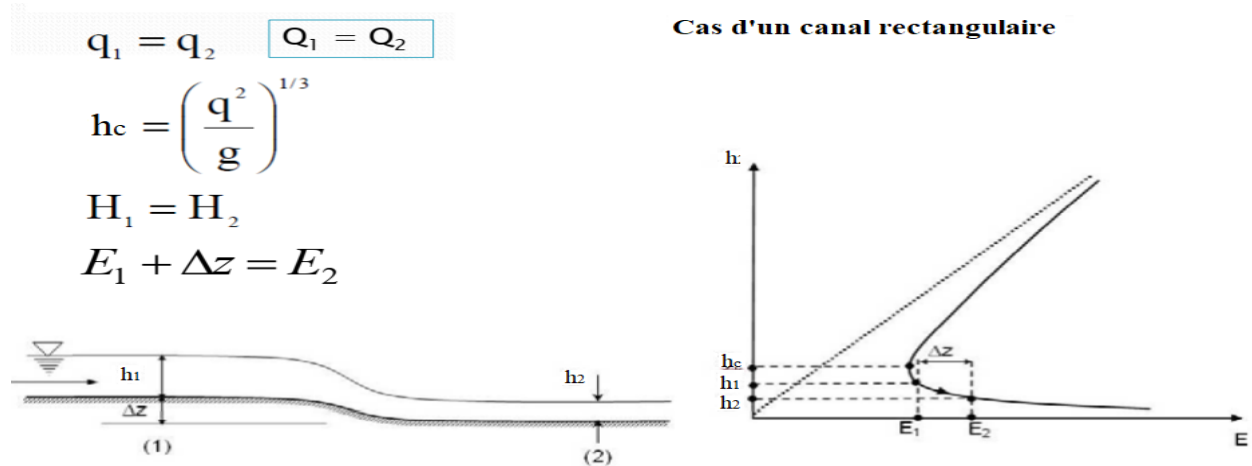


Figure I.10 – Ecoulement dans une augmentation de pente (canal rectangulaire)

À l'inverse, une diminution de pente peut ralentir l'écoulement et favoriser un régime subcritique (Figure I.11).

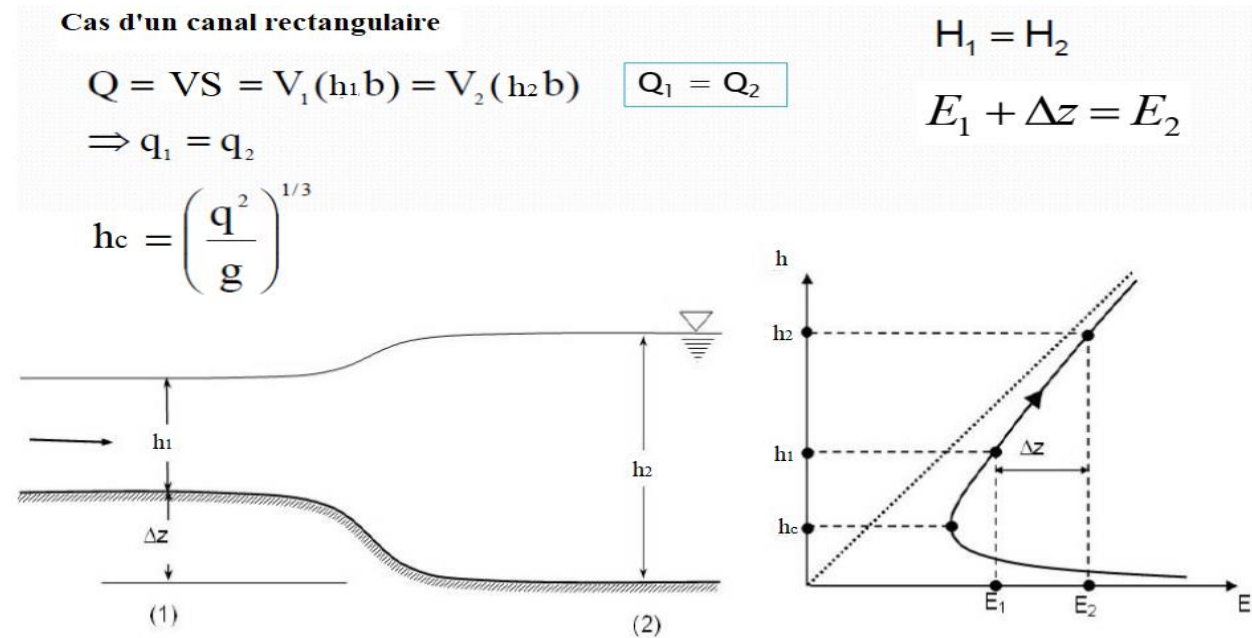


Figure I.11 – Ecoulement dans une diminution de pente (canal rectangulaire)

I.9 Conclusion

Les écoulements à surface libre monodimensionnels sont gouvernés par les équations de continuité, de quantité de mouvement et d'énergie. Leur résolution permet d'analyser différentes conditions d'écoulement, qu'ils soient uniformes ou graduellement variés. La prise en compte des forces gravitationnelles et des forces de frottement est essentielle pour la modélisation hydraulique des rivières et des canaux.

I.10 Exercices

Exercice I.1 : Ecoulement uniforme dans un canal rectangulaire

Un canal rectangulaire de largeur $b = 5$ m transporte un débit constant de $Q = 15$ m³/s. La profondeur d'eau mesurée est $h = 1,5$ m.

1. Calculez la vitesse moyenne de l'écoulement.
2. Calculez le nombre de Froude.
3. Déterminez le régime d'écoulement.

Solution I.1 :

1. Vitesse moyenne

$$S = b \cdot h = 5 \cdot 1,5 = 7,5 \text{ m}^2, V = Q/S = 15/7,5 = 2 \text{ m/s}$$

2. Nombre de Froude

$$Fr = V/(gh)^{0.5} = 2/(9,81 \cdot 1,5)^{0.5} \approx 0,52$$

3. Régime d'écoulement

Comme $Fr < 1 \Rightarrow$ régime subcritique.

Exercice I.2 : *Ecoulement uniforme dans un canal trapézoïdal*

Un canal trapézoïdal de largeur de fond $b = 4 \text{ m}$ et de fruit de talus $m = 1$ transporte un débit $Q = 10 \text{ m}^3/\text{s}$. La profondeur d'eau est $h = 1,2 \text{ m}$.

1. Calculez la surface mouillée S et le rayon hydraulique R_h .
2. Calculez la vitesse moyenne.
3. Calculez le nombre de Froude et précisez le régime.

Solution I.2 :

1. Géométrie

$$\text{Largeur au miroir : } B = b + 2h = 4 + 2 \cdot 1,2 = 6,4 \text{ m}$$

$$\text{Surface mouillée : } S = bh + mh^2 = 6,24 \text{ m}^2$$

$$\text{Périmètre mouillé : } b + 2h\sqrt{1 + m^2} = 7,12 \text{ m}$$

$$\text{Rayon hydraulique : } R_h = S/P = 0,88 \text{ m}$$

2. Vitesse moyenne

$$V = Q/S = 10/6,24 = 1,6 \text{ m/s}$$

3. Nombre de Froude

$$Fr = V / (g \cdot h)^{0.5} = 1,6 / (9,81 \cdot 1,2)^{0.5} \approx 0,47$$

Comme $Fr < 1 \Rightarrow$ régime subcritique.

Exercice I.3 : *Détection du régime critique*

Pour un canal rectangulaire de 3 m de large, déterminer la profondeur critique pour un débit de $Q = 6 \text{ m}^3/\text{s}$. En déduire la vitesse critique et le nombre de Froude associé.

Solution I.3 :

1. Profondeur critique dans un canal rectangulaire

$$h_c = \left(\frac{Q^2}{gb^2}\right)^{1/3} = (0,4077)^{1/3} \approx 0,74 \text{ m}$$

2. Vitesse critique

$$V = Q / (b h_c) = 6 / (3 \cdot 0,74) = 2,7 \text{ m/s}$$

3. Nombre de Froude critique

$$Fr = V_c / (gh_c)^{0.5} = 2,7 / (9,81 \cdot 0,74)^{0.5} \approx 1$$

Comme $Fr = 1 \Rightarrow$ régime critique.

CHAPITRE II : ECOULEMENTS GRADUELLEMENT VARIÉS

II.1 Introduction

Dans les écoulements à surface libre, la hauteur d'eau peut varier le long du canal en raison de divers facteurs, tels que la pente du lit, la rugosité des parois ou encore la présence d'ouvrages hydrauliques. Lorsque ces variations sont progressives et continues, on parle d'**écoulement graduellement varié**.

Ce type d'écoulement se distingue des **écoulements uniformes**, où la profondeur d'eau reste constante, et des **écoulements rapidement variés**, qui se caractérisent par des changements brusques de hauteur d'eau (comme dans un ressaut hydraulique).

L'étude des écoulements graduellement variés est essentielle en hydraulique pour comprendre le comportement des rivières, des canaux et des ouvrages de régulation. Ce chapitre examine les principes fondamentaux, les équations gouvernantes et les profils caractéristiques associés à ce type d'écoulement.

II.2 Définition et caractéristiques des écoulements graduellement variés

Un **écoulement graduellement varié (EGV)** est un écoulement à surface libre dont la hauteur d'eau change progressivement le long du canal. Il est **non uniforme** et peut être **permanent** ou **non permanent**, selon la constance des conditions hydrauliques dans le temps.

II.2.1 Hypothèses des écoulements graduellement variés

L'étude des écoulements graduellement variés repose sur plusieurs hypothèses :

- L'écoulement est permanent, c'est-à-dire que les conditions ne varient pas au cours du temps.
- Le fluide est incompressible et newtonien.
- La pente du lit est faible ($\tan \alpha \approx \alpha$), permettant d'utiliser l'approximation des petites pentes.
- Les forces d'inertie sont négligées par rapport aux forces gravitationnelles et de frottement.
- La distribution des vitesses est supposée uniforme dans chaque section transversale.

II.2.2 Charge spécifique

L'énergie totale E dans une section d'écoulement est la somme de trois composantes :

- La hauteur géométrique (z) : Correspond à l'altitude du point considéré par rapport à un plan de référence.
- La hauteur piézométrique ($h \cos(\alpha)$) : Représente la pression exercée par la colonne d'eau perpendiculaire au fond du canal.
- La hauteur cinétique ($V^2/2g$) : Correspond à l'énergie due à la vitesse d'écoulement.

L'expression de l'énergie totale en un point donné s'écrit donc sous la forme :

$$E = z + h \cos(\alpha) + \frac{V^2}{2g} \approx z + h + \frac{V^2}{2g} \quad (1)$$

Dans le cas d'un écoulement à surface libre, la **ligne d'énergie diminue** systématiquement dans la direction de l'écoulement en raison des pertes d'énergie par frottement et dissipation (**Figure II.1**).

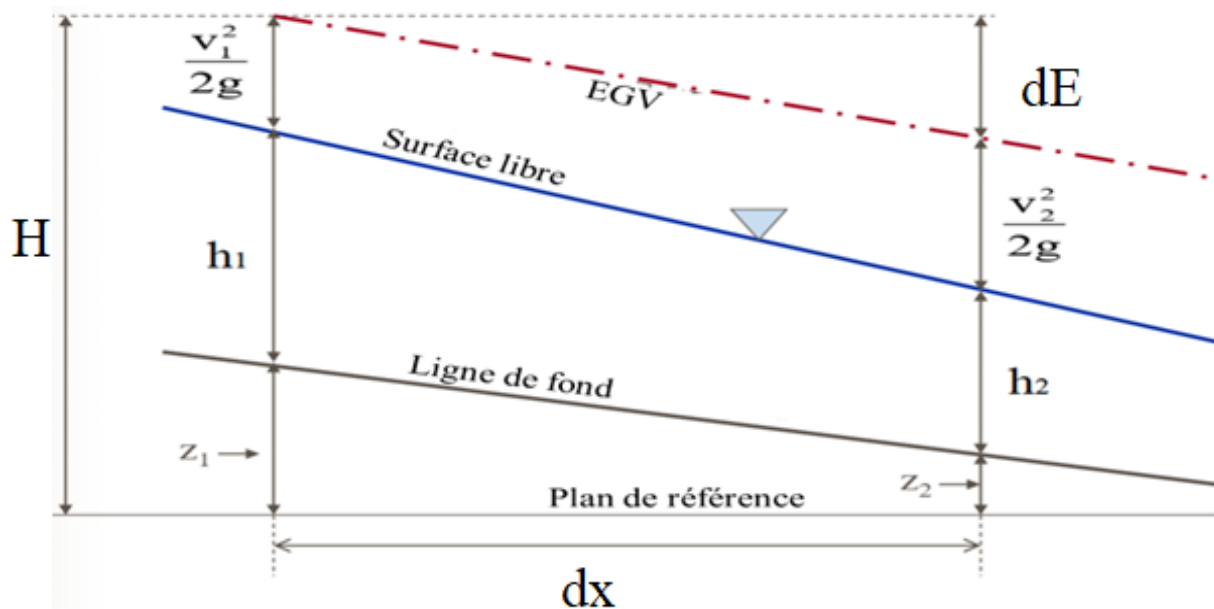


Figure II.1 - Diagramme d'énergie pour les écoulements graduellement variés

La charge spécifique, qui est une forme particulière de l'énergie, est définie par :

$$H_s = h + \frac{V^2}{2g} = h + \frac{Q^2}{2gS^2} \quad (2)$$

Contrairement à l'énergie totale E , qui décroît toujours dans la direction de l'écoulement en raison des pertes de charge, la **charge spécifique H_s** peut avoir différentes évolutions :

- **Régime uniforme** : H_s reste constante, car l'énergie est uniformément distribuée le long de l'écoulement.
- **Régime non uniforme** : H_s peut croître ou décroître en fonction des variations de profondeur et de vitesse d'écoulement.

II.2.3 Hauteur normale

La **hauteur normale** d'eau h_n est la profondeur d'écoulement atteinte dans un canal si l'écoulement est uniforme, c'est-à-dire sans influence des conditions amont ou aval. Autrement dit, c'est la profondeur d'eau que l'on observerait dans un canal de pente, de rugosité et de section transversale constantes, pour un débit donné.

Dans un écoulement uniforme, le régime est établi de façon stable, et l'ensemble des paramètres hydrauliques (vitesse, profondeur, énergie spécifique) restent constants tout au long du canal.

La hauteur normale h_n peut alors être déterminée en résolvant l'équation de continuité en fonction de h , selon la géométrie du canal considéré (rectangulaire, trapézoïdal, triangulaire, ...).

$$Q = \frac{1}{n} S R_h^{2/3} I^{1/2} \quad (3)$$

II.2.4 Régime critique

Le régime critique correspond à une condition particulière de l'écoulement où l'énergie spécifique est minimale. Il est représenté par le point **C** sur la courbe de l'énergie spécifique (**Figure I.7**). A ce point, la profondeur de l'écoulement est appelée **profondeur critique h_c** .

L'expression mathématique du régime critique est obtenue en dérivant l'énergie spécifique par rapport à la hauteur d'eau et en annulant cette dérivée : $dH/dh = 0$

$$\text{D'où : } \frac{Q^2 B}{g S^3} = 1 \rightarrow \frac{Q}{\sqrt{g}} = S_c \sqrt{\frac{S_c}{B_c}} \quad (4)$$

Où :

S_c : section mouillée critique,

B_c : largeur de la surface libre au régime critique.

L'analyse de la courbe de l'énergie spécifique (**Figure I.7**) montre que, lorsqu'on s'approche du régime critique, une légère variation de la charge spécifique entraîne une variation significative de la profondeur d'eau. Cela se traduit par des oscillations importantes de la surface libre, souvent visibles dans les écoulements naturels ou en laboratoire.

a. Profondeur critique h_c

La **profondeur critique h_c** est la hauteur d'eau correspondant au régime critique. Elle dépend de la forme de la section du canal :

- **Pour une section rectangulaire**, la profondeur critique est donnée par : $h_c = (Q^2/gB^2)^{1/3}$
- **Pour les autres sections**, la profondeur critique est obtenue à partir d'une relation spécifique à la géométrie du canal.

b. Pente critique I_c

La **pente critique** d'un canal est la pente nécessaire pour que l'écoulement soit **simultanément uniforme et critique**. Elle est définie comme la pente du canal permettant d'atteindre une profondeur normale h_n égale à la profondeur critique h_c .

Le régime est uniforme (Loi de Chézy) : $Q = C S R_{hc}^{0.5} I_c^{0.5}$

Le régime est critique (dérivé de l'équation de l'énergie spécifique) : $Q^2 B / g S^3 = 1$

En combinant ces équations, on obtient l'expression de la pente critique :

$$I_c = \frac{g S_c}{C^2 R_{hc} B} \quad (5)$$

Où :

I_c : pente critique,

C : coefficient de Chézy,

R_{hc} : rayon hydraulique au régime critique.

L'évolution du régime d'écoulement dépend de la comparaison entre la pente réelle **I** et la pente critique **I_c** :

- Si **I = I_c** → **h_n = h_c** : L'écoulement est critique.
- Si **I > I_c** → **h_n < h_c** : Le canal a une **forte pente** et l'écoulement est **torrentiel**.
- Si **I < I_c** → **h_n > h_c** : Le canal a une **faible pente** et l'écoulement est **fluvial**.

II.3 Equation de la surface libre

Considérons un petit élément de canal de longueur différentielle **dx**, représenté dans la **figure II.2**. Tous les termes intervenant dans l'équation d'énergie en régime permanent y sont indiqués. L'analyse de l'équilibre hydraulique entre les sections **x** et **x+dx** conduit à l'établissement d'une relation fondamentale décrivant l'évolution de la surface libre dans le canal :

$$\frac{V^2}{2g} + h + I dx = J dx + \frac{V^2}{2g} + d\left(\frac{V^2}{2g}\right) + h + dh$$

$$\frac{dh}{dx} + \frac{d}{dx}\left(\frac{V^2}{2g}\right) = I - J \quad (6)$$

Où :

I : désigne la pente du fond du canal, généralement positive,

J : représente la pente de la ligne d'énergie (ou pente de perte de charge), qui est généralement inférieure à **I** du fait des pertes d'énergie dues au frottement exercé par les parois du canal.

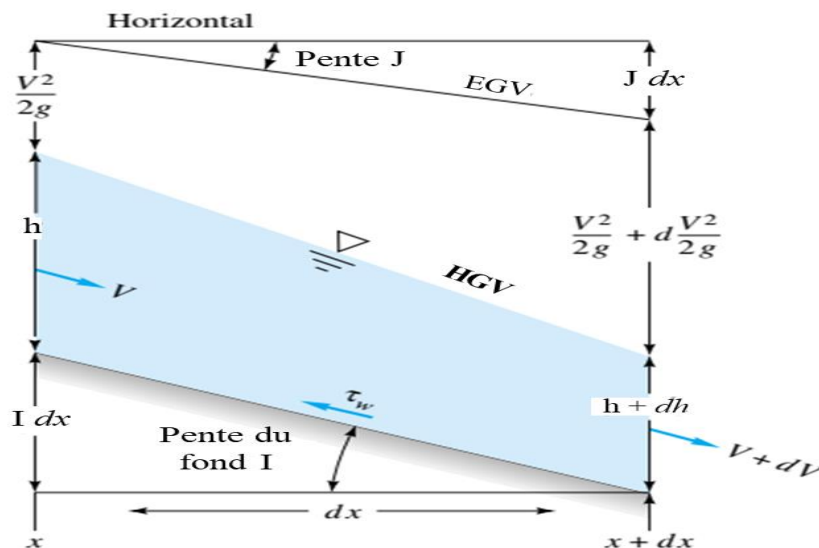


Figure II.2 - Bilan énergétique entre deux sections d'un écoulement graduellement varié dans un canal ouvert.

Pour éliminer la dérivée de la vitesse, on part de l'équation de continuité pour un régime permanent, en différenciant cette expression, on obtient :

$$\frac{dQ}{dx} = 0 = S \frac{dV}{dx} + V \frac{dS}{dx} \quad (7)$$

Avec : $dS = Bdh$, où : B est la largeur du canal à la surface libre.

Cela permet de remplacer la dérivée de la vitesse dV/dx entre les équations (6) et (7), on obtient :

$$\frac{dh}{dx} \left(1 - \frac{B V^2}{gS} \right) = I - J \quad (8)$$

Enfin, la forme finale de l'équation de l'écoulement graduellement varié est la suivante :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{I - J}{1 - Fr^2} \quad (9)$$

L'analyse du **signe du dénominateur** dépend du nombre de Froude :

Si $Fr < 1$, l'écoulement est **subcritique** (fluvial) et le dénominateur est positif,

Si $Fr > 1$, l'écoulement est **supercritique** (torrentiel) et le dénominateur est négatif,

Si $Fr = 1$, l'écoulement est **critique**, et l'équation devient singulière (indéterminée).

Le numérateur de l'équation (9) change de signe par rapport à I et J , qui est la pente équivalente à un écoulement uniforme au même débit Q :

$$J = \frac{f}{D_h} \frac{V^2}{2g} = \frac{V^2}{R_h C^2} = \frac{n^2 V^2}{\alpha^2 R_h^{4/3}} \quad (10)$$

Où : C est le coefficient de Chézy.

Le comportement de l'équation (9) dépend donc de l'ampleur relative de la pente locale du fond $I(x)$, par rapport à l'écoulement uniforme ($h = h_n$) et à un écoulement critique ($h = h_c$). Le paramètre adimensionnel α est égal à 1,0 pour les unités SI.

II.4 Classification des courbes de remous

L'analyse des écoulements graduellement variés repose en grande partie sur la classification des profils de la surface libre. Cette classification s'effectue selon deux critères principaux :

- La comparaison entre la pente réelle du canal I et la pente critique I_c , qui correspond à la condition où la profondeur d'eau est égale à la profondeur critique h_c pour un débit Q donné ;
- La relation entre la profondeur d'écoulement réelle h , la profondeur critique h_c , et la profondeur normale h_n .

En fonction de ces éléments, on distingue **cinq (05) types de pentes de canal**, chacune pouvant engendrer jusqu'à **trois formes caractéristiques** de courbes de remous, selon la position relative du point initial de calcul par rapport à h_n et h_c . Cela donne **douze (12) profils** théoriques distincts.

Les différents types de courbes de remous sont présentés au **tableau II.1** et illustrés dans la **figure II.3** :

Tableau II.1 : Configurations possibles de la surface libre

Classe de pente	Notation de pente	Classe de tirant d'eau	Courbes de remous
$I > I_c$	Raide (Steep)	$h_c > h_n$	S1, S2, S3
$I = I_c$	Critique (Critical)	$h_c = h_n$	C1, C3
$I < I_c$	Modérée (Mild)	$h_c < h_n$	M1, M2, M3
$I = 0$	Horizontale	$h_n = \infty$	H2, H3
$I < 0$	Adverse (Pente négative)	$h_n = \text{Imaginaire}$	A2, A3

Chaque type de pente peut générer jusqu'à trois types de courbes notées 1, 2, et 3, selon la position du point de départ du profil :

- **Type 1** : La profondeur initiale est supérieure à h_n et à h_c .
- **Type 2** : La profondeur initiale est comprise entre h_n et h_c .
- **Type 3** : La profondeur initiale est inférieure à h_n et à h_c .

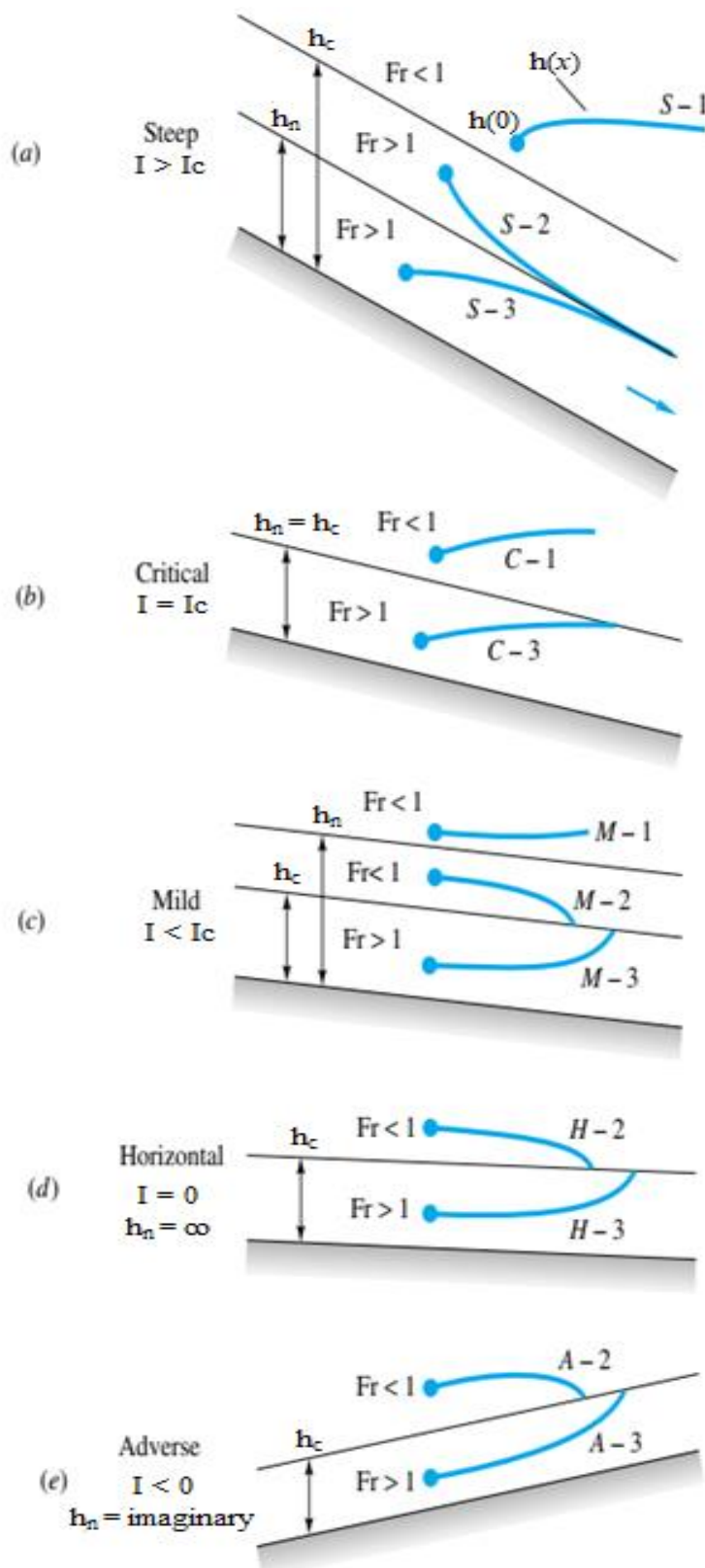


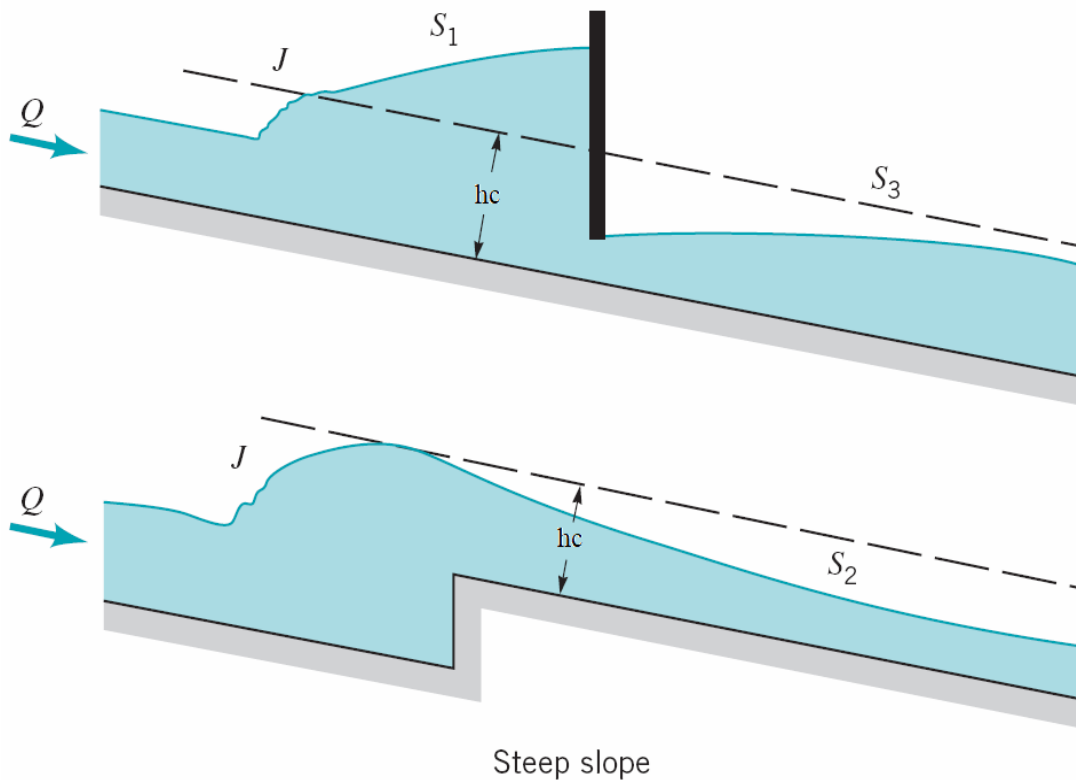
Figure II.3 – Ecoulement graduellement varié pour cinq classes de pente de canal, montrant les douze courbes de remous.

Comportement des différents types de courbes de remous :

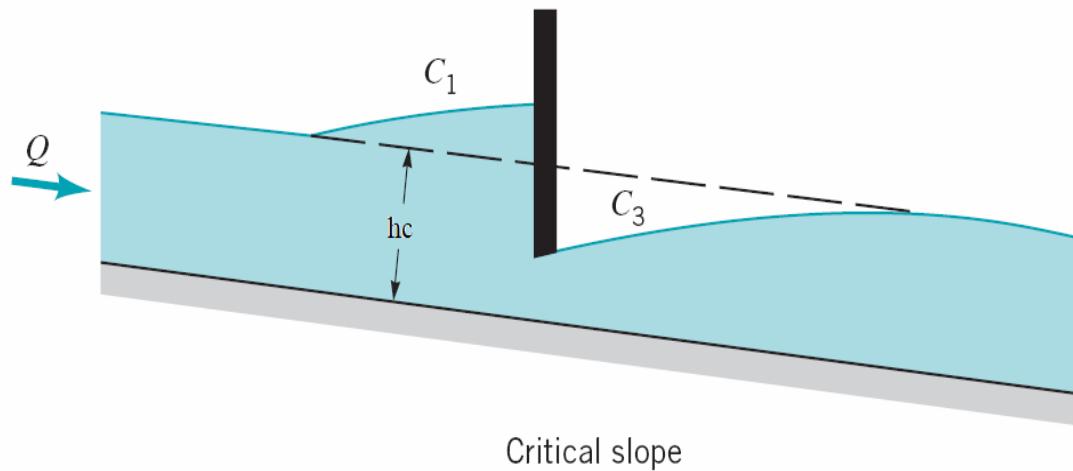
- **Courbes de type 1** : Elles apparaissent lorsque le point initial est situé au-dessus des deux profondeurs caractéristiques. Le tirant d'eau augmente, s'éloignant davantage de h_n et h_c .
- **Courbes de type 2** : Ces profils se développent lorsque h est compris entre h_n et h_c . En l'absence de variation de la pente ou de la rugosité, le profil tend asymptotiquement vers la plus basse des deux profondeurs.
- **Courbes de type 3** : Le point initial est en dessous de h_n et h_c . Le profil s'élève et tend vers la plus faible des deux valeurs.

II.4.1 Quelques exemples de profils des courbes de remous

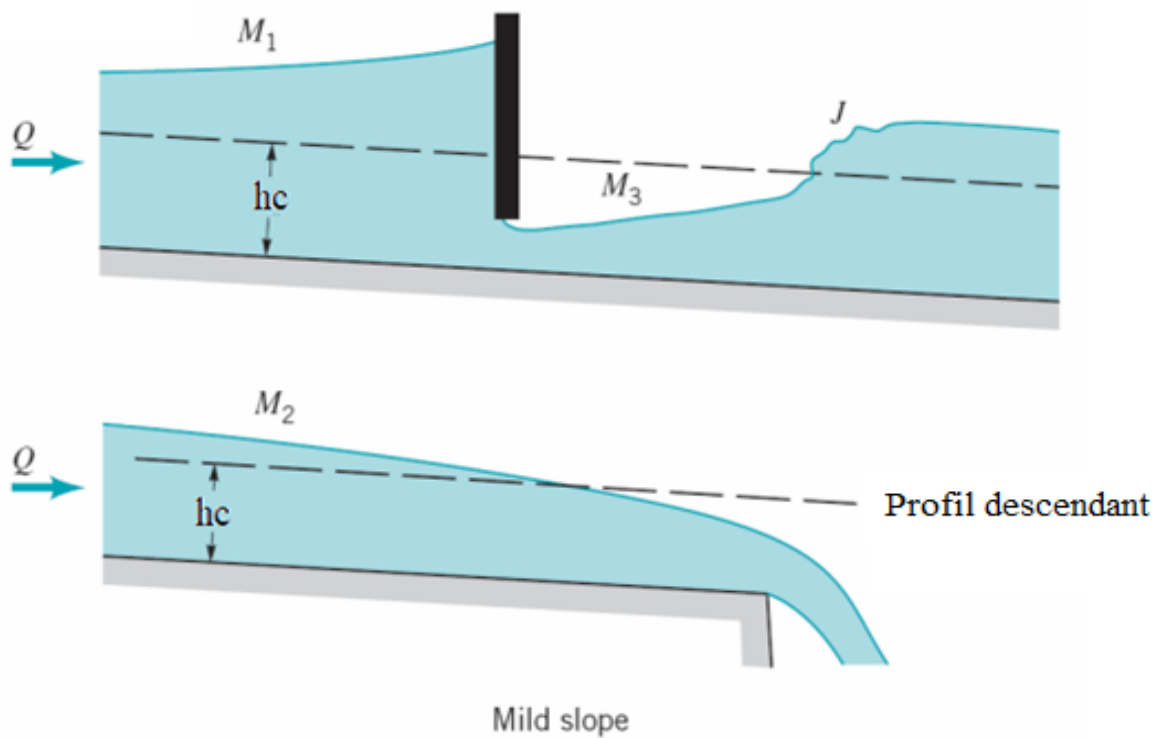
a. Configurations de surface typiques pour un écoulement à profondeur non uniforme avec une forte pente. ($I > I_c$).



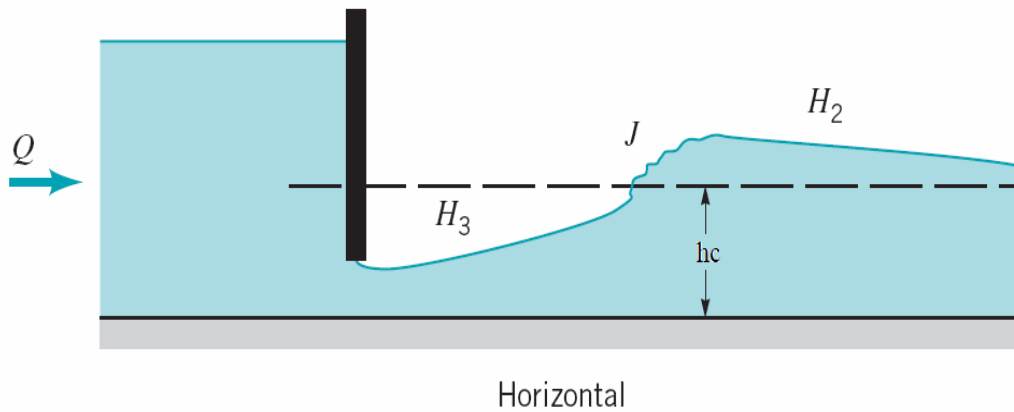
b. Configurations de surface typiques pour un écoulement à profondeur non uniforme avec une pente critique. ($I = I_c$).



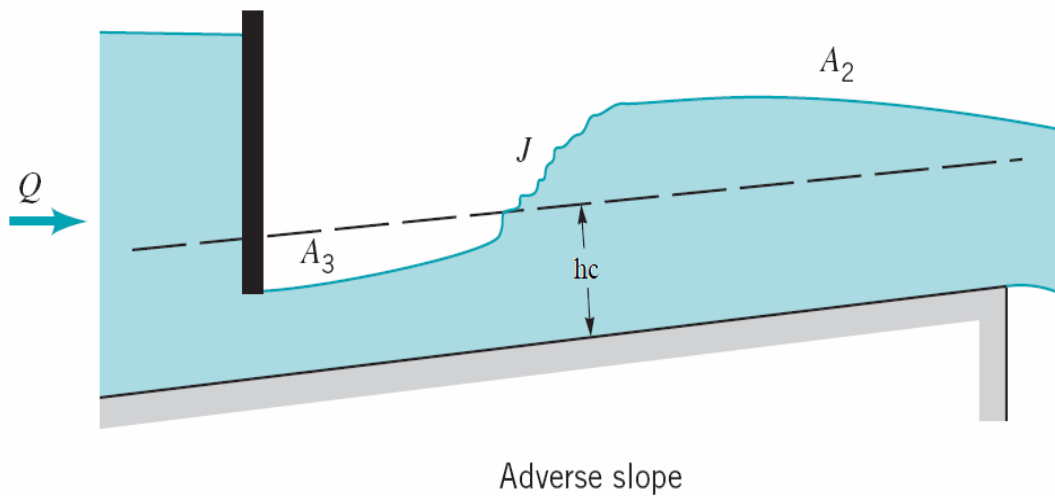
c. Configurations de surface typiques pour un écoulement à profondeur non uniforme avec une faible pente. ($I < I_c$).



d. Configurations de surface typiques pour un écoulement à profondeur non uniforme avec une pente horizontale. ($I = 0$).



e. Configurations de surface typiques pour un écoulement à profondeur non uniforme avec une contre pente. ($I < 0$).



Les illustrations présentées, mettent en évidence que les variations des conditions hydrauliques dans un canal à surface libre peuvent engendrer des profils d'écoulement particulièrement complexes. Ces changements peuvent résulter de modifications de la pente du fond, de la géométrie de la section, de la rugosité des parois ou encore de la présence d'obstacles, conduisant à une succession de régimes d'écoulement (fluvial, critique ou torrentiel) et à des transitions entre différents profils de remous.

II.5 Calcul du profil de la ligne d'eau (courbe de remous)

L'analyse des écoulements graduellement variés nécessite le calcul du profil de la surface libre, communément appelé **courbe de remous**. Deux méthodes numériques sont couramment utilisées pour effectuer ce calcul : la méthode des approximations successives et la méthode du pas standard.

II.5.1 Méthode par approximations successives (Direct Step Method)

Cette méthode repose sur l'application de l'équation de conservation de l'énergie entre deux sections très rapprochées d'un canal (**Figure II.4**). Elle s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{V_1^2}{2g} + I_x \Delta L + h_1 = \frac{V_2^2}{2g} + J \Delta L + h_2 \quad (11)$$

$$\Delta L = \frac{\left(\frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g} \right) + h_1 - h_2}{J - I_x}$$

Avec :

$$J = \frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{n^2 Q^2}{S^2 R_h^{4/3}}$$

Où :

V_1 et V_2 : sont les vitesses d'écoulement aux sections 1 et 2,

h_1 et h_2 : sont les tirants d'eau aux mêmes sections,

I_x : est la pente du fond du canal,

J : est la perte de charge spécifique (pente de la ligne d'énergie),

ΔL : est la distance longitudinale entre les deux sections.

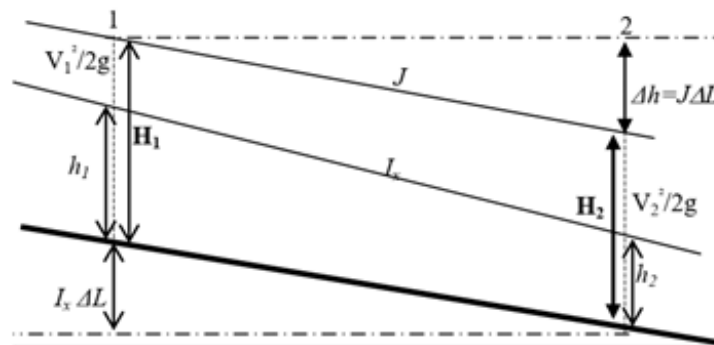


Figure II.4 – Représentation des termes d'énergie dans un écoulement graduellement varié.

Cas 1 : h_1 et h_2 connus

On peut calculer directement la distance ΔL entre les deux sections à l'aide de l'équation (11).

Cas 2 : h_1 connu et h_2 inconnu (ou l'inverse)

Le calcul devient itératif :

1. Supposer une valeur initiale pour h_2 .
2. Calculer la section mouillée moyenne $S_{\text{moy}} = (S_1 + S_2)/2$, ainsi que le périmètre mouillé moyen P_{moy} et le rayon hydraulique moyen $R_{h \text{ moy}}$.
3. En déduire la pente de perte de charge moyenne J_{moy} .
4. Calculer ΔL calculé à partir de l'équation (11).
5. Comparer ΔL calculé au ΔL donnée, si l'écart est supérieur à une précision fixée, corriger h_2 et recommencer l'itération.

$$(\Delta L_{\text{calculé}} - \Delta L_{\text{donnée}}) < \text{précision.}$$

II.5.2 Standard Step Method

Dans cette méthode, la position spatiale est fixée et l'on calcule la profondeur d'eau correspondante. L'équation de conservation de l'énergie est ici formulée de manière symétrique pour deux sections :

$$\frac{V_1^2}{2g} + h_1 + \frac{1}{2}(\Delta x) J_1 = \frac{V_2^2}{2g} + h_2 + \frac{1}{2}(\Delta x) J_2 - (\Delta x) I \quad (12)$$

Cette méthode est utilisée comme suit :

- **Condition aval connue (cas d'un écoulement fluvial) :**

On part d'une profondeur h_2 connue et on cherche h_1 sur une distance Δx amont. L'équation (12) est alors résolue de manière implicite, généralement par une méthode itérative. À chaque itération, la nouvelle profondeur est mise à jour selon :

$$(h_1)_{i+1} = (h_1)_i + \Delta h_i$$

Où l'erreur est évaluée par comparaison du membre droit de l'équation (12) au membre gauche, avec mise à jour jusqu'à convergence.

$$\Delta h_i = \frac{(MD)_i - (MG)}{\left(1 - Fr_1^2 + \frac{3(\Delta x)J_1}{2R_{h1}}\right)_i}$$

$(h_1)_i$ est la profondeur d'eau à l'itération i , $(MD)_i$ le membre droit de l'équation (12), Fr_1 est le nombre de Froude correspondant à h_1 .

- **Condition amont connue (cas d'un écoulement torrentiel) :**

De manière analogue, on résout l'équation (12) pour estimer h_2 , en utilisant l'estimation :

$$(h_2)_{i+1} = (h_2)_i + \Delta h_i$$

Et :

$$\Delta h_i = \frac{(MD)_i - (MG)}{\left(1 - Fr_2^2 + \frac{3(\Delta x)J_2}{2R_{h2}}\right)_i}$$

Dans les deux cas, la vitesse et la pente de perte de charge sont recalculées à chaque itération, à partir de la profondeur courante, en utilisant la relation de continuité.

II.6 Conclusion

L'étude des écoulements graduellement variés constitue une étape essentielle dans la compréhension des phénomènes hydrauliques en canal à surface libre. Contrairement aux régimes uniformes, ces écoulements se caractérisent par une variation progressive de la profondeur de l'eau le long du canal, sous l'influence conjointe de la pente du fond, de la rugosité, et des conditions aux limites. L'analyse repose sur l'application de l'équation d'énergie, complétée par des outils numériques tels que la méthode des approximations successives ou la méthode du pas standard, permettant de tracer les profils de la ligne d'eau avec une bonne précision.

II.7 Exercices

Exercice II.1 : Classification d'une courbe de remous

Un canal trapézoïdal de pente 0,001, de largeur de fond $b = 5$ m, de talus 1H : 1V et d'un coefficient de Manning $n = 0,030$, transporte un débit $Q = 30$ m³/s.

Le niveau d'eau en aval est imposé à 2,5 m.

1. Calculez les hauteurs critiques et normales.
2. Déterminez le type de profil de remous en supposant que la profondeur amont est $h_0 = 4,0$ m.

Solution II.1 :

1. Calcul de la profondeur critique (h_c)

Le calcul de la profondeur critique nécessite une itération numérique, mais on donne ici la valeur approchée : $h_c \approx 1,8$ m

2. Calcul de la profondeur normale (h_n)

Utilisation de la formule de Manning (itérative) $\rightarrow h_n \approx 3,0$ m

3. Classification du profil

La pente est douce ($h_n > h_c$).

$h_0 = 4,0$ m $> h_n \rightarrow$ zone 1.

\rightarrow Il s'agit d'une courbe M1 (remous amont causé par un obstacle ou une retenue en aval).

Exercice II.2 : Calcul d'une courbe de remous par la méthode du pas direct

Dans un canal rectangulaire de 6 m de large, de pente $I = 0,002$ et Manning $n = 0,025$, un débit constant $Q = 20$ m³/s est imposé.

On souhaite déterminer la courbe de remous sur 100 m, en partant d'une profondeur initiale $h_1 = 2,1$ m.

1. Calculez la profondeur normale.

2. Utilisez la méthode du pas direct avec un pas $\Delta x = 20$ m pour calculer les profondeurs sur cinq sections.

Solution II.2 :

1. Profondeur normale

À l'aide de la formule de Manning :

$$Q = \frac{1}{n} S R_h^{2/3} I^{1/2} \rightarrow h_n \approx 1,6 \text{ m}$$

2. Méthode du pas direct (énergie spécifique E et Δx)

Pour chaque section, on utilise la relation :

$$\Delta x = \frac{E_{i+1} - E_i}{I - J}$$

- Calculs itératifs sur tableur ou à la main.
- La courbe obtenue sera une **M1**, décroissante de $h = 2,1$ m vers $h \approx 1,6$ m sur 100 m.

Exercice II.3 : Effet d'un seuil sur la courbe de remous

Un canal de largeur $b = 4$ m transporte un débit de $10 \text{ m}^3/\text{s}$. Un seuil est placé à l'aval et provoque une retenue, imposant une profondeur d'eau de 2,5 m juste en amont du seuil.

La pente du canal est $I = 0,003$, le coefficient de Manning est $n = 0,018$.

1. Calculez la profondeur normale et critique.
2. Identifiez le type de courbe de remous générée par la présence du seuil.
3. Estimez la distance sur laquelle la ligne d'eau revient à la profondeur normale.

Solution II.3 :

1. Profondeur critique **$h_c \approx 1,4$ m**, Profondeur normale **$h_n \approx 1,9$ m**.
2. Le seuil impose une profondeur $> h_n \rightarrow$ **Zone 1**, pente douce (**$h_n > h_c \Rightarrow M1$**).
3. Utilisation approximative de la méthode du pas direct :
 \rightarrow Longueur estimée de remous \approx **80 à 120 m** selon la pente et la perte de charge.

CHAPITRE III : ECOULEMENTS NON PERMANENTS MONODIMENSIONNELS

III.1 Introduction

Les écoulements non permanents monodimensionnels se caractérisent par une variation des paramètres hydrauliques (profondeur, vitesse, débit) au cours du temps et suivant une seule direction spatiale (en général, l'axe du canal). Ces écoulements sont fréquents dans les milieux naturels et artificiels, notamment lors des crues, des ruptures de barrages, ou des manœuvres hydrauliques rapides.

III.2 Equations du mouvement

L'analyse des écoulements non permanents en canal ouvert repose sur les équations de ***Saint-Venant***, un système fondamental composé de deux équations différentielles partielles. La première est l'***équation de continuité***, traduisant la conservation de la masse, et la seconde, l'***équation de quantité de mouvement***, exprimant la conservation de la dynamique des fluides :

a. Equation de continuité

Elle exprime la conservation de la masse :

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dQ}{dx} = q_l \quad (1)$$

Où :

S : surface mouillée (m^2),

Q : débit (m^3/s),

q_l : débit latéral par unité de longueur (m^2/s),

t : temps (s),

x : distance le long du canal (m).

b. Equation de quantité de mouvement (Saint-Venant)

L'équation de quantité de mouvement est définie comme suit :

$$\frac{dQ}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\frac{Q^2}{S} \right) + gS \frac{dh}{dx} = gS(I - J) \quad (2)$$

Où :

h : hauteur d'eau (m),

I : pente du lit du canal,

J : pente de perte de charge (pertes par frottement),

g : accélération de la pesanteur (m/s^2).

Ces équations permettent de modéliser différents types d'écoulements non permanents, que l'on peut classer en deux grandes catégories :

- Les écoulements **non permanents graduellement variés**, associés aux **ondes de crue** (déroulement lent, impact des forces de frottement significatif) ;
- Les écoulements **non permanents rapidement variés**, liés aux **ondes de translation** (déplacement rapide d'un front d'eau, comme dans le cas d'une rupture de barrage).

La **figure III.1** illustre ces deux phénomènes : à gauche, la propagation d'une onde de crue dans le plan (x,t), et à droite, la dynamique d'une onde de translation.

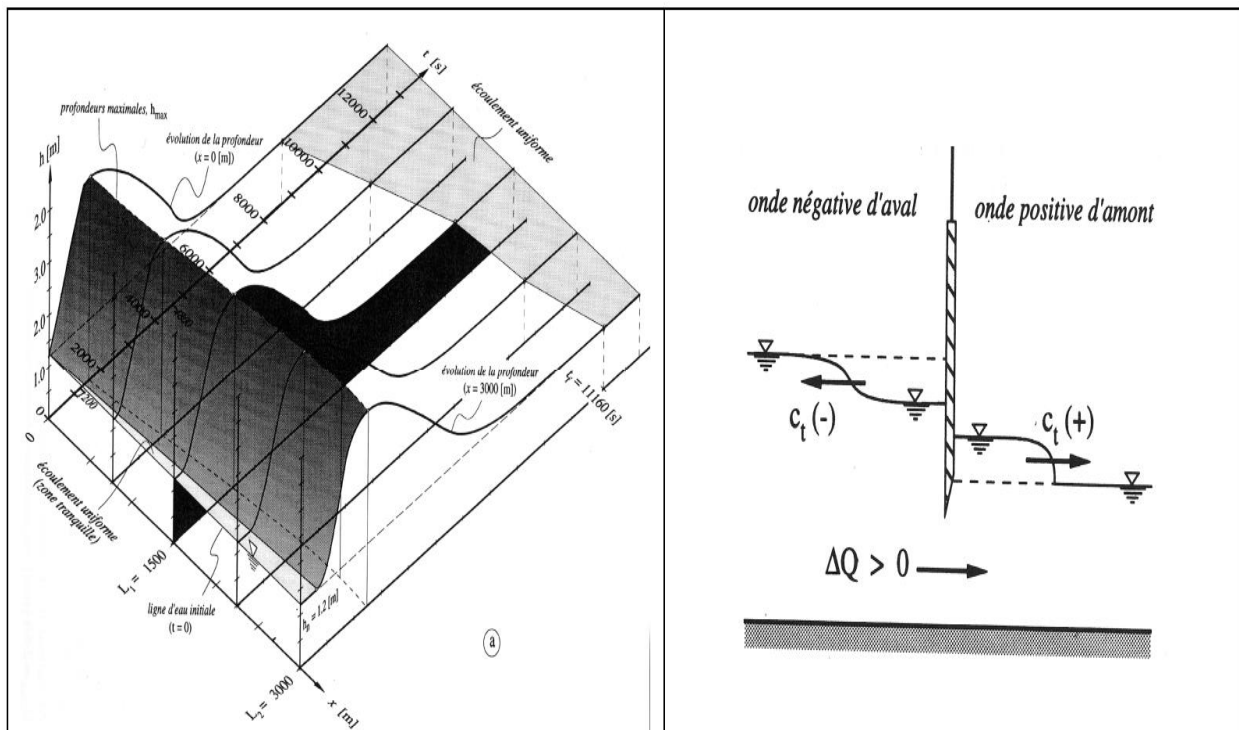


Figure III.1 - A gauche : représentation spatio-temporelle d'une onde de crue ; à droite : comportement d'une onde de translation.

L'un des défis majeurs en hydraulique fluviale concerne l'évaluation du coefficient de rugosité (ou de frottement), surtout dans les rivières à lit mobile où le transport solide influence fortement la dynamique de l'écoulement. Dans le cadre de ce chapitre, on suppose que la rugosité est constante et connue.

Une autre difficulté fondamentale des écoulements non permanents réside dans la **relation non univoque entre le débit (Q) et la profondeur d'eau (h)**. Cette complexité provient des effets combinés de l'énergie et du frottement, induisant des comportements différenciés pendant la montée et la descente de la crue : à débit égal, la profondeur d'eau est généralement plus faible lors de la montée que lors de la décrue. Il en résulte un décalage temporel entre les pics de vitesse, de débit et de hauteur d'eau, comme illustré à la **figure III.2**.

$$Q = VS = CS\sqrt{R_h I} = CS \sqrt{R_h \left(J - \frac{dh}{dx} - \frac{V}{g} \frac{dV}{dx} - \frac{1}{g} \frac{dV}{dt} \right)} \quad (3)$$

Où :

C : coefficient de Chézy,

V : Vitesse d'écoulement (m/s),

R_h : rayon hydraulique (m).

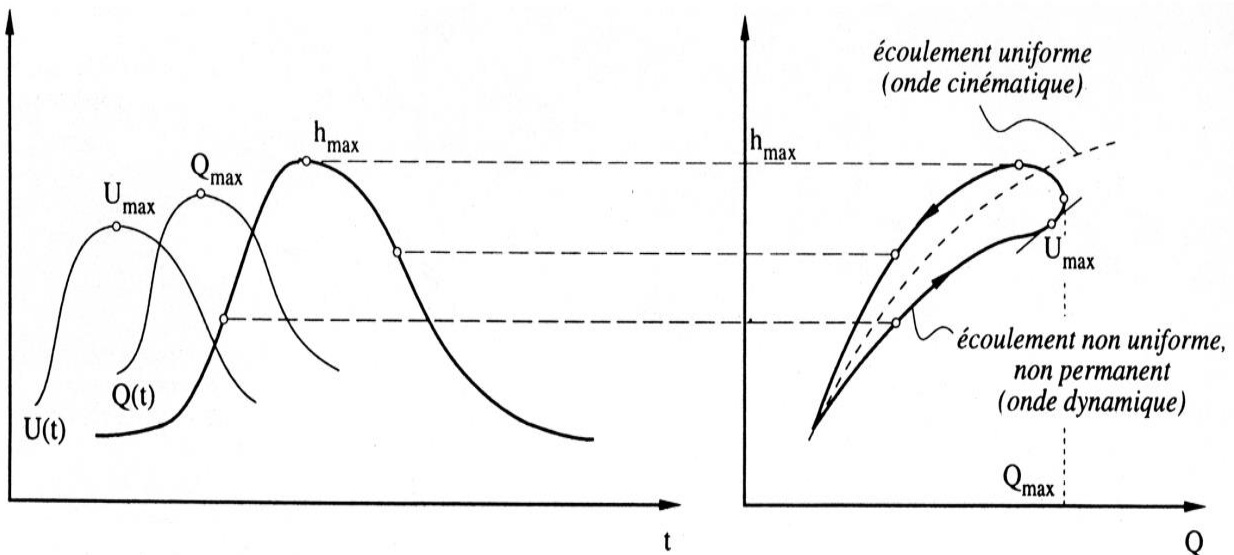


Figure III.2 - Schéma illustrant le décalage temporel entre les courbes $V(t)$, $Q(t)$ et $h(t)$, ainsi que la relation non univoque $Q(h)$.

III.3 Méthodes de résolution

III.3.1 Approches numériques

En raison de la nature complexe et non linéaire des équations de Saint-Venant, leur résolution analytique est rare. On recourt donc à des méthodes numériques, qui consistent à approximer les solutions sur un maillage discret dans le plan espace-temps (x, t) .

Deux approches principales sont utilisées :

- **Méthode des différences finies (maillage rectangulaire)**

Les équations sont discrétisées sur un **maillage régulier** de pas Δx en espace et Δt en temps. Les dérivées partielles y sont remplacées par des différences finies, transformant les équations en un système algébrique résoluble point par point.

- **Méthode des caractéristiques**

Cette méthode consiste à projeter les équations le long de **lignes caractéristiques** dans le plan (x, t) , représentant les directions de propagation de l'information. Le long de ces lignes, les équations se simplifient et deviennent des équations différentielles ordinaires, plus faciles à intégrer numériquement. Cette méthode est particulièrement adaptée aux ondes rapides ou aux discontinuités.

La **figure III.3** illustre les deux méthodes numériques de résolution.

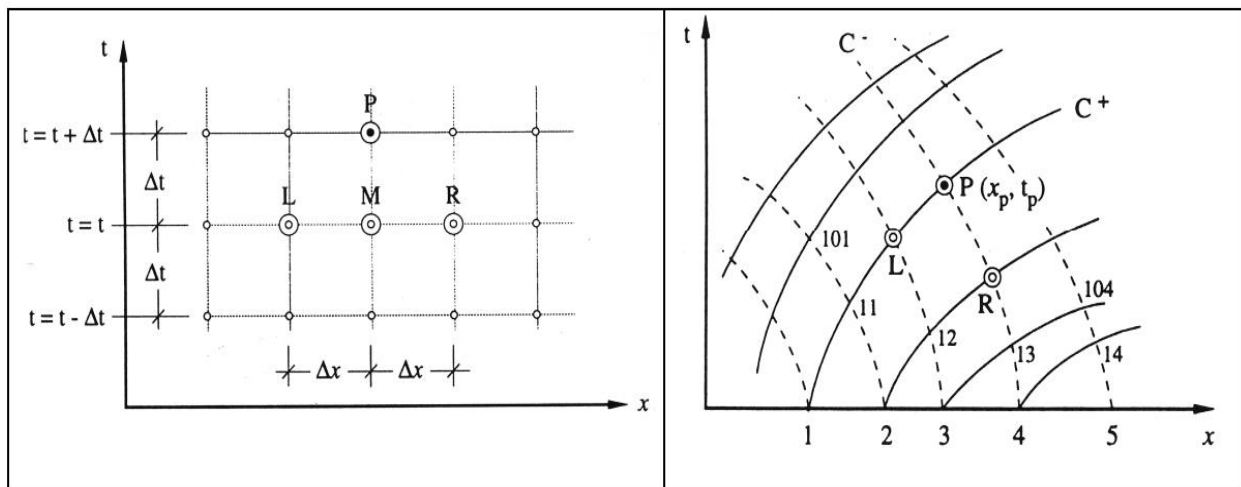


Figure III.3 - A gauche : discrétisation classique (maillage rectangulaire) ; à droite : maillage adapté aux caractéristiques.

III.3.2 Solutions simplifiées

Les méthodes numériques, bien que précises, n'offrent pas toujours une lecture intuitive des phénomènes physiques. Pour pallier cela, des *modèles simplifiés* sont souvent utilisés, issus d'une réduction des équations de Saint-Venant sous certaines hypothèses.

Parmi ces modèles, deux formes simplifiées sont couramment employées :

- **L'onde cinématique** : en négligeant les termes d'inertie et de pression dynamique, on obtient une équation simple reliant directement le débit à la pente du fond. Ce modèle est adapté aux écoulements à forte pente où le frottement domine.
- **L'onde diffusive** : en conservant le terme de pression (mais pas les termes d'accélération), ce modèle permet de représenter des écoulements à pente plus douce où la diffusion joue un rôle important dans la propagation de l'onde.

Ces deux formes permettent d'approcher, avec une complexité réduite, les solutions complètes des équations de Saint-Venant, notamment pour la modélisation des crues ou des écoulements dans les réseaux de canaux naturels ou artificiels.

III.4 Onde cinématique

L'*onde cinématique* constitue une simplification particulière du système des équations de Saint-Venant. Dans ce cas, l'équation de continuité est conservée, tandis que l'équation de quantité de mouvement est considérablement réduite. On fait l'hypothèse que les termes liés à l'inertie (accélération locale et convective) ainsi que la variation de pression sont négligeables devant la pente du fond (I) et les pertes par frottement (J). Ainsi, l'équation dynamique se réduit à :

$$\frac{1}{g} \frac{dV}{dt} + \frac{V}{g} \frac{dV}{dx} + \frac{dh}{dx} = I - J \rightarrow 0 = I - J \quad (4)$$

Cette simplification implique une relation fonctionnelle directe entre le débit Q et la hauteur d'eau h , ce qui permet de transformer le système initial en une équation de type hyperbolique dite *équation de l'onde cinématique* :

$$\frac{dQ}{dt} + C_k \frac{dQ}{dx} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dh}{dt} + C_k \frac{dh}{dx} = 0 \quad (5)$$

Où C_k représente la **célérité** de l'onde, c'est-à-dire la vitesse de propagation de la perturbation. Pour un canal large de section rectangulaire, on peut démontrer que cette célérité est approximativement $C_k = 3/2V$, ce qui montre la dépendance de la célérité à la vitesse d'écoulement.

Cette approche est valable dans le cas de **canaux à pente forte**, à faible nombre de Froude ($Fr < 1$), où le frottement domine sur les effets d'inertie.

La **figure III.4** illustre schématiquement la propagation d'une onde cinématique, comparée à celle d'une onde diffusive.

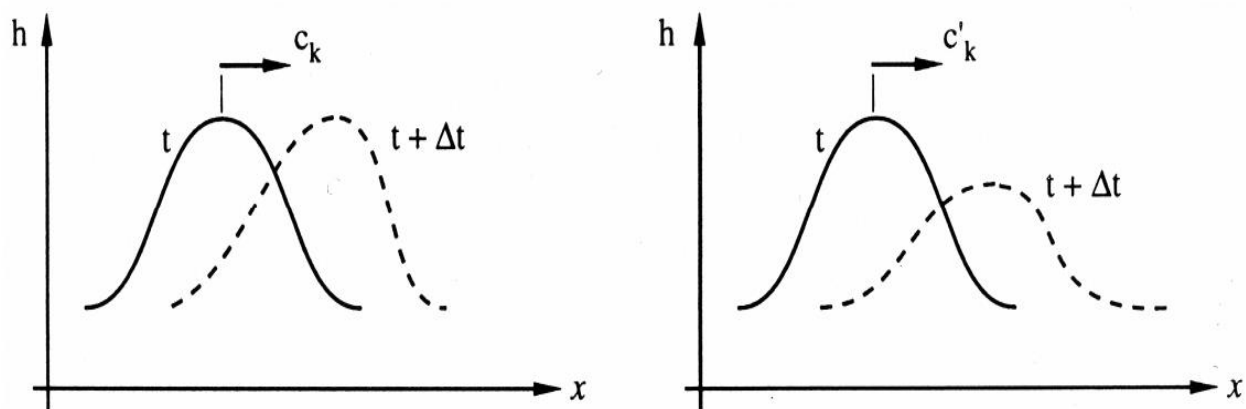


Figure III.4 - Illustration schématique de l'onde cinématique (à gauche) et de l'onde diffusive (à droite).

III.5 Onde diffusive

L'**onde diffusive** représente une autre forme simplifiée des équations de Saint-Venant, dans laquelle seuls les termes d'inertie sont négligés, tout en conservant le terme de pression hydrostatique. L'équation dynamique devient alors :

$$\frac{1}{g} \frac{dV}{dt} + \frac{V}{g} \frac{dV}{dx} + \frac{dh}{dx} = I - J \rightarrow \frac{dh}{dx} = I - J \quad (6)$$

Cette simplification aboutit à une équation d'advection-diffusion, souvent utilisée pour modéliser la propagation des crues dans des rivières à pente modérée :

$$\frac{dQ}{dt} + C'_k \frac{dQ}{dx} - C_D \frac{d^2Q}{dx^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dh}{dt} + C'_k \frac{dh}{dx} - C_D \frac{d^2h}{dx^2} = 0 \quad (7)$$

Où :

C'_k : célérité de l'onde diffusive,

C_D : coefficient de diffusion ou d'atténuation.

Comme dans le cas de l'onde cinématique, l'onde diffusive se propage vers l'aval, mais avec un effet d'amortissement dû au second terme dérivé en espace, qui modélise la dissipation de l'onde au fil du temps et de la distance.

III.6 Onde de translation

Les **ondes de translation** correspondent à des écoulements non permanents rapidement variés, pour lesquels les hypothèses de base des équations de Saint-Venant (notamment la pression hydrostatique) ne sont plus valides. Ces ondes apparaissent lors de modifications brusques du débit ou de la hauteur d'eau, comme lors :

- Ouverture ou fermeture rapide d'une vanne ou écluse,
- Manœuvre d'un ouvrage hydraulique,
- Rupture d'un barrage ou d'une digue,
- Événements extrêmes (glissements de terrain, séismes, crues soudaines, etc.).

Ce type d'onde se caractérise par une forte courbure des lignes de courant et une distribution complexe de la pression.

On distingue généralement quatre types d'ondes de translation selon leur origine (amont ou aval) et leur effet (augmentation ou diminution du débit) :

- Onde d'amont ou d'aval,
- Onde positive (hausse du débit) ou négative (baisse du débit).

L'étude des ondes de translation repose principalement sur deux relations fondamentales adaptées aux canaux rectangulaires :

- **Conservation de la masse**

$$C_t = \frac{dQ}{dS} = \frac{dq}{dh} = \frac{q_2 - q_1}{h_2 - h_1} \quad (8)$$

- **Quantité de mouvement**

$$C_t = V_1 + \sqrt{gh_1} \left(\frac{h_2}{2h_1} \right) \left(1 + \frac{h_2}{h_1} \right) \quad (9)$$

La première relation est identique à celle utilisée pour les ondes cinématique et diffusive. La seconde, plus complexe, met en évidence que la célérité des ondes de translation peut dépasser celle des ondes de gravité classiques, en raison de l'effet d'accumulation d'énergie.

La **figure III.5** présente un exemple typique d'ondes de translation consécutives à un changement brutal de débit.

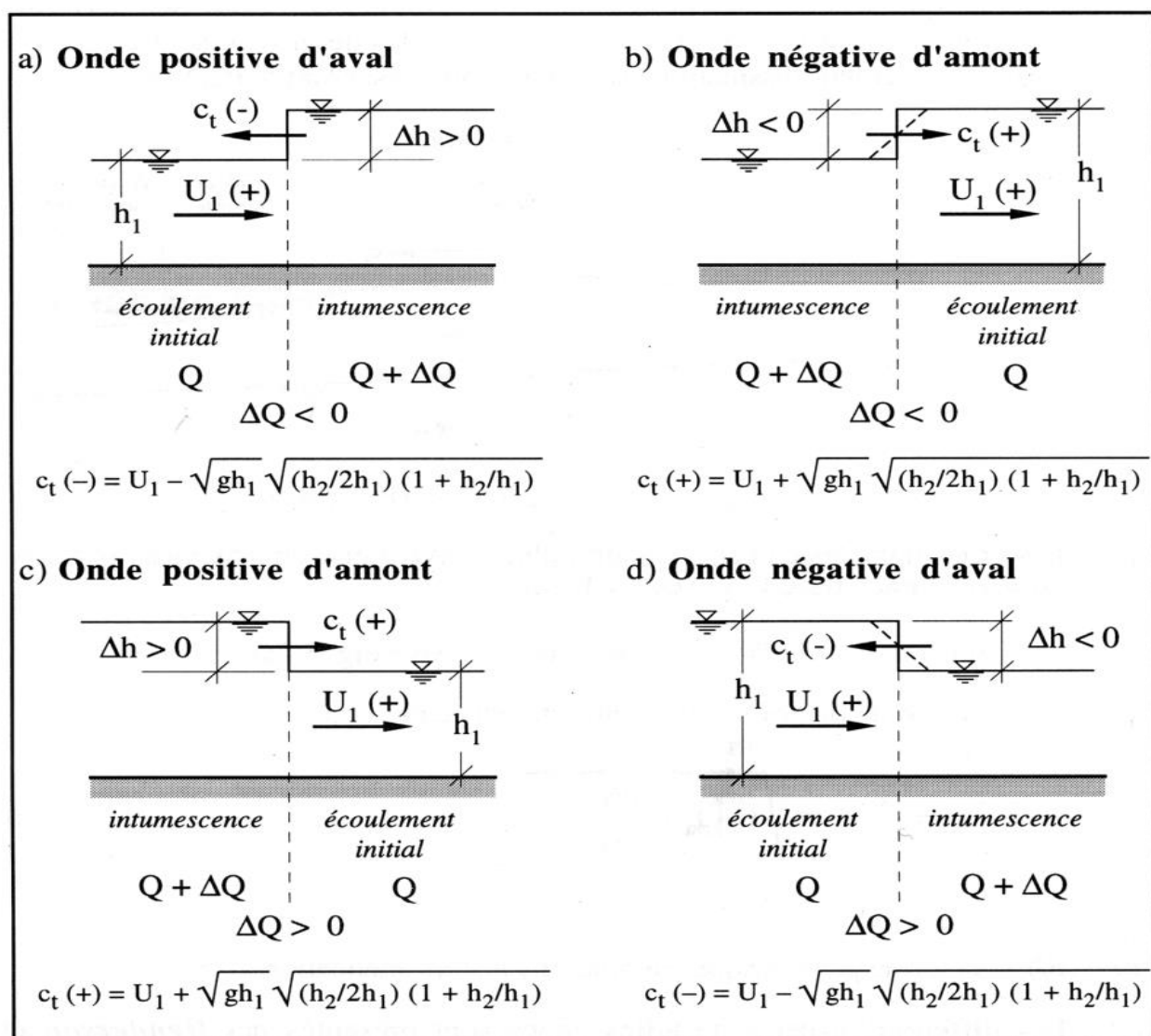


Figure III.5 - Exemples d'ondes de translation dues à une variation brusque du débit.

III.7 Conclusion

Les écoulements non permanents monodimensionnels constituent une composante essentielle de l'hydraulique fluviale et des ouvrages hydrauliques. Leur modélisation repose sur les équations de Saint-Venant, dont les solutions nécessitent des approches numériques adaptées au contexte physique. Selon l'importance des différents termes de l'équation du mouvement, plusieurs types d'ondes peuvent être identifiés et modélisés (cinématique, diffusive, de crue ou de translation), chacune traduisant des comportements hydrauliques spécifiques.

III.8 Exercices

Exercice III.1 : Classification de l'onde selon le type (cinématique ou diffusive)

On considère un canal rectangulaire de 6 m de large, avec une pente de fond de $I = 0,002$, une rugosité de Manning $n = 0,035$, un débit initial de $Q = 20 \text{ m}^3/\text{s}$, et une profondeur initiale $h = 1,2 \text{ m}$.

Déterminez si l'écoulement peut être modélisé par une onde cinématique ou si l'onde diffusive est plus adaptée.

Solution III.1 :

- **Vitesse moyenne :**

$$V = Q/b \cdot h = 20/6 \cdot 1,2 = 2,78 \text{ m/s}$$

- **Nombre de Froude :**

$$Fr = V/(gh)^{0.5} = 2,78/(9,81 \cdot 1,2)^{0.5} \approx 0,81 \Rightarrow \text{Ecoulement subcritique}$$

- **Inclinaison relative (J) avec Manning :**

$$J = \left(\frac{nV}{R_h^{2/3}} \right)^2 \text{ Avec : } R_h = h = 1,2 \text{ m}$$

$$J = 0,0079$$

- **Comparaison avec la pente de fond :**

$$J > I = 0,002$$

L'écoulement n'est pas suffisamment raide pour que l'onde cinématique soit suffisante. Il faut modéliser l'écoulement par *une onde diffusive*.

Exercice III.2 : Application de l'équation de l'onde cinématique

Dans un canal rectangulaire large, on suppose que l'écoulement est modélisé par l'équation d'onde cinématique.

Sachant que $Q(x,0) = 0$ pour tout $x > 0$ et qu'un débit $Q = 5 \text{ m}^3/\text{s}$ est injecté à l'entrée à $t = 0$, trouvez l'expression du débit en tout point du canal à l'instant $t = 20 \text{ min}$, sachant que $C_k = 1,5 \text{ m/s}$.

Solution III.2 :

On a l'équation d'onde cinématique classique :

$$\frac{dQ}{dt} + C_k \frac{dQ}{dx} = 0$$

Solution générale : $Q(x,t) = f(x - C_k t)$

Condition initiale : $Q(x,0) = 0$ pour $x > 0$ et $Q(0,t) = 5 \text{ m}^3/\text{s}$

Donc : $Q(x,t) = 5$ si $x < C_k t$, $Q(x,t) = 0$ si $x > C_k t$

À $t = 20 \text{ min} = 1200 \text{ s}$: $C_k t = 1,5 \cdot 1200 = 1800 \text{ m}$

Conclusion :

$Q(x,1200) = 5 \text{ m}^3/\text{s}$ si $x < 1800 \text{ m}$

$Q(x,1200) = 0$ si $x > 1800 \text{ m}$

Exercice III.3 : Onde de translation due à une vidange rapide

Un réservoir alimente un canal rectangulaire. Une vanne située en aval est brutalement ouverte, provoquant une vidange rapide. Avant l'ouverture, le niveau d'eau était à $h_1 = 1,5 \text{ m}$, et après ouverture, le niveau chute à $h_2 = 0,7 \text{ m}$.

Calculez la **vitesse de propagation de l'onde de translation**.

Solution III.3 :

On utilise la formule simplifiée de la célérité d'une onde de translation :

$$C_t = \sqrt{gh_1} \left(\frac{h_2}{2h_1} \right) \left(1 + \frac{h_2}{h_1} \right)$$

$$C_t = \sqrt{9,81 \cdot 1,5} \cdot \left(\frac{0,7}{3} \right) \left(1 + \frac{0,7}{1,5} \right)$$

$$C_t = 3,84 \cdot 0,233 \cdot (1 + 0,467) = 3,84 \cdot 0,233 \cdot 1,467 = 1,31 \text{ m/s}$$

La vitesse de l'onde de translation est d'environ **1,31 m/s**.

CHAPITRE IV : ECOULEMENTS BIDIMENSIONNELS

IV.1 Introduction

Les écoulements bidimensionnels (2D) se situent à une échelle intermédiaire entre les modèles monodimensionnels, souvent trop simplificateurs, et les modèles tridimensionnels, très gourmands en ressources numériques. Ce type de modélisation permet de mieux représenter les variations spatiales du champ d'écoulement à la surface libre, notamment dans les grandes rivières, les plaines inondables, les deltas ou encore les zones urbaines inondables.

Contrairement aux écoulements monodimensionnels, qui ne considèrent qu'une seule direction principale de l'écoulement (généralement suivant l'axe longitudinal du canal), les *écoulements bidimensionnels* tiennent compte à la fois des composantes *longitudinales* et *transversales* de la *vitesse*. Ce traitement permet une modélisation plus réaliste des phénomènes complexes tels que les recirculations, les effets latéraux, ou les écoulements de contournement autour d'obstacles.

IV.2 Hypothèses de base

Le modèle bidimensionnel repose sur plusieurs hypothèses fondamentales :

- L'écoulement est supposé incompressible et à surface libre.
- La pression est hydrostatique, ce qui implique que les accélérations verticales sont négligeables.
- Le fluide est newtonien et de viscosité constante.
- La rugosité du fond est représentée de façon homogène ou variable suivant les besoins.
- La variation verticale des vitesses est négligée (écoulement moyenné en profondeur).

IV.3 Equations de base : les équations de Saint-Venant 2D

Les équations gouvernant les écoulements bidimensionnels sont les équations de Saint-Venant généralisées aux deux dimensions spatiales (x et y). Ces équations dérivent de la conservation de la masse et de la quantité de mouvement, moyennées sur la profondeur.

IV.3.1 Equation de continuité

L'équation de continuité en écoulement bidimensionnel est donnée par :

$$\frac{dh}{dt} + \frac{d(hu)}{dx} + \frac{d(hv)}{dy} = 0 \quad (1)$$

Où :

$h(x, y, t)$ est la hauteur d'eau,

$u(x, y, t)$ et $v(x, y, t)$ sont les vitesses moyennes respectivement selon les directions x (longitudinale) et y (transversale).

Les conventions du modèle bidimensionnel sont illustrées à la **figure IV.1**.

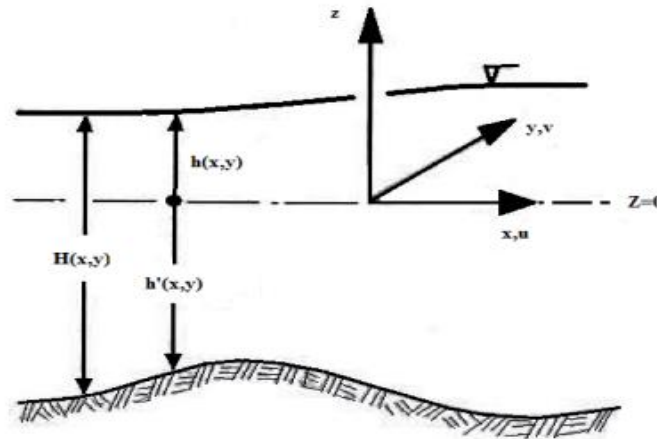


Figure IV.1 - Conventions du modèle bidimensionnel.

IV.3.2 Equation du mouvement

L'équation du mouvement en écoulement bidimensionnel est donnée par les équations ci-dessous :

Dans la direction x :

$$\frac{d(hu)}{dt} + \frac{d(hu^2)}{dx} + \frac{d(huv)}{dy} = -gh \frac{dh}{dx} + S_{fx} \quad (2)$$

Dans la direction y :

$$\frac{d(hv)}{dt} + \frac{d(huv)}{dx} + \frac{d(hv^2)}{dy} = -gh \frac{dh}{dy} + S_{fy} \quad (3)$$

Où :

g : est l'accélération gravitationnelle,

S_{fx} , S_{fy} : sont les termes de pertes de charge par frottement, souvent représentés par une formulation de type Manning :

$$S_{fx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{R_h^{4/3}} \quad S_{fy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{R_h^{4/3}} \quad (4)$$

Soit par la relation de Chézy :

$$S_{fx} = \frac{u \sqrt{u^2 + v^2}}{R_h C^2} \quad S_{fy} = \frac{v \sqrt{u^2 + v^2}}{R_h C^2} \quad (5)$$

La résolution des équations bidimensionnelles nécessite l'imposition de conditions aux limites :

- **Conditions amont et aval** : débit, hauteur d'eau, ou courbe de tarage.
- **Conditions latérales** : berges fixes, perméables ou obstacles.
- **Conditions initiales** : champ initial de hauteur d'eau et de vitesse.

IV.4 Résolution des équations du mouvement

La résolution des équations du mouvement en écoulement bidimensionnel, notamment les équations de *Saint-Venant 2D*, représente un défi majeur du fait de leur nature non linéaire, hyperbolique, et de la complexité géométrique des domaines étudiés. Les solutions analytiques exactes sont très rares, voire inexistantes pour des conditions réelles. C'est pourquoi le recours aux méthodes numériques s'impose comme la solution incontournable pour simuler et analyser ces écoulements.

Plusieurs approches numériques ont été développées pour approximer la solution de ces équations aux dérivées partielles (EDP), parmi lesquelles les méthodes des *volumes finis*, des *différences finies*, et des *éléments finis*. Chacune possède ses propres avantages selon la nature de l'écoulement, la précision souhaitée et la géométrie du domaine.

IV.4.1 Méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis est l'une des plus utilisées en hydraulique numérique, notamment pour les écoulements à surface libre avec discontinuités (ondes de crue, fronts de rupture, etc.). Elle repose sur la conservation stricte des quantités physiques (masse, quantité de mouvement, énergie) à l'échelle de chaque cellule du maillage.

Le domaine est discrétisé en un ensemble de **volumes de contrôle** (ou cellules), qui peuvent être organisés en maillage structuré (quadrillage régulier) ou non structuré (triangles, quadrilatères, etc.). L'intégration des équations se fait sur chaque cellule, et les flux entre les cellules sont évalués à l'aide de schémas numériques adaptés (Godunov, Roe, HLL, etc.).

Le système d'équation qui décrit l'écoulement est :

$$\frac{dU'}{dt} = -\left(\frac{dE'}{d\xi} + \frac{dF'}{d\eta} + T'\right) \quad (6)$$

Avec les termes transformés définis par :

$$\begin{aligned} U' &= UJ^{-1} ; \\ E' &= \frac{1}{J}(U\xi_t + E\xi_x + F\xi_y) ; \\ F' &= \frac{1}{J}(U\eta_t + E\eta_x + F\eta_y) \text{ et } T' = TJ^{-1} \end{aligned} \quad (7)$$

Où :

$J = \xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x$ est le déterminant du Jacobien.

Sur un domaine bidimensionnel discrétisé, les volumes finis de surface $\Delta\xi$ et $\Delta\eta$ ont l'allure de la **figure IV.2**.

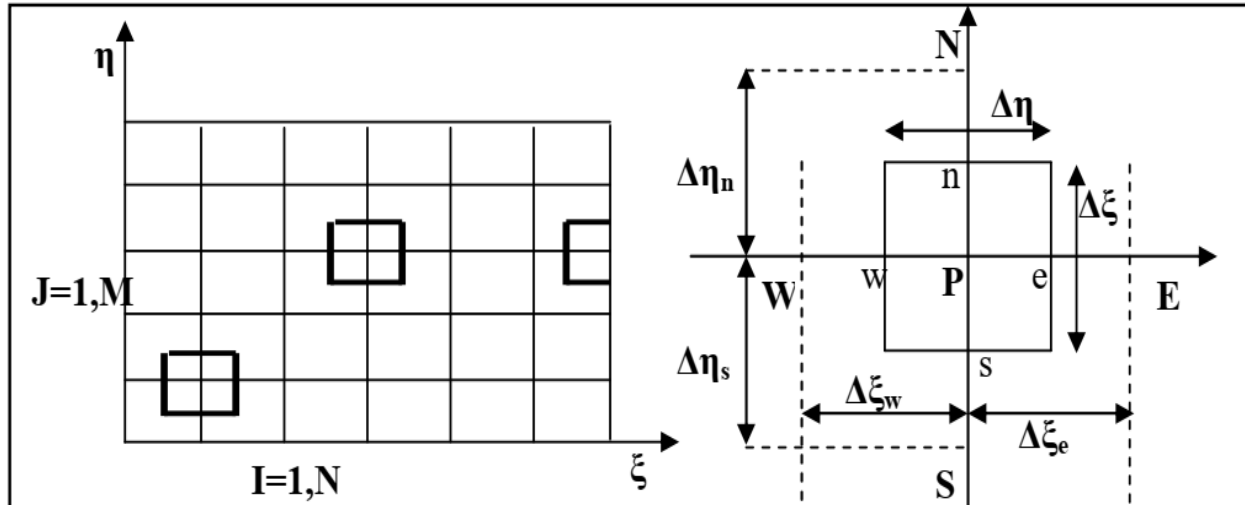


Figure IV.2 - Maillage bidimensionnel illustrant la méthode des volumes finis dans un domaine curviligne.

IV.4.2 Méthode des différences finies

La méthode des différences finies est une technique classique qui repose sur l'approximation des dérivées partielles par des différences entre les valeurs des inconnues aux nœuds du maillage. Elle est simple à mettre en œuvre sur des maillages réguliers et bien adaptée aux écoulements dans des géométries simples.

Deux grandes catégories de schémas sont utilisées :

- **Schémas explicites** : faciles à implémenter, mais nécessitent un petit pas de temps pour satisfaire les conditions de stabilité (condition de Courant-Friedrichs-Lewy - CFL).
- **Schémas implicites** : plus coûteux en calculs (résolution de systèmes d'équations à chaque pas de temps), mais plus stables pour des pas de temps plus grands.

Discretisation du système 2D par un schéma de différences finies explicite

Le schéma de résolution explicite 2D est présenté en **figure IV.3**.

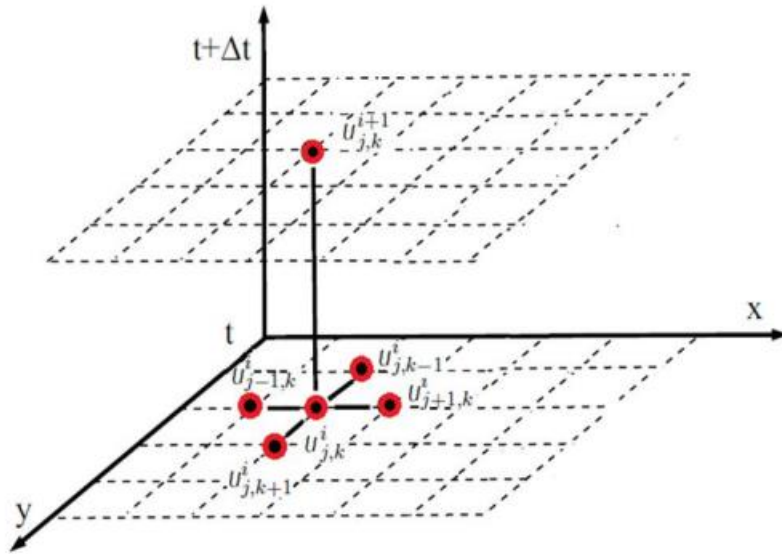


Figure IV.3 - Schéma de résolution explicite 2D sur grille cartésienne.

Où :

i : indice relatif au pas de temps,

j : indice relatif au pas d'espace suivant l'axe Ox ,

k : indice relatif au pas d'espace suivant l'axe Oy .

IV.4.3 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis constitue un outil numérique extrêmement performant, notamment lorsqu'il s'agit de traiter des domaines présentant des géométries complexes ou irrégulières. Contrairement aux méthodes classiques qui exigent des maillages réguliers et des formes simples, la MEF offre une grande souplesse dans la représentation de domaines aux contours naturels, ce qui en fait un choix privilégié dans de nombreux champs d'ingénierie, y compris l'hydraulique fluviale.

Sur le plan mathématique, cette méthode repose sur la reformulation du problème physique à résoudre sous une forme variationnelle, définie dans un espace fonctionnel de dimension infinie. L'idée principale consiste alors à projeter ce problème sur un sous-espace de dimension finie, à l'aide de fonctions de base définies localement sur des éléments discrets du domaine (éléments finis). La solution approchée obtenue est ainsi exprimée comme une combinaison linéaire de ces fonctions de forme, et est déterminée par un nombre fini de coefficients.

Deux grandes catégories de maillages peuvent être utilisées dans ce cadre (**Figure IV.4**) :

- **Les maillages réguliers**, constitués de quadrilatères ordonnés selon une grille cartésienne. Ils sont simples à générer mais peu adaptés aux géométries complexes.
- **Les maillages non structurés**, formés de triangles ou de quadrilatères irréguliers. Ils permettent une meilleure flexibilité et une adaptation précise aux formes naturelles du domaine, comme les méandres des rivières, les berges sinueuses ou la présence d'ouvrages hydrauliques.

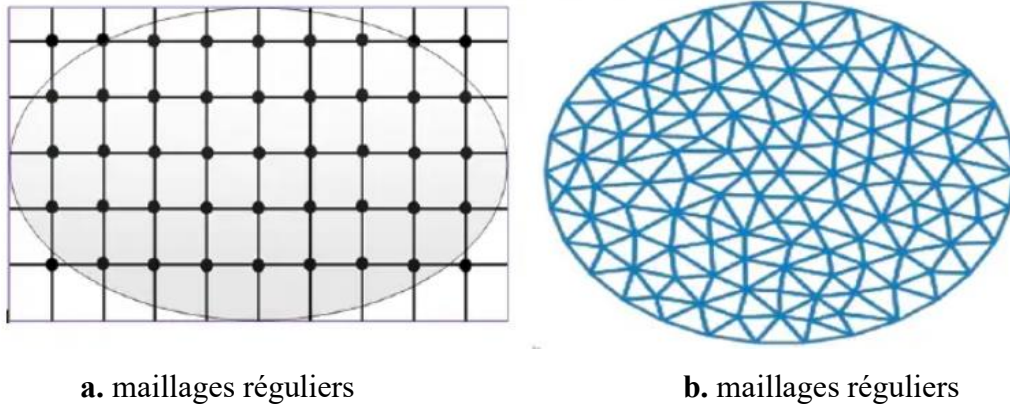


Figure IV.4 – Catégories de maillage dans la méthode des éléments finis.

La **figure IV.5** illustre de manière schématique les principales étapes de mise en œuvre de la méthode des éléments finis, depuis le maillage du domaine jusqu'à l'assemblage du système linéaire à résoudre.

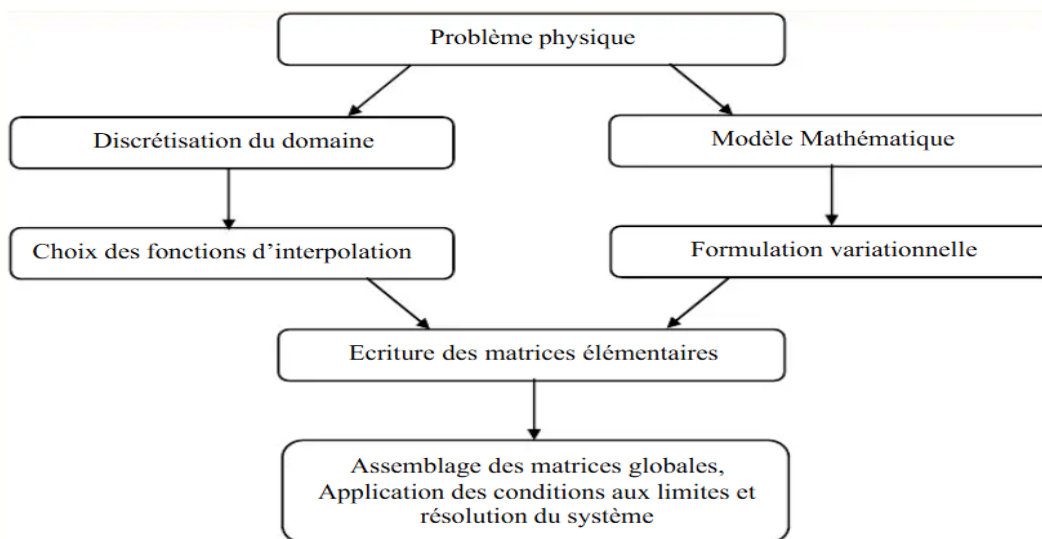


Figure IV.5 – Méthode des éléments finis.

IV.5 Applications typiques

Les écoulements bidimensionnels sont utilisés pour :

- La **modélisation des inondations** dans les zones urbaines ou rurales.
- L'analyse des **zones d'expansion de crue** et de submersion.
- La **gestion des aménagements hydrauliques** (barrages, déversoirs, ponts).
- La simulation des risques liés à la **rupture de digues** ou de barrages.
- L'étude du **transport sédimentaire** en lit majeur.

IV.6 Conclusion

Les écoulements bidimensionnels offrent une représentation détaillée des phénomènes hydrauliques complexes, surpassant les limitations des modèles unidimensionnels. Grâce aux avancées en modélisation numérique et en puissance de calcul, ils sont devenus des outils indispensables pour les ingénieurs et les chercheurs dans la compréhension et la gestion des systèmes hydrauliques.

IV.7 Exercices

Exercice IV.1 : Formulation des équations de Saint-Venant 2D

Écrire les équations de Saint-Venant bidimensionnelles (en coordonnées cartésiennes) pour un écoulement incompressible à surface libre. Identifier les termes physiques représentés.

Solution IV.1 :

Les équations de Saint-Venant 2D sont :

Continuité :

$$\frac{dh}{dt} + \frac{d(hu)}{dx} + \frac{d(hv)}{dy} = 0$$

Quantité de mouvement (x) :

$$\frac{d(hu)}{dt} + \frac{d(hu^2)}{dx} + \frac{d(huv)}{dy} = -gh \frac{dh}{dx} + S_{fx}$$

Quantité de mouvement (y) :

$$\frac{d(hv)}{dt} + \frac{d(huv)}{dx} + \frac{d(hv^2)}{dy} = -gh \frac{dh}{dy} + S_{fy}$$

Avec :

u, v : vitesses dans les directions x et y ,

h : hauteur d'eau,

S_{fx}, S_{fy} : termes de frottement.

Exercice IV.2 : Résolution numérique par volumes finis

On considère l'équation bidimensionnelle de Saint-Venant discrétisée par la méthode des volumes finis sur un maillage structuré.

On a les données suivantes pour une cellule rectangulaire :

- Hauteur d'eau : $h = 1,2$ m,
- Vitesses : $u = 2,5$ m/s, $v = 1,5$ m/s,
- Dimensions de la cellule : $\Delta x = \Delta y = 10$ m,
- Pas de temps : $\Delta t = 2$ s.

Calculez la variation du volume d'eau dans la cellule après un pas de temps en considérant uniquement le flux sortant selon les directions x et y .

Solution IV.2 :

- **Calcul du débit sortant par les faces x et y**

Le débit sortant par chaque direction est donné par :

$$Q_x = h \cdot u \cdot \Delta y ; Q_y = h \cdot v \cdot \Delta x$$

$$Q_x = 1,2 \cdot 2,5 \cdot 10 = 30 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_y = 1,2 \cdot 1,5 \cdot 10 = 18 \text{ m}^3/\text{s}$$

- **Volume total sortant pendant : $\Delta t = 2$ s**

$$V_{\text{sortant}} = (Q_x + Q_y) \cdot \Delta t = (30 + 18) \cdot 2 = 96 \text{ m}^3$$

- **Volume initial dans la cellule**

$$V_{\text{initial}} = h \cdot \Delta x \cdot \Delta y = 1,2 \cdot 10 \cdot 10 = 120 \text{ m}^3$$

- **Volume résiduel après 2 s**

$$V_{\text{final}} = V_{\text{initial}} - V_{\text{sortant}} = 120 - 96 = 24 \text{ m}^3$$

La variation du volume est de -96 m^3 , et le volume d'eau restant dans la cellule est de 24 m^3 après 2 secondes.

Exercice IV.3 : Simulation numérique simple en différences finies (explicite)

On considère une grille régulière pour résoudre l'équation de continuité :

$$\frac{dh}{dt} + u \frac{dh}{dx} + v \frac{dh}{dy} = 0$$

En utilisant un schéma explicite du type :

$$h_{i,j}^{n+1} = h_{i,j}^n - \Delta t \left(u \frac{h_{i+1,j}^n - h_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + v \frac{h_{i,j+1}^n - h_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right)$$

Calculer $h_{2,2}^{n+1}$ avec :

$$u = 1, v = 0,5, \Delta x = \Delta y = 1, \Delta t = 0,1$$

$$h_{1,2}^n = 1,0, h_{3,2}^n = 1,2, h_{2,1}^n = 0,9, h_{2,3}^n = 1,1 \text{ et } h_{2,2}^n = 1,05$$

Solution IV.3 :

$$\begin{aligned} h_{2,2}^{n+1} &= 1,05 - 0,1 \left(1 \frac{1,2 - 1,0}{2} + 0,5 \frac{1,1 - 0,9}{2} \right) = 1,05 - 0,1(0,1 + 0,05) = 1,05 - 0,015 \\ &= 1,035 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } h_{2,2}^{n+1} = 1,035$$

Exercice IV.4 : Application des équations de Saint-Venant 2D – Conservation de la masse

On considère un écoulement sur une surface plane dans une cellule carrée $\Delta x = \Delta y = 5\text{m}$. La hauteur d'eau et les vitesses aux temps t sont les suivantes :

Point	h (m)	u (m/s)	v (m/s)
Centre (i,j)	1,0	2,0	0,5
(i+1,j)	1,1	2,2	0,5
(i-1,j)	0,9	1,8	0,5
(i,j+1)	1,05	2,0	0,6
(i,j-1)	0,95	2,0	0,4

Calculez l'évolution de la hauteur d'eau après un pas de temps $\Delta t = 1\text{s}$ en utilisant l'équation de continuité discrétisée :

$$h_{i,j}^{n+1} = h_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [(hu)_{i+1,j} - (hu)_{i-1,j} + (hv)_{i,j+1} - (hv)_{i,j-1}]$$

Solution IV.4 :

$$(hu)_{i+1,j} = 1,1 \cdot 2,2 = 2,42$$

$$(hu)_{i-1,j} = 0,9 \cdot 1,8 = 1,62$$

$$(hv)_{i,j+1} = 1,05 \cdot 0,6 = 0,63$$

$$(hv)_{i,j-1} = 0,95 \cdot 0,4 = 0,38$$

$$\begin{aligned} h_{i,j}^{n+1} &= 1,0 - \frac{1}{2,5} [(2,42 - 1,62) + (0,63 - 0,38)] = 1,0 - 0,1(0,8 + 0,25) = 1,0 - 0,105 \\ &= 0,895 \text{ m} \end{aligned}$$

Références bibliographiques

- Abbott, M.B., Basco, D.R. (1989).** *Computational Fluid Dynamics: An Introduction for Engineers*. Longman Scientific & Technical, Harlow, 434 p.
- Berreksi, A. (2012).** *Modélisation et simulation numérique des écoulements non permanents dans des canaux à ciel ouvert*. PhD thesis, École Nationale Polytechnique, Algiers, Algeria.
- Chanson, H. (2004).** *The Hydraulics of Open Channel Flow: An Introduction*, 2nd edn. Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, 630 p.
- Chow, V.T. (1959).** *Open-Channel Hydraulics*. McGraw-Hill, New York.
- Cunge, J.A., Eremieev, V., Holly Jr., F.M., Liggett, J.A. (1989).** *Two-Dimensional River Models and Their Application*. Springer-Verlag, Berlin.
- Cunge, J.A., Holly, F.M., Verwey, A. (1980).** *Practical Aspects of Computational River Hydraulics*. Pitman Advanced Publishing Program, London.
- Ferziger, J.H., Perić, M. (2002).** *Computational Methods for Fluid Dynamics*, 3rd edn. Springer, Berlin.
- Fread, D.L. (1993).** Flow routing. In: Maidment, D.R. (ed.) *Handbook of Hydrology*, McGraw-Hill, New York, pp. 10.1–10.36.
- Graf, W.H., Altinakar, M.S. (1993).** *Hydraulique fluviale. Tome 1 : Écoulement permanent uniforme et non uniforme*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne.
- Hager, W.H. (2010).** *Hydraulicians in Europe 1800–2000: A Biographical Dictionary of Leaders in Hydraulic Engineering and Fluid Mechanics*. CRC Press, Leiden.
- Hug, M. (1975).** *Mécanique des fluides appliquée*. Éditions Eyrolles, Paris.
- LeVeque, R.J. (2002).** *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Liggett, J.A. (1994).** *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill, New York.
- Lyn, D.A. (2010).** *Open-Channel Flow: Numerical Methods and Hydraulic Modeling*. Springer, Berlin.
- Sinneger, R.O., Hager, W.H. (1989).** *Constructions hydrauliques*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne.
- Sturm, T.W. (2001).** *Open Channel Hydraulics*. McGraw-Hill Series in Water Resources and Environmental Engineering, International Edition.
- Vreugdenhil, C.B. (1994).** *Numerical Methods for Shallow-Water Flow*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.