Université de A/MIRA de Béjaia
Faculté de Thechnologie
Département de Technologie $1^{\text{ème}}$ année

Année universitaire : 2025/2026
Algèbre1 Octobre 2025

Séris de TD N°01 : Ensembles et Relations

Exercice 1

Soient $A =]-\infty, 4]$, $B = [-5, +\infty[$ et $E = [-4, 1[$ trois sous-ensembles de $\mathbb{R}$.
Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, $B - A$, $A - E$, $A \triangle B$ et C_B^E.

Exercice 2

Soient E un ensemble non vide et A, B et C trois parties de E.
a) Montrer que :

1. $C_E^{(A\cap B)} = C_E^A \cup C_E^B$.
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
3. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

b) Simplifier : $(\overline{A \cap B}) \cup (\overline{C \cap \bar{A}})$.

Exercice 3

I. Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $\mathcal{R}$ la relation binaire sur E dont le graphe est
$\Gamma = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4), (4,3), (4,4)\}$

1. Vérifier que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Faire la liste des classes d'équivalences distinctes et donner l'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$

II. Soit $\mathcal{S}$ la relation binaire définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\mathcal{S}y \iff x^3 - y^3 = x - y$$

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la classe d'équivalence de x, notée $\bar{x}$, selon les valeurs de x. En déduire l'ensemble quotient $\mathbb{R}/\mathcal{S}$.

III. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\mathcal{T}$ par :

$$(x, y)\mathcal{T}(x', y') \iff x + y = x' + y'$$

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une relation d'équivalence.
2. Trouver la classe d'équivalence du couple $(0, 0)$.

Exercice 4

I. Les relations $\mathcal{R}$ définies ci-dessous sont-elles des relations d'ordre sur $\mathbb{R}$.

1. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{N}$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$.

II. Soit $\mathcal{S}$ la relation définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $x\mathcal{S}y, x$ divise y

1. Monter que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.
2. Cet ordre est-il total ?