

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Abderrahmane Mira – Bejaia

Faculté de Technologie

Département Génie civil

Polycopié de Cours Mécanique rationnelle

2^{ème} Année Licence Génie Civil

Etabli par : Dr. Nasserline OUDNI

Maitre de conférences, Université de Bejaia.

Sommaire

Introduction générale	1
1. Chapitre 1 : Rappels mathématiques du calcul vectoriel	
1.1. Un scalaire.....	2
1.2. Un vecteur.....	3
1.2.1. Types de vecteurs.....	3
1.2.2. Opérations algébriques sur les vecteurs.....	3
1.2.2.1. Module d'un vecteur.....	3
1.2.2.2. Vecteur unitaire.....	3
1.2.2.3. Egalité entre deux vecteurs.....	4
1.2.2.4. Somme de deux vecteurs.....	4
1.2.2.5. Soustraction de deux vecteurs.....	4
1.2.3. Propriétés des vecteurs.....	5
1.3. Produit scalaire.....	5
1.3.1. Propriétés du produit scalaire.....	5
1.4. Produit vectoriel.....	6
1.5. Produit mixte.....	7
1.6. Double produit vectoriel.....	8
1.7. Projection d'un vecteur.....	8
1.7.1. Projection d'un vecteur sur un axe.....	8
1.7.2. Projection d'un vecteur sur un plan.....	8
1.7.3. Projection d'un vecteur dans un plan oblique.....	8
1.8. Moment d'un vecteur.....	9
1.8.1. Moment d'un vecteur par rapport à un point.....	9
1.8.2. Moment d'un vecteur par rapport à un axe.....	10
1.9. Les torseurs.....	10
1.10. Formule de transport.....	10
1.11. Applications.....	11
2. Chapitre 2 : statique des solides	
2.1. Introduction.....	15
2.2. Système de forces dans l'espace.....	15
2.2.1. Système de forces concourantes.....	16
2.2.2. Système de forces parallèles.....	16
2.2.3. Système de forces coplanaires.....	16
2.2.4. Système de forces non parallèles et non concourantes.....	17
2.2.5. Système de forces en couple.....	17
2.2.6. Système de forces générales dans l'espace.....	17
2.3. Composantes d'une force.....	17
2.3.1. Décomposition d'une force.....	18
2.3.2. Norme du vecteur force.....	18
2.3.3. Direction du vecteur force.....	18
2.4. Axiomes de la statique.....	19

2.5.	Equilibre d'un solide.....	21
2.5.1.	Equilibre d'un solide dans un plan.....	21
2.5.2.	Réactions aux appuis et aux liaisons.....	21
2.5.2.1.	Appui simple d'un solide sur une surface lisse.....	21
2.5.2.2.	Articulation d'un solide.....	22
2.6.	Types de forces.....	24
2.6.1.	Force ponctuelle.....	24
2.6.2.	Force linéique.....	24
2.6.3.	Force surfacique.....	24
2.6.4.	Force volumique.....	24
2.7.	Applications.....	25
3.	Chapitre 3 : cinématique du solide	
3.1.	Introduction.....	32
3.2.	Les quantités cinématiques du point matériel.....	33
3.3.	Cinématique du corps solide.....	34
3.3.1.	Champ des vitesses.....	34
3.3.2.	Equiprojectivité du champ des vitesses.....	37
3.3.3.	Torseur cinématique.....	37
3.3.4.	Champ des accélérations.....	38
3.3.5.	Dérivation vectorielle.....	39
3.4.	Loi de composition des vitesses.....	39
3.5.	Loi de composition des accélérations.....	40
3.6.	Mouvement de translation.....	41
3.7.	Mouvement de rotation autour d'un axe (Δ) fixe.....	42
3.8.	Mouvement plan sur plan.....	43
3.9.	Mouvement composé.....	44
3.10.	Applications.....	45
4.	Chapitre 4 : dynamique du solide rigide	
4.1.	Introduction.....	50
4.2.	Rappels sur les quantités dynamiques pour un point matériel.....	50
4.3.	Moment cinétique (Moment de la quantité de mouvement).....	52
4.4.	Quantité de mouvement d'un système matériel (S).....	52
4.5.	Torseur cinématique.....	53
4.5.1.	Expression de la résultante cinétique d'un système matériel.....	53
4.6.	Energie cinétique.....	54
4.6.1.	Définition.....	54
4.6.2.	Théorème de Koënig relatif à l'énergie cinétique.....	54
4.7.	Solide indéformable en mouvement quelconque.....	55
4.8.	Théorèmes fondamentaux de la dynamique.....	57
4.8.1.	Objectifs de la dynamique.....	57
4.8.2.	Notions de référentiel.....	57
4.8.3.	Expression de la loi fondamentale de la dynamique.....	57

4.8.4. Théorème du moment dynamique.....	59
4.9. Théorème de l'énergie cinétique.....	59
4.9.1. Travail et puissance d'une force.....	59
4.10. Applications.....	60
5. Chapitre 5 : géométrie des masses	
5.1. Introduction.....	63
5.2. Masse d'un système discret.....	63
5.3. Masse d'un système continu.....	63
5.4. Formule intégrale du centre de masse.....	64
5.4.1. Centre de masse d'un système discret.....	64
5.4.2. Centre de masse d'un système continu.....	65
5.4.3. Formulation discrète du centre de masse (centre d'inertie).....	66
5.5. Théorème de GULDIN.....	66
5.5.1. Premier théorème de GULDIN.....	67
5.5.2. Deuxième théorème de GULDIN.....	67
5.6. Moment d'inertie.....	68
5.6.1. Solide plan.....	70
5.7. Théorème de HUYGENS.....	70
5.8. Applications.....	71

Table des figures

Figure 1.1 Représentation d'un vecteur dans un plan.....	1
Figure 1.2 Représentation d'un vecteur dans l'espace.....	2
Figure 1.3 Vecteur unitaire.....	3
Figure 1.4 Composantes d'un vecteur unitaire.....	4
Figure 1.5 Somme de deux vecteurs.....	4
Figure 1.6 Produit scalaire de deux vecteurs.....	5
Figure 1.7 Produit vectoriel de deux vecteurs.....	6
Figure 1.8 Norme du produit vectoriel.....	6
Figure 1.9 Convention de signe dans une base orthonormée.....	7
Figure 1.10 Norme du produit mixte.....	7
Figure 1.11 Projection d'un vecteur sur un axe.....	8
Figure 1.12 Projection d'un vecteur sur un plan.....	8
Figure 1.13 Projection dans un repère oblique.....	8
Figure 1.14 Règle du triangle (Sinus).....	9
Figure 1.15 Moment vectoriel d'un vecteur/un point.....	9
Figure 1.16 Moment d'un vecteur par le bras de levier.....	9
Figure 2.1 Forces concourantes.....	16
Figure 2.2 Système de forces parallèles.....	17
Figure 2.3 Système de forces non concourantes et non parallèles.....	18
Figure 2.4 Composantes d'une force dans l'espace.....	18
Figure 2.5 Directions d'une force.....	19
Figure 2.6 Vecteur force passant par deux points.....	19
Figure 2.7 Equilibre d'un solide sous deux forces opposées	19
Figure 2.8 Principe de glissement.....	20
Figure 2.9. Résultante de deux forces (Principe du parallélogramme.....	20
Figure 2.10 Action-réaction entre deux solides.....	20
Figure 2.11 Equilibre d'un solide dans le plan.....	21
Figure 2.12 Appui simple sur une surface lisse.....	21
Figure 2.13 Appui double ou articulation cylindrique.....	22
Figure 2.14 Appui triple ou Articulation sphérique.....	22
Figure 2.15 Encastrement.....	23
Figure 2.16 Force ponctuelle.....	24
Figure 2.17 Charge répartie.....	24
Figure 2.18 Charge surfacique.....	24
Figure 2.19 Charge volumique.....	24
Figure 3.1 Référentiel d'un point matériel.....	34
Figure 3.2 Champ des vitesses d'un solide en mouvement.....	34
Figure 3.3 Composition de mouvements.....	35
Figure 3.4 Equiprojectivité du champ de vitesses.....	37
Figure 3.5 Rotation autour d'un axe.....	39
Figure 3.6 Composition des vitesses.....	39
Figure 3.7 Mouvement de translation.....	41

Figure 3.8 Mouvement de rotation.....	42
Figure 3.9 Mouvement plan sur plan.....	43
Figure 4.1 Résultante cinétique d'un système matériel.....	54
Figure 4.2 Actions intérieures et extérieures sur un système matériel.....	58
Figure 5.1 Système discret et système continu.....	63
Figure 5.2 Centre d'inertie d'une courbe plane	67
Figure 5.3 Centre d'inertie d'une surface plane	67
Figure 5.4 Moment d'inertie par rapport à un axe.....	68
Figure 5.5 Moments d'inertie par rapport aux axes et aux plans.....	69
Figure 5.6 Moment d'inertie d'un solide plan	70
Figure 5.7 Théorème de HUYGENS par rapport à un axe.....	70
Figure 5.8 Théorème de HUYGENS général	71

Avant-propos

Ce polycopié de cours est destiné aux étudiants de deuxième année du semestre 3 des sciences techniques du système LMD et aux étudiants de deuxième année du parcours ingénieur. Il respecte le contenu du descriptif de la mécanique Rationnelle pour la filière Génie civil. Ce polycopié contient des chapitres de cours et des exercices résolus à la fin de chaque chapitre. Les solutions sont souvent détaillées et permettent à l'étudiant de compléter sa compréhension du cours et faire soit même son évaluation. L'étudiant sera en mesure de saisir et comprendre un problème (statique, cinématique et dynamique) de mécanique du solide, il possèdera les outils lui permettant de résoudre un problème dans le cadre de la mécanique classique. Ce cours est un pré requis pour la RDM et la mécanique analytique. La mécanique rationnelle, en tant que discipline fondamentale de la physique appliquée, repose sur un ensemble de concepts et de méthodes indispensables pour comprendre le mouvement des corps dans l'espace. Ce domaine combine des outils mathématiques tels que le calcul vectoriel avec des principes physiques pour analyser les solides en équilibre, décrire la cinématique des corps solides, étudier la géométrie des masses et prédire le comportement dynamique des systèmes.

Introduction générale

La mécanique rationnelle, en tant que discipline fondamentale de la physique appliquée, repose sur un ensemble de concepts et de méthodes indispensables pour comprendre le mouvement des corps dans l'espace. Ce domaine combine des outils mathématiques tels que le calcul vectoriel avec des principes physiques pour analyser les solides en équilibre, décrire la cinématique des corps solides, étudier la géométrie des masses et prédire le comportement dynamique des systèmes.

Dans ce contexte, le calcul vectoriel constitue le langage de base de la mécanique rationnelle, permettant de décrire de manière précise les quantités physiques telles que la force, la vitesse et l'accélération. Il fournit également un cadre mathématique pour résoudre les problèmes de statique et de dynamique en trois dimensions.

Le premier volet de notre exploration se concentrera donc sur le calcul vectoriel, où nous examinerons les opérations de base, telles que l'addition et la multiplication vectorielle, ainsi que des concepts avancés tels que le produit scalaire et le produit vectoriel, qui seront ensuite appliqués à la résolution de problèmes en statique et en dynamique.

Dans la deuxième partie, nous aborderons la statique des solides, explorant les conditions d'équilibre des corps rigides soumis à des forces externes. Nous étudierons les principes fondamentaux de la résolution de systèmes de forces, ainsi que les concepts de moments et de couples, essentiels pour l'analyse des structures et des mécanismes.

Ensuite, nous plongerons dans la cinématique du corps solide, où nous examinerons les mouvements de rotation et de translation, ainsi que les trajectoires et les vitesses relatives des points à l'intérieur d'un solide. Ce volet nous permettra de comprendre les mouvements complexes des objets dans l'espace et leur évolution au fil du temps.

Dans la quatrième partie, nous aborderons la géométrie des masses, qui nous permettra de déterminer les propriétés géométriques des objets tels que le centre de masse et les moments d'inertie. Ces concepts sont essentiels pour prédire le comportement dynamique des systèmes en mouvement.

Enfin, dans le dernier volet de notre exploration, nous nous pencherons sur la dynamique, où nous appliquerons les lois de Newton pour étudier le mouvement des corps sous l'influence des forces. Nous aborderons les concepts de forces de frottement, de traction et de mouvement de rotation, en mettant l'accent sur la résolution de problèmes pratiques en mécanique rationnelle.

1. Un scalaire

Un scalaire est une quantité qui est définie par une seule valeur numérique, sans direction ni sens. Exemples de scalaires:

- La température: 20°C
- La masse: 10 kg
- Le temps: 5 secondes
- La vitesse d'un objet en mouvement: 10 m/s (scalaire car ne précise pas la direction).

2. Un vecteur

En mathématiques et en physique, un vecteur est une quantité qui possède à la fois une origine, une magnitude (ou une longueur), une direction dans l'espace et un sens. Les vecteurs sont souvent représentés graphiquement par des flèches, où la longueur de la flèche représente la magnitude du vecteur et la direction de la flèche indique la direction du vecteur.

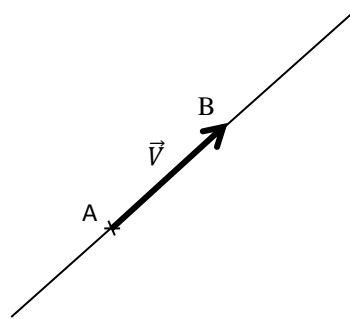


Figure 1.1 Représentation d'un vecteur dans un plan

Le vecteur s'exprime dans la base orthonormée $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sous la forme :

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

V_x, V_y et V_z sont les composantes du vecteur \vec{V}

$(V_x, V_y, V_z) \in R$ (des réelles).

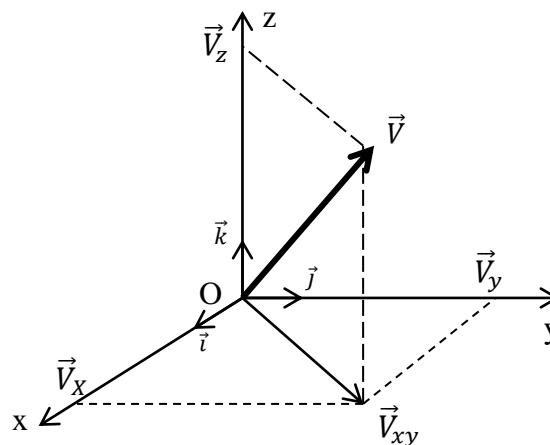


Figure 1.2 Représentation d'un vecteur dans l'espace

2.1. Types des vecteurs:

Les vecteurs peuvent être classés en plusieurs types en fonction de différentes caractéristiques. Voici quelques types de vecteurs courants :

- **Vecteurs géométriques** : Ce sont des vecteurs utilisés pour décrire des grandeurs physiques dans l'espace, comme la position, le déplacement, la vitesse, etc. Ils sont souvent représentés graphiquement par des flèches dans un système de coordonnées.
- **Vecteurs unitaires** : Ce sont des vecteurs ayant une magnitude de 1 et qui servent souvent de base pour décrire la direction dans un espace donné. Les vecteurs unitaires sont souvent utilisés pour définir des systèmes de coordonnées et des bases orthogonales.
- **Vecteurs colinéaires** : Deux vecteurs sont colinéaires s'ils sont alignés sur la même droite ou s'ils sont parallèles. Cela signifie que l'un peut être obtenu en multipliant l'autre par un scalaire. Les vecteurs colinéaires ont la même direction ou des directions opposées.
- **Vecteurs opposés** : Deux vecteurs sont opposés s'ils ont la même norme mais des directions opposées. Lorsqu'ils sont ajoutés, ils se neutralisent mutuellement.
- **Vecteurs orthogonaux** : Deux vecteurs sont orthogonaux s'ils sont perpendiculaires l'un à l'autre. Le produit scalaire de vecteurs orthogonaux est nul.
- **Vecteurs libres** : Ce sont des vecteurs qui peuvent être déplacés dans l'espace sans changer leur effet. Ils sont définis uniquement par leur magnitude et leur direction.
- **Vecteurs liés** : Ce sont des vecteurs qui ont un point d'application spécifique dans l'espace et sont définis par leur origine et leur extrémité.

2.2. Operations algébriques sur les vecteurs

2.2.1. Module d'un vecteur

Soit un vecteur $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$ défini dans un repère cartésien orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Son module est un scalaire égal à : $||\vec{V}|| = V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$

2.2.2. Vecteur unitaire

On peut exprimer le vecteur \vec{V} : $\vec{V} = V \cdot \vec{u}$ d'où

$$\vec{u} = \frac{\vec{V}}{V} \Rightarrow |\vec{u}| = 1$$

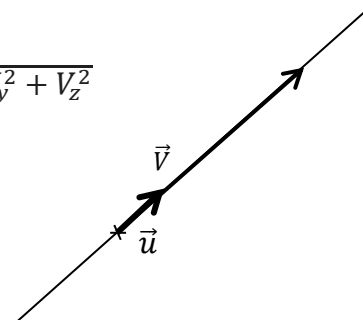


Figure 1.3 Vecteur unitaire

On peut écrire aussi :

$$\vec{u} = \frac{V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}} = \frac{V_x}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}} + \frac{V_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}} + \frac{V_z}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}$$

$$\vec{u} = \frac{1}{V} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = \cos\theta_x \vec{i} + \cos\theta_y \vec{j} + \cos\theta_z \vec{k}$$

$$\vec{u} = \frac{1}{V} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_x \\ \cos\theta_y \\ \cos\theta_z \end{pmatrix}$$

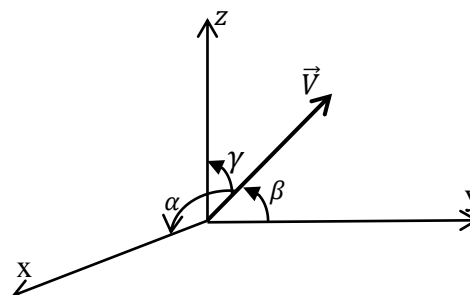


Figure 1.4 Composantes d'un vecteur unitaire

2.2.3. Egalité entre deux vecteurs

Soient deux vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 dans une base orthonormée $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, tel que :

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

- $\vec{V}_1 = \vec{V}_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2.$
- $\vec{V}_1 = -\vec{V}_2 \Leftrightarrow x_1 = -x_2, y_1 = -y_2, z_1 = -z_2.$

2.2.4. Somme des vecteurs

Soient deux vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 dans une base orthonormée $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, tel que :

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \text{ la somme des vecteurs est :}$$

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

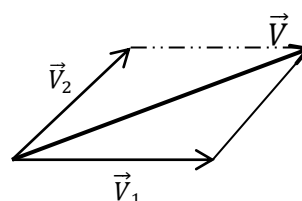


Figure 1.5 Somme de deux vecteurs

2.2.5. Soustraction de deux vecteurs

Soient deux vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 dans une base orthonormée $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, tel que :

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \text{ la différence des vecteurs est :}$$

$$\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix}$$

2.2.6. Propriétés des vecteurs

- $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$; $\vec{V} + \vec{0} = \vec{V}$; $\vec{V} + (-\vec{V}) = \vec{0}$
- $\vec{V}_1 + (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) + \vec{V}_3$
- $a(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = a\vec{V}_1 + a\vec{V}_2$; $a \in \mathbb{R}$
- $(a + b)\vec{V}_1 = a\vec{V}_1 + b\vec{V}_1$; $a, b \in \mathbb{R}$
- $a\vec{V} = \vec{W}$; $a \in \mathbb{R}$

$$\vec{W} = a(x\vec{i}, y\vec{j}, z\vec{k}) = \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

\vec{W} a la même direction que \vec{V} si $\begin{cases} a > 0, \text{meme sens} \\ a < 0, \text{sens opposé} \end{cases}$

$$|\vec{W}| = |a\vec{V}| = |a||\vec{V}|$$

3. Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 tel que :

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Est une opération qui donne un scalaire :

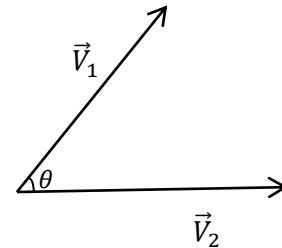


Figure 1.6 Produit scalaire de deux vecteurs

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\| \|\vec{V}_2\| \cos \theta$$

$$\theta = (\vec{V}_1, \vec{V}_2) \text{ tel que } 0 \leq \theta \leq \pi$$

Analytiquement on écrit :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Le produit scalaire est un scalaire.

3.1. Propriétés du produit scalaire

- Commutativité : $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1$
- Distributivité : $\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3$
- Multiplication par un réel : $a(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) = (a\vec{V}_1) \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_1 \cdot (a\vec{V}_2)$; $a \in \mathbb{R}$
- Vecteurs orthogonaux : $\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2 \Leftrightarrow \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0$

- Vecteurs parallèles : $\vec{V}_1 \parallel \vec{V}_2 \Leftrightarrow \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \pm \|\vec{V}_1\| \|\vec{V}_2\|$
- Dérivée d'un produit scalaire : $\frac{d(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)}{dt} = \vec{V}_1 \frac{d(\vec{V}_2)}{dt} + \vec{V}_2 \frac{d(\vec{V}_1)}{dt}$
- Calcul sur les vecteurs de la base orthonormée : $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$; et $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$

4. Produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 donne un autre vecteur \vec{W} qui est perpendiculaire aux deux vecteurs d'origine :

$$\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\| \|\vec{V}_2\| \sin \theta \cdot \vec{u}_W$$

\vec{u}_W : vecteur unitaire supporté par \vec{W} .

$$\theta = (\vec{V}_1, \vec{V}_2)$$

Figure 1.7 Produit vectoriel de deux vecteurs

- \vec{W} est perpendiculaire au plan formé par \vec{V}_1 et \vec{V}_2 .
- Sa direction est perpendiculaire à \vec{V}_1 et \vec{V}_2 .
- Son sens est celui de la rotation de \vec{V}_1 et \vec{V}_2 (sens de rotation d'une vis)
- Sa norme est : $\|\vec{W}\| = \|\vec{V}_1\| \|\vec{V}_2\| \sin \theta \cdot \|\vec{u}_W\|$

$\|\vec{W}\|$: aire du parallélogramme formé par \vec{V}_1 et \vec{V}_2 .

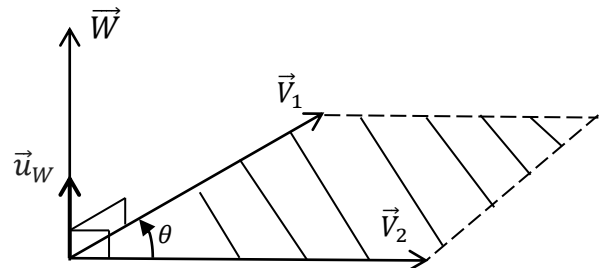


Figure 1.8 Norme du produit vectoriel

Expression analytique du produit vectoriel

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ x_2 z_1 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$$

4.1. Propriétés du produit vectoriel

- $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$
- $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3$; $(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \wedge \vec{V}_3 = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3 + \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$

- $\lambda(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) = (\lambda\vec{v}_1) \wedge \vec{v}_2 = \vec{v}_1 \wedge (\lambda\vec{v}_2); \lambda \in \mathbb{R}$
- $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{v}_1 = \vec{0} \text{ ou } \vec{v}_2 = \vec{0} \\ \text{ou} \\ \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2 \quad (\vec{v}_1 \text{ et } \vec{v}_2 \text{ sont colinéaires}) \end{cases}$

4.2. Dérivée d'un produit vectoriel

$$\frac{d(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2)}{dt} = \frac{d(\vec{v}_1)}{dt} \wedge \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \wedge \frac{d(\vec{v}_2)}{dt}$$

4.3. Calcul sur les vecteurs d'une base orthonormée directe

- $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$
- $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{0}, \quad \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{0}, \quad \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$
- $\vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$

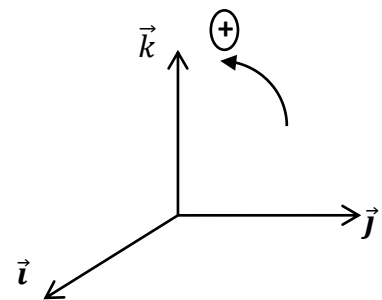


Figure 1.9 Convention de signe dans une base orthonormée

5. Produit mixte

Soient trois vecteurs \vec{v}_1, \vec{v}_2 et \vec{v}_3 dans une base orthonormée $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le produit mixte est calculé comme suit :

$$\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3) = \vec{v}_3 \cdot (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) = \vec{v}_2 \cdot (\vec{v}_3 \wedge \vec{v}_1)$$

Le produit mixte est un scalaire égal au volume du parallélépipède formé par les trois vecteurs.

$$|\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3)| = \text{Volume du parallélépipède}$$

$$\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3) = 0$$

si :

- Les trois vecteurs sont coplanaires.
- Deux vecteurs sont colinéaires.
- Un vecteur est nul.

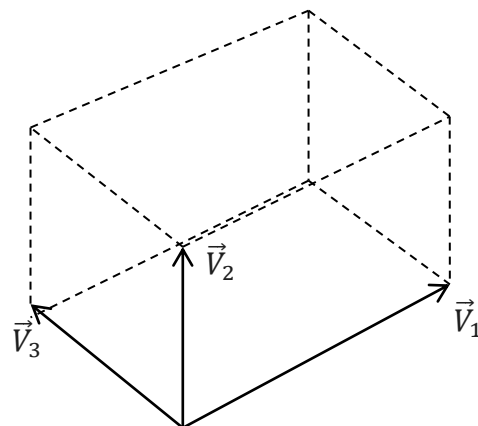


Figure 1.10 Norme du produit mixte

6. Double produit vectoriel

Soient trois vecteurs \vec{V}_1 , \vec{V}_2 et \vec{V}_3 dans une base orthonormée $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le double produit vectoriel est un vecteur \vec{W} calculé comme suit :

$$\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3) \vec{V}_2 - (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) \vec{V}_3$$

La règle est comme suit :

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C}) \vec{A}$$

7. Projection des vecteurs

7.1. Projection d'un vecteur sur un axe

La projection du vecteur \vec{V} sur l'axe (Δ) ayant

un vecteur unitaire \vec{u} est un vecteur \vec{V}_u :

$$\vec{V}_u = (\vec{V} \cdot \vec{u}) \vec{u} = (V \cos \alpha) \vec{u}$$

$$\vec{V}_u = |\vec{V}_u| \vec{u}$$

$$\boxed{\vec{V}_u = (\vec{V} \cdot \vec{u}) \vec{u}}$$

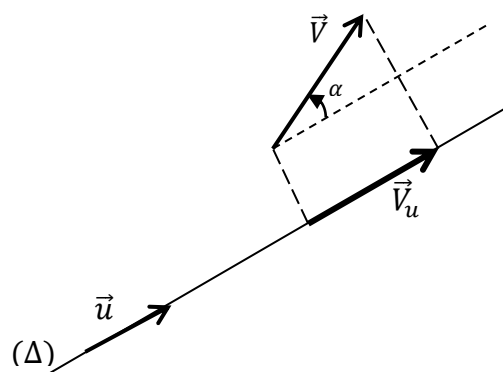


Figure 1.11 Projection d'un vecteur sur un axe.

7.2. Projection d'un vecteur sur un plan

$$\vec{V} = \vec{V}_n + \vec{V}_\pi \Rightarrow \vec{V}_\pi = \vec{V} - \vec{V}_n$$

$$\vec{V}_\pi = \vec{V} - (\vec{V} \cdot \vec{n}) \vec{n} = (\vec{n} \cdot \vec{n}) \vec{V} - (\vec{V} \cdot \vec{n}) \vec{n}$$

$$\boxed{\vec{V}_\pi = \vec{n} \wedge \vec{V} \wedge \vec{n}}$$

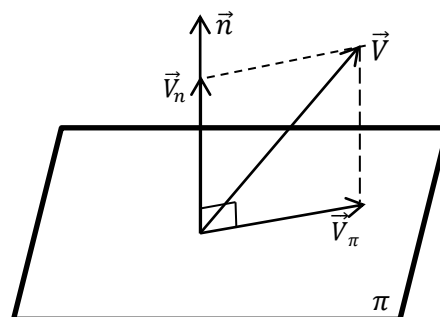


Figure 1.12 Projection d'un vecteur sur un plan.

7.3. Projection d'un vecteur dans un repère oblique

Soit un vecteur \vec{V} dans un repère oblique (Ox, Oy) ,

pour déterminer les composantes du vecteur dans cette base :

- On trace une droite parallèle à (Oy) jusqu'à couper l'axe (Ox) .

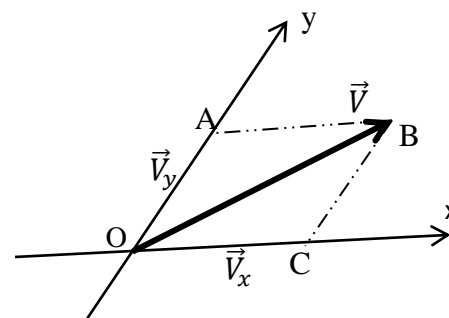


Figure 1.13 Projection dans un repère oblique.

- On trace une droite parallèle à (Ox) jusqu'à couper l'axe (Oy).
- On obtient le parallélogramme (OABC).
- Sur le triangle (OAB) ou celui (OBC), on applique la règle des sinus, donc :
Sur (OBC) :

$$\frac{\sin \alpha}{V_y} = \frac{\sin \beta}{V} = \frac{\sin \gamma}{V_x}$$

Nous obtenons les composantes du vecteur \vec{V} dans le repère oblique :

$$\begin{cases} V_x = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \cdot V \\ V_y = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot V \end{cases}$$

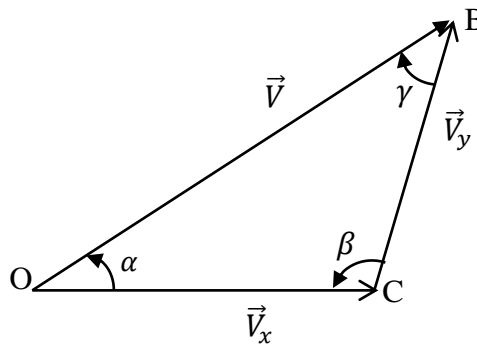


Figure 1.14 Règle du triangle (Sinus).

8. Moment d'un vecteur

8.1. Moment d'un vecteur par rapport à un point

a) Méthode vectorielle

Le moment d'un vecteur \vec{V} de point d'application **B** par rapport à un point quelconque **A** est donné par l'expression vectorielle :

$$\vec{M}_A(\vec{V}) = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{V}$$

$$\vec{M}_A(\vec{V}) = \|\overrightarrow{AB}\| \|\vec{V}\| \sin \theta \vec{u}$$

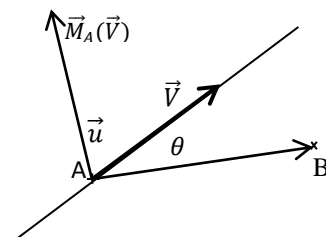
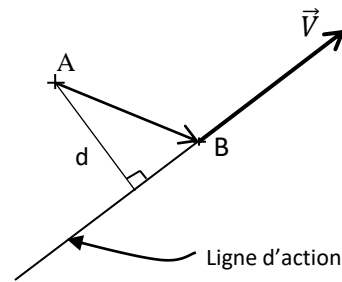


Figure 1.15 Moment vectoriel d'un vecteur/un point.

b) Par méthode du bras de levier :

$$|\vec{M}_A(\vec{V})| = |\vec{V}| \cdot d$$

**Figure 1.16** Moment d'un vecteur par bras de levier.**8.2. Moment d'un vecteur par rapport à un axe**

Le moment $\vec{M}_\Delta(\vec{V})$ par rapport à un axe (Δ) défini par un point A et un vecteur unitaire \vec{u}_Δ est :

$$\vec{M}_\Delta(\vec{V}) = (\vec{M}_A(\vec{V}) \cdot \vec{u}_\Delta) \vec{u}_\Delta ; \text{ projection du } \vec{M}_A(\vec{V}) \text{ sur } (\Delta).$$

9. Les torseurs**9.1. Définition**

Un torseur τ est défini comme étant un ensemble de deux champs de vecteurs définis dans l'espace géométrique :

$$\tau = \begin{cases} \vec{R} = \sum_i \vec{V}_i \\ \vec{M}_A = \sum_i \vec{AB} \wedge \vec{V}_i \end{cases}$$

A : point quelconque

B_i : point d'application de \vec{V}_i .

10. Formule de transport

Soit un vecteur \vec{V} de point d'application O et deux quelconque A et B, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \vec{M}_A(\vec{V}) &= \vec{AO} \wedge \vec{V} = (\vec{AB} + \vec{BO}) \wedge \vec{V} \\ &= \vec{AB} \wedge \vec{V} + \vec{BO} \wedge \vec{V} \\ &= \vec{AB} \wedge \vec{V} + \vec{M}_B(\vec{V}) \end{aligned}$$

Donc

$$\vec{M}_A(\vec{V}) = \vec{AB} \wedge \vec{V} + \vec{M}_B(\vec{V})$$

11. APPLICATIONS

Exercice 1 :

Deux points A et B, ont pour coordonnées cartésiennes dans l'espace : A(2,3,-3), B(5,7,2).

- Déterminer les composantes du vecteur \overrightarrow{AB} ainsi que son module, sa direction et son sens.

Exercice 2 :

Soient les vecteurs suivants : $\vec{U}_1 = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$ et $\vec{U}_2 = B_1\vec{i} + B_2\vec{j} + B_3\vec{k}$

- 1) Calculer les produits scalaires : $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2$; $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_1$ et $\vec{U}_2 \cdot \vec{U}_2$

On donne : $\vec{V}_1 = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{V}_2 = -3\vec{i} + 1.5\vec{j} - 7.5\vec{k}$ et $\vec{V}_3 = -5\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$

- 2) Calculer $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$; $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$.
- 3) Sans faire de représentation graphique que peut-on dire du sens et de la direction du vecteur \vec{V}_2 par rapport à \vec{V}_1 .
- 4) Calculer les produits suivants : $\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$ et $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$.
- 5) Déterminer la surface du triangle formé par les vecteurs \vec{V}_2 et \vec{V}_3 .

Exercice 3 :

Soient les vecteurs :

$$\vec{U} = 2\vec{i} + 6\vec{k}, \vec{V} = 8\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \vec{P} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k} \text{ et } \vec{Q} = -2\vec{i} + y\vec{j} + 12\vec{k}.$$

- 1) Déterminer y et z pour que les vecteurs \vec{U} et \vec{V} soient colinéaires.
- 2) Déterminer la valeur de y pour que les vecteurs \vec{P} et \vec{Q} soient perpendiculaires.

Exercice 4 :

Trouver le volume d'un parallélépipède dont les côtés sont les vecteurs : \vec{U} , \vec{P} et \vec{Q} tel que :

$$\vec{U} = 2\vec{i} + 6\vec{k}, \vec{P} = 3\vec{j} + 5\vec{k} \text{ et } \vec{Q} = \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Solution de l'exercice 1 :

- Le vecteur \overrightarrow{AB} peut s'écrire comme suit :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$$

- Son module (norme) est : $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$
- Sa direction est déterminée par les angles

(α, β, γ) qu'il fait avec chacun des axes du repère \mathbf{R} , ces angles se deduisent par le produit scalaire de \overrightarrow{AB} par le vecteur unitaire du repère orthonormé, donc :

$$\alpha = (\overrightarrow{AB}, \vec{i}) \text{ tel que } \overrightarrow{AB} \cdot \vec{i} = \overline{AB} \cdot 1 \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{i}}{\overline{AB}}$$

$$\text{D'où } \cos\alpha = \frac{3}{5\sqrt{2}} = 0.424 \Rightarrow \alpha = 64^\circ, 89$$

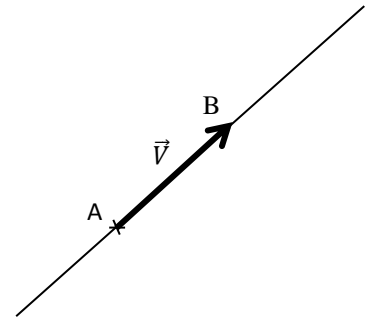
$$\beta = (\overrightarrow{AB}, \vec{j}) \text{ tel que } \overrightarrow{AB} \cdot \vec{j} = \overline{AB} \cdot 1 \cdot \cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{j}}{\overline{AB}}$$

$$\text{D'où } \cos\beta = \frac{4}{5\sqrt{2}} = 0.565 \Rightarrow \beta = 55^\circ, 54$$

$$\gamma = (\overrightarrow{AB}, \vec{k}) \text{ tel que } \overrightarrow{AB} \cdot \vec{k} = \overline{AB} \cdot 1 \cdot \cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{k}}{\overline{AB}}$$

$$\text{D'où } \cos\gamma = \frac{5}{5\sqrt{2}} = 0.707 \Rightarrow \gamma = 45^\circ, 00$$

- Son sens : comme le produit scalaire selon les trois directions est positif donc on peut dire que le sens du vecteur \overrightarrow{AB} est positif dans les trois directions Ox, Oy et Oz.

**Solution de l'exercice 2 :**

Soient les vecteurs suivants : $\vec{U}_1 = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$ et $\vec{U}_2 = B_1\vec{i} + B_2\vec{j} + B_3\vec{k}$

1- Produit scalaire de $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2$; $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_1$ et $\vec{U}_2 \cdot \vec{U}_2$

$$\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

$$\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_1 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = A_1A_1 + A_2A_2 + A_3A_3$$

$$\vec{U}_2 \cdot \vec{U}_2 = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = B_1B_1 + B_2B_2 + B_3B_3$$

2- $\vec{V}_1 = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{V}_2 = -3\vec{i} + 1.5\vec{j} - 7.5\vec{k}$ et $\vec{V}_3 = -5\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$

Calcul de :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1.5 \\ -7.5 \end{pmatrix} = -6 - 1.5 - 37.5 = -45$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 5 \\ -3 & 1.5 & -7.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

3- Comme le produit vectoriel est un vecteur nul donc les deux vecteurs sont parallèles :

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}_1 \parallel \vec{V}_2$$

De plus $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = -45 < 0 \Rightarrow$ les deux vecteurs sont de sens opposés.

4- Calcul du produit mixte :

$$\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = ?$$

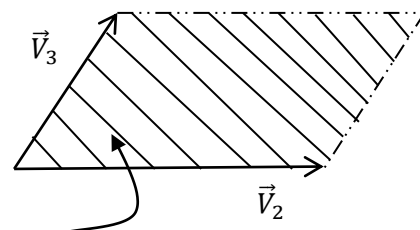
On calcule d'abord : $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1.5 & -7.5 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31.5 \\ 40.5 \\ -4.5 \end{pmatrix}$

$$\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 31.5 \\ 40.5 \\ -4.5 \end{pmatrix} = 0$$

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 5 \\ 31.5 & 40.5 & -4.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -198 \\ 166.5 \\ 112.5 \end{pmatrix}$$

5- La surface formée par les deux vecteurs \vec{V}_2 et \vec{V}_3 est donnée par la moitié du module du produit vectoriel

$$|\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3| = \frac{\sqrt{(31.5^2 + 40.5^2 + 4.5^2)}}{2} = 24.75$$



Surface du parallélogramme

Solution de l'exercice 3 :

$$\vec{U} = 2\vec{i} + 6\vec{k}, \vec{V} = 8\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \vec{P} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k} \text{ et } \vec{Q} = -2\vec{i} + y\vec{j} + 12\vec{k}$$

1- Si \vec{U} et \vec{V} sont colinéaires alors :

$$\vec{U} \parallel \vec{V} \Rightarrow \vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 6 \\ 8 & y & z \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} -6y = 0 \\ -2z + 48 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 24 \end{cases}$$

2- Si \vec{P} et \vec{Q} sont perpendiculaires :

$$\vec{P} \perp \vec{Q} \Rightarrow \vec{P} \cdot \vec{Q} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ y \\ 12 \end{pmatrix} = -6 - 4y + 24 = 0$$

$$\text{Donc } y = \frac{9}{2}$$

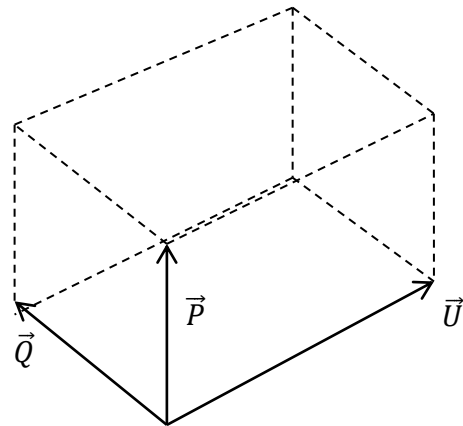
Solution de l'exercice 4 :

Soient $\vec{U} = 2\vec{i} + 6\vec{k}$, $\vec{P} = 3\vec{j} + 5\vec{k}$ et $\vec{Q} = \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

Le volume d'un parallélépipède est un scalaire positif, c'est le module du produit mixte des vecteurs qui le forment, \vec{U} , \vec{P} et \vec{Q} :

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$v = |\vec{U} \cdot (\vec{P} \wedge \vec{Q})| = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -26 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = 70$$



2.1. Introduction

La **statique des solides** est une branche de la mécanique qui étudie les corps solides en équilibre, c'est-à-dire des objets qui ne sont pas en mouvement. Elle s'intéresse à l'analyse des forces et des moments appliqués à un corps solide afin de déterminer les conditions nécessaires pour que ce corps reste immobile ou en équilibre.

Dans ce contexte, un solide est considéré comme rigide, ce qui signifie qu'il ne se déforme pas sous l'effet des forces appliquées (même si dans la réalité, les matériaux peuvent subir des déformations, cela est négligé dans la statique).

Les principes de base incluent :

1. **Somme des forces égale à zéro** : Pour qu'un corps reste immobile, la somme vectorielle des forces agissant sur lui doit être nulle.
2. **Somme des moments égale à zéro** : La somme des moments (ou des couples) agissant sur un corps autour d'un point doit également être nulle pour qu'il ne tourne pas.

Sinon on peut dire qu'un système matériel est en équilibre statique par rapport à un repère donné, si au cours du temps, chaque point de ce système garde une position fixe par rapport au repère.

Ces deux conditions sont nécessaires pour assurer l'équilibre statique d'un solide. La statique des solides est souvent utilisée en génie civil, en architecture et en ingénierie mécanique pour concevoir des structures stables et sûres.

2.2. Les systèmes de forces dans l'espace.

Les **systèmes de forces dans l'espace** sont des configurations de forces appliquées à un objet qui peuvent être classées en plusieurs types, selon leur direction, leur point d'application et leurs interactions mutuelles. Voici les principaux types de systèmes de forces que l'on rencontre en statique des solides dans l'espace (c'est-à-dire en trois dimensions) :

2.2.1. Système de forces concourantes :

- Les lignes d'action de toutes les forces se rejoignent en un seul point. Cela signifie que ces forces peuvent être représentées par un vecteur unique qui passe par ce point de convergence.

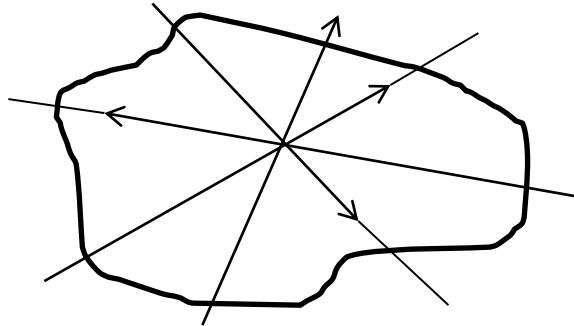


Figure 2.1 Forces concourantes.

- Exemple : Les forces agissant sur une structure suspendue par des câbles à partir d'un point.

2.2.2. Système de forces parallèles :

- Toutes les forces sont parallèles entre elles, mais elles n'ont pas nécessairement le même point d'application.

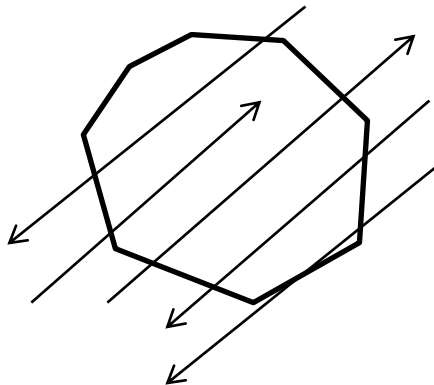


Figure 2.2 Système de forces parallèles.

- Ce type de système de forces est souvent rencontré dans des situations où plusieurs forces agissent verticalement sur une structure, comme dans les poutres ou les colonnes.
- Exemple : Le poids des différentes parties d'un pont soutenu par des piliers.

2.2.3. Système de forces coplanaires :

- Toutes les forces agissent dans un seul plan. Cela signifie qu'elles peuvent être représentées dans deux dimensions.
- Exemple : Les forces agissant sur une structure plate, comme un cadre ou une plaque.

2.2.4. Système de forces non concourantes et non parallèles :

- C'est un système dans lequel les forces ont des lignes d'action différentes, ne se rencontrent pas en un point et ne sont pas parallèles.
- Un tel système nécessite souvent une analyse des moments (ou des couples) ainsi que des forces pour déterminer les conditions d'équilibre.
- Exemple : Plusieurs forces appliquées sur une structure tridimensionnelle comme un bâtiment.

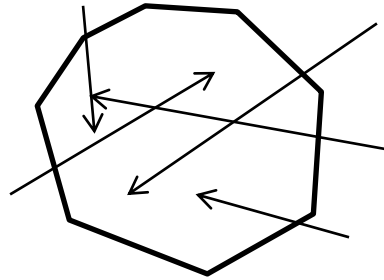


Figure 2.3 Système de forces non concourantes et non parallèles.

2.2.5. Système de forces en couple :

- Deux forces égales en grandeur, opposées en direction, mais avec des lignes d'action différentes. Cela crée un couple ou un moment pur qui tend à faire tourner l'objet sans provoquer de translation.
- Exemple : Une clé à molette lorsqu'elle est utilisée pour tourner un écrou.

2.2.6. Système de forces générales dans l'espace :

- Un système de forces quelconques appliquées sur un solide en trois dimensions. Ce type de système est plus complexe à analyser, car il nécessite la considération des forces dans les trois directions (x, y, z) ainsi que des moments autour des axes correspondants.
- Exemple : Une grue supportant une charge avec des forces et des moments agissant dans toutes les directions.

2.3. Composantes d'une force

Dans un repère orthonormé à trois dimensions (noté $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$), une force \vec{F} est représentée par un vecteur qui peut être décomposé en trois composantes selon les axes x, y et z . Ces axes sont perpendiculaires entre eux et forment un système orthonormé.

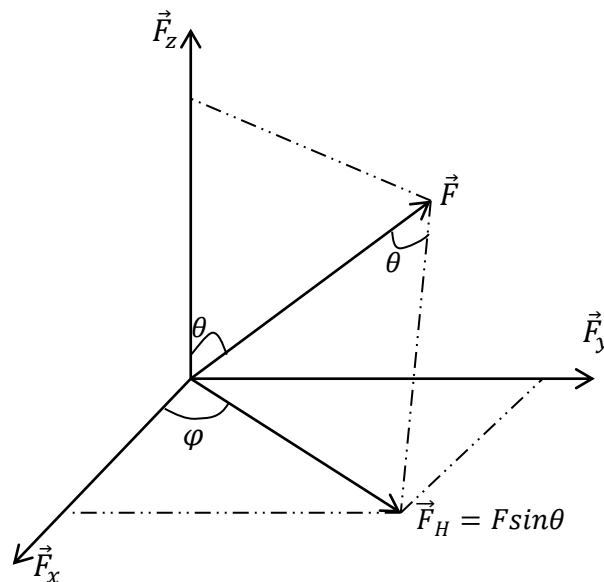


Figure 2.4 Composantes d'une force dans l'espace.

2.3.1. Décomposition de la force \vec{F}

Soit une force \vec{F} appliquée à un point. On peut la décomposer comme suit :

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \quad \text{où :}$$

- F_x , F_y et F_z sont les **composantes scalaires** de la force dans les directions des axes x , y et z respectivement,
- \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} sont les **vecteurs unitaires** dans les directions des axes x , y et z .

Les composantes F_x , F_y et F_z peuvent être déterminées si on connaît la direction et la norme de la force, ou si l'on connaît les projections de cette force sur les différents axes du repère.

2.3.2. Calcul de la norme de la force

La norme (ou Le module) de la force \vec{F} est calculée à partir de ses composantes à l'aide de la relation :

$$F = \|\vec{F}\| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

Cette norme représente la longueur du vecteur \vec{F} , c'est-à-dire l'intensité de la force.

2.3.3. Direction de la force

La direction de la force dans l'espace est définie par les **angles directeurs** θ_x , θ_y et θ_z , qui sont les angles que fait la force avec les axes x , y et z , respectivement. Ils sont liés aux composantes par les relations suivantes :

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{\|\vec{F}\|}, \quad \cos\theta_y = \frac{F_y}{\|\vec{F}\|}, \quad \cos\theta_z = \frac{F_z}{\|\vec{F}\|},$$

$$F_x = F\cos\theta_x, \quad F_y = F\cos\theta_y, \quad F_z = F\cos\theta_z$$

$$\vec{F} = F(\cos\theta_x\vec{i} + \cos\theta_y\vec{j} + \cos\theta_z\vec{k})$$

$$\vec{F} = F\vec{u}_{\vec{F}} \quad \vec{u}_{\vec{F}} = \begin{pmatrix} \cos\theta_x \\ \cos\theta_y \\ \cos\theta_z \end{pmatrix}$$

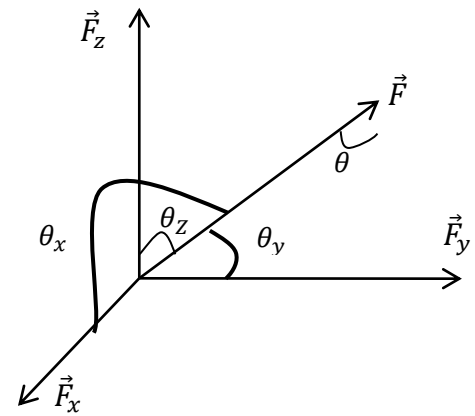


Figure 2.5 Directions d'une force.

Ces angles permettent de connaître l'orientation de la force dans le repère orthonormé.

Une force définie par son module et deux points sur sa ligne d'action

$$\vec{u}_{AB} = \vec{u}_{\Delta} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{1}{\|\overrightarrow{AB}\|} \begin{pmatrix} X_B - X_A \\ Y_B - Y_A \\ Z_B - Z_A \end{pmatrix}$$

\vec{F} est supportée par l'axe Δ , d'où :

$$\vec{F} = F \cdot \vec{u}_{\Delta}$$

Si un vecteur moment supporté par Δ , on écrit :

$$\vec{M}_A = M_A \cdot \vec{u}_{\Delta}$$

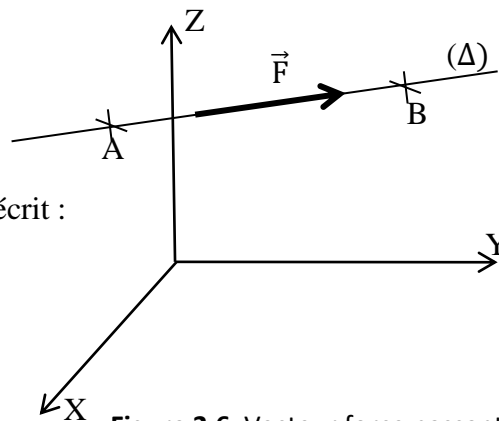


Figure 2.6 Vecteur force passant par deux points.

2.4. Axiomes de la statique

2.4.1. 1^{er} Axiome : Un solide est soumis à deux forces, ce solide ne peut se trouver en équilibre que dans le cas où :

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2, \quad \vec{F}_1 \text{ et } \vec{F}_2 \text{ sont alignées}$$

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| \text{ et sont opposées.}$$

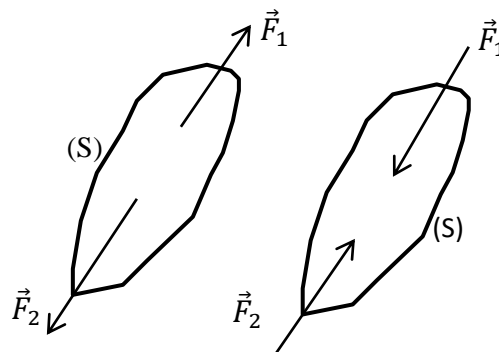


Figure 2.7 Equilibre d'un solide sous deux forces opposées

2.4.2. 2^{ème} Axiome (Principe de glissement) : l'action d'un système de forces donné sur un solide ne changera pas si on ajoute à ce système ou si on lui retranche un système de forces équilibré.

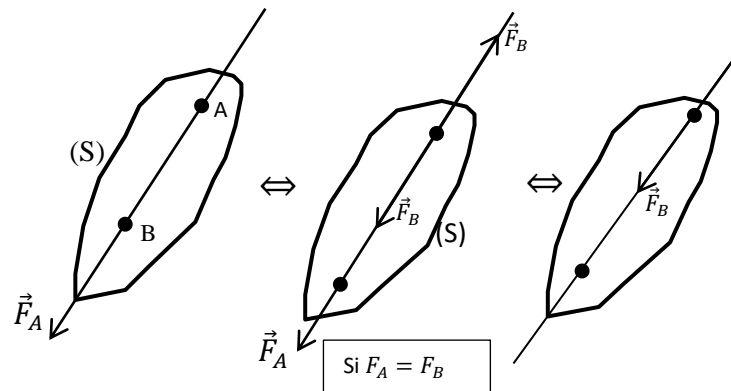


Figure 2.8 Principe de glissement.

- **Principe de glissement**

On peut glisser le point d'application d'une force appliquée sur un solide le long de sa ligne d'action appartenant au solide.

2.4.3. 3^{ème} Axiome : (Principe du parallélogramme)

Deux forces agissant sur un solide en un même point, admettent une résultante représentée par la diagonale du parallélogramme ayant ces forces comme cotés.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

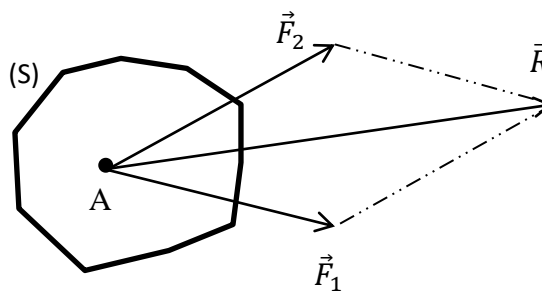


Figure 2.9 Résultante de deux forces (Principe du parallélogramme).

2.4.4. 4^{ème} Axiome (Principe d'Action – Réaction)

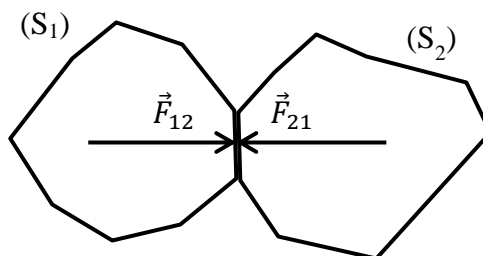


Figure 2.10 Action-réaction entre deux solides.

Soient deux solides (S_1) et (S_2) en contact entre eux. Si (S_1) agit sur (S_2) avec une force \vec{F}_{12} , alors (S_2) agira sur (S_1) avec une force \vec{F}_{21} tel que :

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

2.5. Equilibre du solide

Soit un solide (S) soumis à des forces ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$) appliquées aux points ($M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$). Pour que le solide soit en \rightleftharpoons (équilibre) statique, il faut et il suffit que :

- La résultante de toutes les forces extérieures appliquées soit nulle.
- Le moment résultant de toutes ces forces en un point quelconque **O** soit nul.

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

$$\vec{M}_O = \sum_i \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F}_i = \vec{0}$$

Le système est complètement déterminé si le nombre d'inconnues est égal au nombre d'équations indépendantes.

2.5.1. Equilibre d'un solide dans un plan.

Dans le cas des forces coplanaires dans le plan x-y, le système d'équations se réduit à trois (03) équations (colinéaires) scalaires.

$$z = 0, F_z = 0 \Rightarrow M_x = M_y = 0$$

$$M_z = M_o = \sum_i M_i(F_i) = 0$$

$$\text{La résultante est : } \begin{cases} R_x = \sum_i F_{x_i} = 0 \\ R_y = \sum_i F_{y_i} = 0 \end{cases}$$

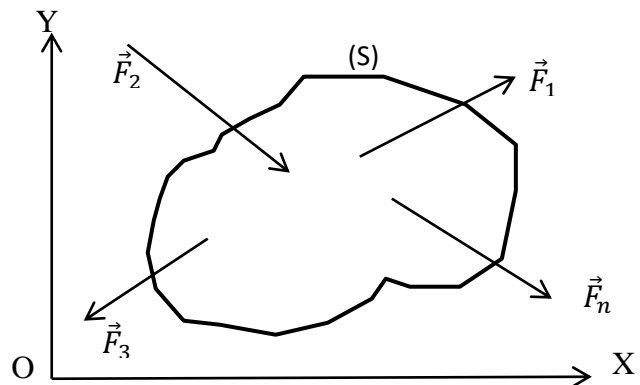


Figure 2.11 Equilibre d'un solide dans le plan.

2.5.2. Réactions aux appuis et aux liaisons :

A. Appui simple d'un solide sur une surface parfaitement lisse :

La réaction d'une surface lisse sur un solide est normale à cette surface au point de contact.

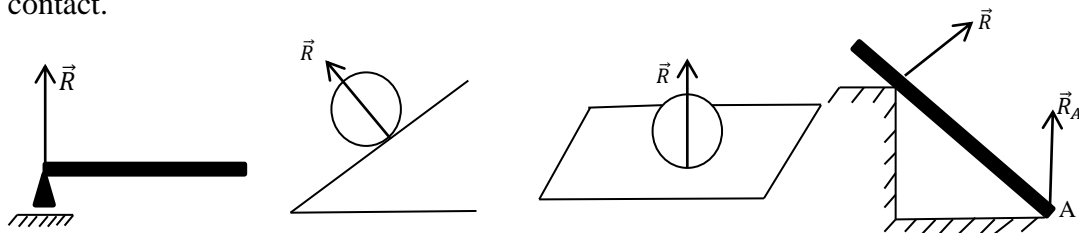


Figure 2.12 Appui simple sur une surface lisse.

B. Articulation d'un solide

❖ Articulation cylindrique : (Appui double).

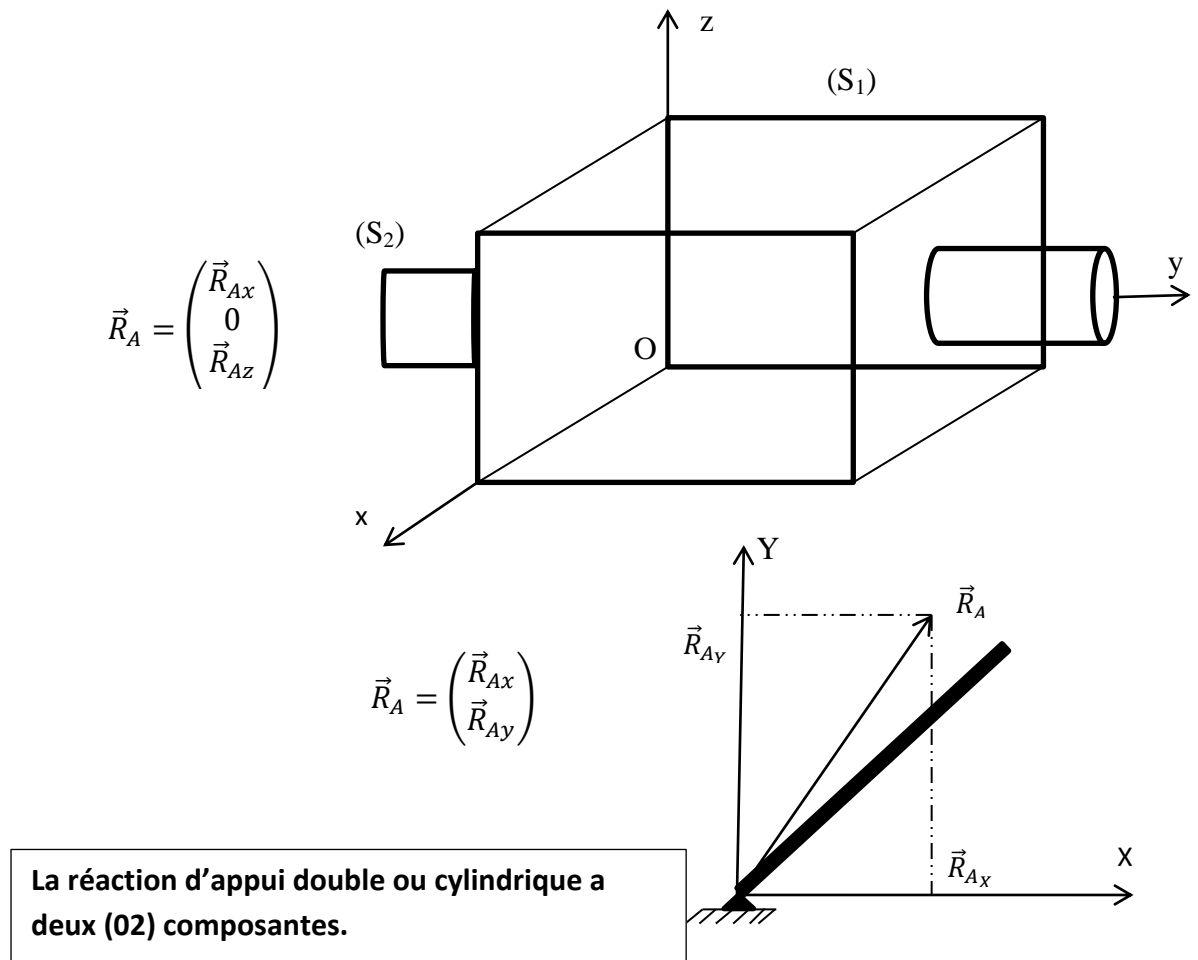


Figure 2.13 Appui double ou articulation cylindrique.

❖ Articulation sphérique (Rotule)

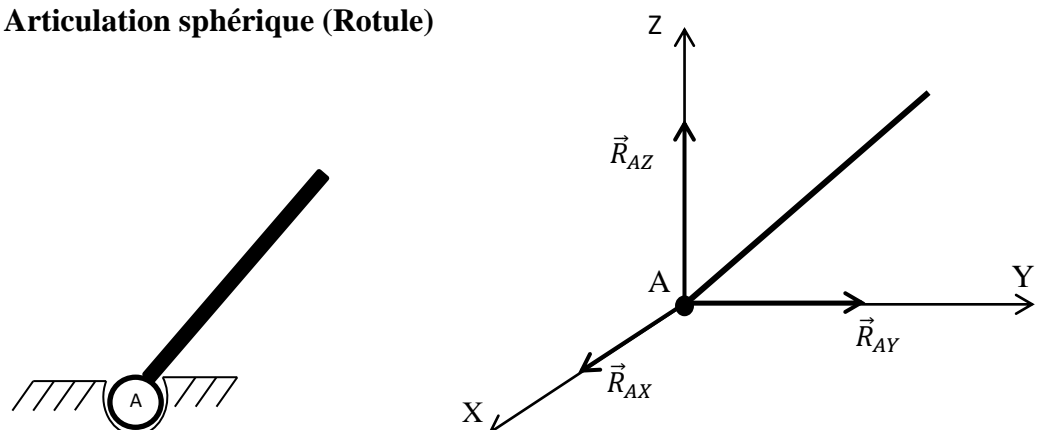


Figure 2.14 Appui triple ou Articulation sphérique.

La réaction d'une rotule a (03) composantes.

❖ **Encastrement d'un solide**

A deux dimensions (2D) :

$$\vec{R}_A = \begin{pmatrix} \vec{R}_{AX} \\ \vec{R}_{AY} \end{pmatrix} ; M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_Z \end{pmatrix}$$

A trois dimensions (3D) :

$$\vec{R}_A = \begin{pmatrix} \vec{R}_{AX} \\ \vec{R}_{AY} \\ \vec{R}_{AZ} \end{pmatrix} ; M = \begin{pmatrix} M_{AX} \\ M_{AY} \\ M_{AZ} \end{pmatrix}$$

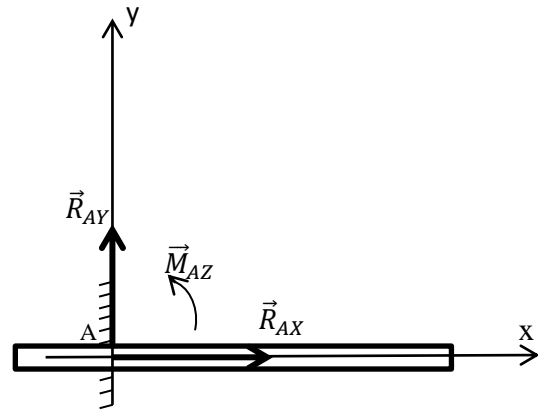
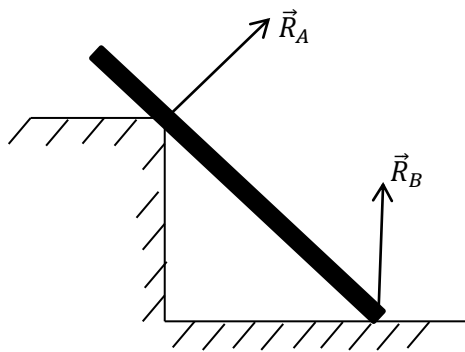


Figure 2.15 Encastrement.

❖ **Conditions de liaisons**• **Combinaisons de liaisons**

- Appui simple 02 fois

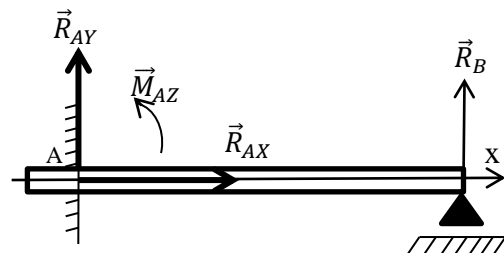


- Appui simple et appui double



- Encastrement et appui simple

Système dit hyperstatique



2.6. Types de force

2.6.1. Force ponctuelle

Une **force ponctuelle** est une force qui agit sur un point précis d'un corps solide ou d'une structure.

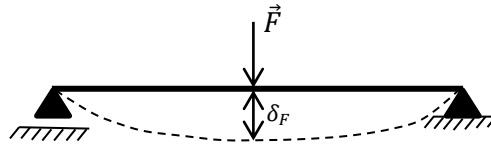


Figure 2.16 Force ponctuelle.

2.6.2. Force linéique

Une **force linéique** est une force répartie le long d'une ligne, exprimée en termes d'intensité par unité de longueur.

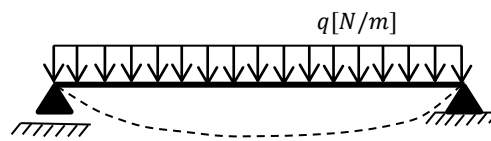


Figure 2.17 Charge répartie.

2.6.3. Force surfacique

Une **force surfacique** est une force répartie sur une surface, exprimée par unité de surface.

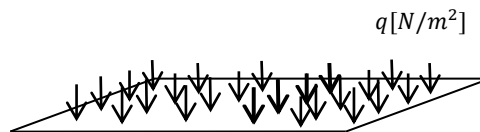


Figure 2.18 Charge surfacique.

2.6.4. Force volumique

Une **charge volumique** est une force ou une charge répartie dans un volume, exprimée par unité de volume.

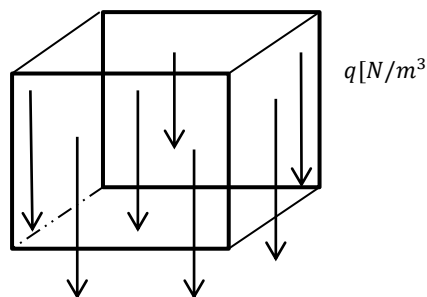
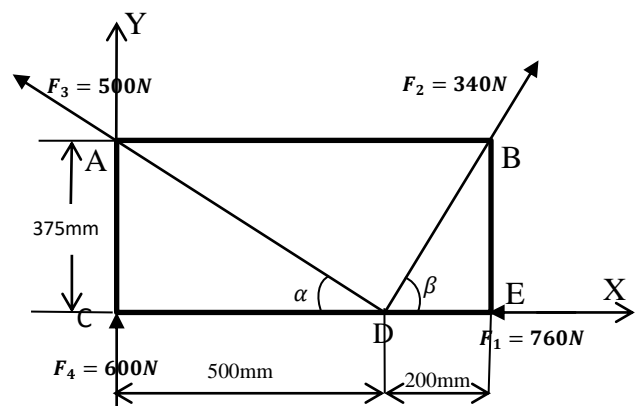


Figure 2.19 Charge volumique.

2.7. Applications

Exercice 1 : soient quatre forces agissant sur une plaque représentée sur la figure ci-dessous.

- Calculer la résultante \vec{R} des forces ainsi que le moment résultant agissant sur la plaque.
- Déduisez et tracez la ligne d'action réelle de \vec{R} en déterminant le point d'intersection X_C de cette ligne avec (CX).

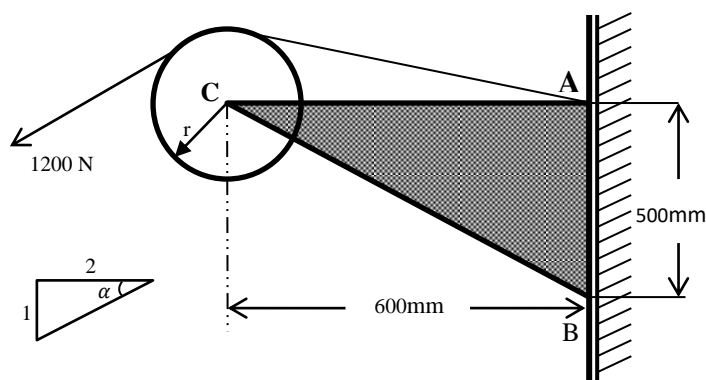
**Exercice 2 :**

Soit le système ci-contre composé d'un support encastré

Et d'une poulie de rayon $r=200\text{mm}$.

On tire sur un fil avec une tension

de 1200N , inclinée d'un angle α .



On demande de :

- Calculer le moment de la force \vec{T} de module 1200N

Par rapport au point A.

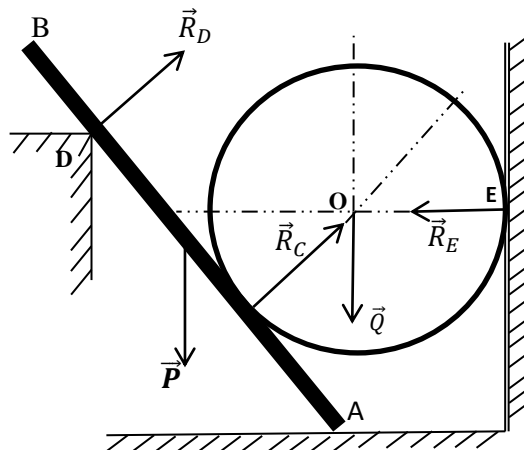
- Pour un calcul simple, réduisez la force à un système force-couple appliqué en C.
- Donner le moment de la même force par rapport au point B.

Exercice 3 :

Les forces représentées sur la figure \vec{R}_C , \vec{R}_E et \vec{Q} sont concourantes.

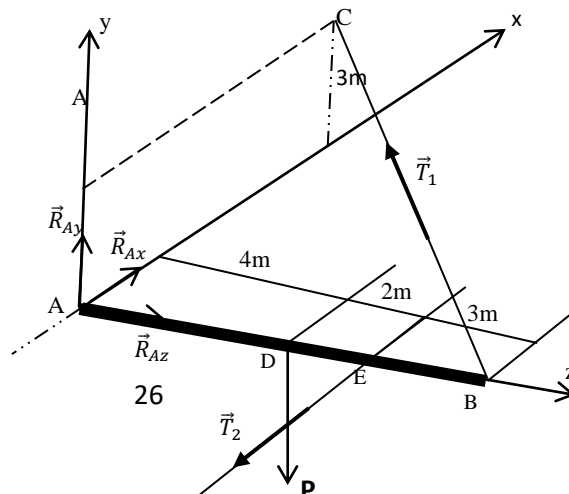
Un cylindre de rayon r et de poids Q repose sur un mur vertical et une barre (AB) de longueur $3r$ et de poids P . Cette dernière tourne autour d'un axe horizontal en (A) et s'appuie simplement sur l'arête en (D) avec un angle $\theta = 45^\circ$ et $AD=2r$.

- Déterminer en fonction de P et Q .
 - a) L'action du mur sur le cylindre (\vec{R}_E)
 - b) L'action de l'articulation (A) et la réaction de l'arête (D) sur la barre (AB).

**Exercice 4 :**

Soit la barre (AB) de poids négligeable chargée par $P=30\text{Kn}$ au point D, en équilibre par deux (02) câbles (BC, EF) et une articulation sphérique A.

- Représenter tous les efforts agissant sur la barre et leurs expressions vectorielles.
- Donner les expressions d'équilibre de la barre et calculer T_1 et T_2 ainsi que R_{Ax} , R_{Ay} et R_{Az} .



Solution de l'exercice 1 :

Le calcul consiste à déterminer le torseur $\tau = [\vec{R}, \vec{M}_C]$ tel que :

$$\tau = \begin{cases} \vec{R} = \sum_i \vec{F}_i \\ \vec{M}_C(\vec{F}_i) = \vec{CB}_i \wedge \vec{F}_i \end{cases}$$

B_i : point d'application de la force \vec{F}_i .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{375}{500} = 0.75 \Rightarrow \alpha = 36^\circ, 87$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{375}{200} = 1.875 \Rightarrow \beta = 61^\circ, 93$$

1- Calcul de la résultante $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$

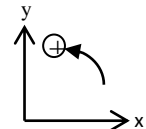
$$\begin{aligned} \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 &= -F_1 \vec{i} + (F_2 \cos \beta \vec{i} + F_2 \sin \beta \vec{j}) + (-F_3 \cos \alpha \vec{i} + F_3 \sin \alpha \vec{j}) + F_4 \vec{j} \\ &= (-F_1 + F_2 \cos \beta + -F_3 \cos \alpha) \vec{i} + (F_2 \sin \beta + F_3 \sin \alpha + F_4) \vec{j} \end{aligned}$$

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} = -1000 \vec{i} + 1200 \vec{j} \Rightarrow \begin{cases} R = \sqrt{1000^2 + 1200^2} = 1562 \text{ N} \\ \theta = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{R_y}{R_x} \right) = 50^\circ, 2 \end{cases}$$

2- Le moment résultant \vec{M}_C

- **par la méthode du bras de levier**

$$\begin{aligned} M_C &= \sum M_C(F_i) = (340 \sin \beta) * 0.5 + (500 \sin \alpha) * 0.5 \\ &= 300 \text{ N.m (sens aiti - horaire)} \end{aligned}$$



- **Par la méthode vectorielle**

$$\vec{M}_C(\vec{F}_i) = \vec{CB}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{CE} \wedge \vec{F}_1 + \vec{CB} \wedge \vec{F}_2 + \vec{CA} \wedge \vec{F}_3 + \vec{CC} \wedge \vec{F}_4$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{M}_C(\vec{F}_1) = \vec{CE} \wedge \vec{F}_1 = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.7 & 0 & 0 \\ -760 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{M}_C(\vec{F}_2) = \vec{CB} \wedge \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.7 & 0.375 & 0 \\ 160 & 300 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 150 \end{pmatrix} \\ \vec{M}_C(\vec{F}_3) = \vec{CA} \wedge \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0.375 & 0 \\ -400 & 300 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 150 \end{pmatrix} \\ \vec{M}_C(\vec{F}_4) = \vec{CC} \wedge \vec{F}_4 = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 600 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

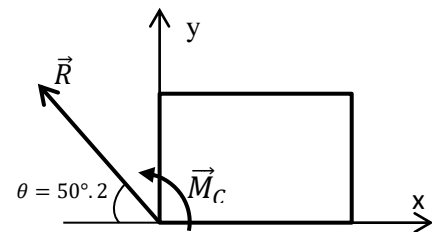
Donc :

$$\vec{M}_C(\vec{F}_i) = 300\vec{k}$$

Le système devient :

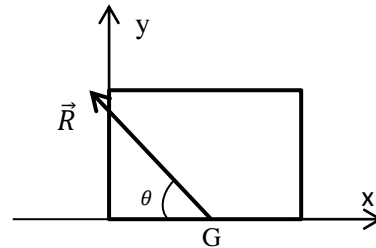
$$\tau = \begin{cases} \vec{R} = -1000\vec{i} + 1200\vec{j} \\ \vec{M}_C(\vec{F}_i) = 300\vec{k} \end{cases}$$

- 3- Dédurre et tracer la ligne d'action de la résultante \vec{R} en déterminant la position du point d'intersection (X_R) de cette ligne avec l'axe (CX).



$$\text{Nous avons : } \vec{M}_C(\vec{F}_i) = 300\vec{k}$$

De plus nous avons :

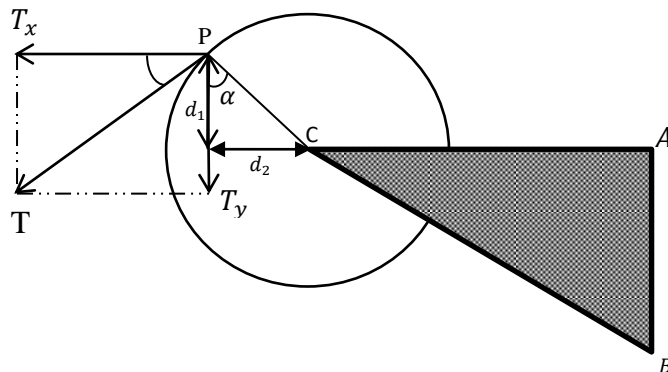


$$\vec{M}_C(\vec{R}) = \vec{OG} \wedge \vec{R} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_R & 0 & 0 \\ -1000 & 1200 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1200X_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 300 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où : } 1200X_R = 300 \Rightarrow X_R = \frac{300}{1200} = 0.25m$$

Solution de l'exercice 2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} = 0.5m; \overline{AC} = 0.6m \\ \text{rayon } r = 0.2m \\ \text{tg } \alpha = \frac{1}{2} = 0.5; \alpha = 26^\circ, 56 \end{array} \right.$$



Le moment de **T** par rapport à **A** et **B** :

c) Par rapport à A.

$$M_A(T) = M_A(T_x) + M_A(T_y)$$

$$= T_x * d_1 + T_y * d_2$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} T_x = T \cdot \cos \alpha \\ T_y = T \cdot \sin \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} d_1 = r \cos \alpha = 0.18m \\ d_2 = r \sin \alpha = 0.09m \end{cases}$$

$$M_A(T) = [(0.6 + r \sin \alpha) \sin \alpha + r \cos^2 \alpha] = 562 \text{ N.m (Sens anti-horaire)}$$

Par déplacement du point (P) au centre (C) de la poulie \Rightarrow apparition d'un couple $M = r \cdot T$ dans le sens anti-horaire.

$$M_A(T) = M_A(T_x) + M_A(T_y) + M$$

$$= \overline{AC} \cdot T_y + r \cdot T$$

$$= \overline{AC} \cdot T \cdot \sin \alpha + r \cdot T$$

$$= 0.6 * 1200 \cdot \sin 26.56 + 0.2 * 1200$$

$$M_A(T) = 562 \text{ N.m}$$

d) Par rapport à B.

$$M_B(T) = M_B(T_x) + M_B(T_y) + M$$

$$= \overline{AB} \cdot T \cdot \cos \alpha + \overline{AC} \cdot T \cdot \sin \alpha$$

$$M_B(T) = 1096 \text{ N.m (Sens anti-horaire)}.$$

Solution de l'exercice 3 :

Les données : $\overline{AB} = 3r$; $\overline{AD} = 2r$

Le calcul consiste à trouver : R_E , R_D , et $\vec{R}_A = A_x \vec{i} + A_y \vec{j}$ (le tout 04 inconnues)

Etant donné qu'il n'y a que 03 équations d'équilibre pour 04 inconnues, donc le problème est impossible. Donc on doit décomposer le système en deux sous-systèmes :

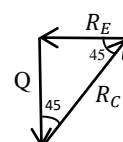
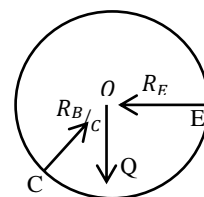
(La barre (AB) + le cylindre).

1- L'équilibre du cylindre : 03 forces concourantes.

On peut procéder de résoudre le problème de deux méthodes :

a) Méthode graphique : Triangle des forces (règle des sinus)

$$\frac{Q}{\sin 45} = \frac{R_E}{\sin 45} = \frac{R_{B/C}}{\sin 90} \Rightarrow R_E = Q \quad \text{et} \quad R_{B/C} = \frac{Q}{\sin 45} = \sqrt{2}Q$$



b) Méthode analytique (équilibre du cylindre)

$$\sum \vec{F} = \vec{R}_E + \vec{Q} + \vec{R}_{B/C} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_x = R_{B/C} \cos 45 - R_E = 0 \dots \dots (1) \\ \sum \vec{F}_y = R_{B/C} \sin 45 - Q = 0 \dots \dots (2) \end{cases}$$

De (2) on obtient : $R_{B/C} = \frac{Q}{\sin 45} = \sqrt{2}Q$

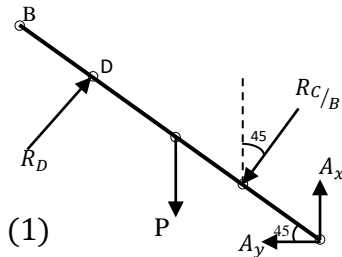
Et de (1) : $R_E = Q$

2- Equilibre de la barre (AB) : (Analytique)

$$\sum \vec{F} = \vec{R}_A + \vec{R}_E + \vec{Q} + \vec{R}_{C/B} = \vec{0}$$

Avec : $\vec{R}_{C/B} = -\vec{R}_{B/C}$

Donc :
$$\begin{cases} \sum \vec{F}_x = R_D \cos 45 - R_{C/B} \sin 45 - A_x = 0 \dots \dots (1) \\ \sum \vec{F}_y = R_D \sin 45 - R_{C/B} \sin 45 + A_y - P = 0 \dots \dots (2) \end{cases}$$



L'équilibre des moments nous donne :

$$\sum M_A = \overline{AC} \cdot R_{C/B} + \left(\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \cos 45 \right) P - \overline{AD} \cdot R_D = 0 \dots \dots (3)$$

Avec : $\overline{AC} = r \cdot \tan 45 = r$

\Rightarrow

$$\sum M_A = r \cdot R_{C/B} + \left(\frac{3}{2} \cdot r \cdot \cos 45 \right) P - 2r \cdot R_D = 0$$

$$\Rightarrow R_D = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2}Q) + \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot P$$

D'où : $R_D = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(Q + \frac{3}{4} \right) \cdot P$

De (3) $\Rightarrow A_x = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} P - Q \right)$ et $A_y = \frac{1}{2} \left(Q + \frac{5}{4} P \right)$

Solution de l'exercice 4 :

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}, C \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, D \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

1- Les expressions vectorielles des efforts :

$$\begin{cases} \vec{R}_A = \vec{R}_{Ax} + \vec{R}_{Ay} + \vec{R}_{Az} \\ \vec{P} = -P\vec{j} \\ \vec{T}_2 = -T_2\vec{i} \\ \vec{T}_1 = T_1 \cdot \frac{\vec{BC}}{BC} \end{cases}$$

$$\vec{BC} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 9\vec{k} \text{ et } BC = \sqrt{4^2 + 3^2 + 9^2} = 10.29$$

$$\vec{T}_1 = T_1(0.39\vec{i} + 0.29\vec{j} - 0.87\vec{k})$$

2- Les moments autour des 03 axes

- Axe (Ox) : P et T_1 développent un moment
- Axe (Oy) : T_1 et T_2
- Axe (Oz) : aucune force.

3- Calcul des moments

- $\vec{M}_A(P) = \vec{AF} \wedge \vec{P} = 4\vec{k} \wedge (-P\vec{j}) = 4P\vec{i}$
- $\vec{M}_A(T_2) = \vec{AE} \wedge \vec{T}_2 = 6\vec{k} \wedge (-T_2\vec{i}) = -6T_2\vec{j}$
- $\vec{M}_A(T_1) = \vec{AB} \wedge \vec{T}_1 = 9\vec{k} \wedge T_1(0.39\vec{i} + 0.29\vec{j} - 0.87\vec{k})$
 $= T_1(3.51\vec{j} - 2.61\vec{k})$

4- Conditions d'équilibre

$$\sum \vec{F}_{ex} = \vec{P} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{R}_A$$

$$\sum \vec{M}_A = \vec{M}_A(\vec{P}) + \vec{M}_A(\vec{T}_1) + \vec{M}_A(\vec{T}_2) + \vec{M}_A(\vec{R}_A) = \vec{0}$$

Donc :

$$\sum \vec{F}_{ex} = \begin{cases} \vec{F}_x = R_x + 0.39T_1 - T_2 = 0 \\ \vec{F}_y = R_y + 0.29T_1 - P = 0 \\ \vec{F}_z = R_z - 0.87T_1 = 0 \end{cases}$$

$$\sum \vec{M}_A = (4P - 2.61T_1)\vec{i} + (3.51T_1 - 6T_2)\vec{j} = \vec{0}$$

$$M_x = 4P - 2.61T_1 = 0 \quad \text{et}$$

$$M_y = 3.51T_1 - 6T_2 = 0$$

D'où :

$$\begin{cases} T_1 = 45.97 \text{ N} \\ T_2 = 26.89 \text{ N} \\ R_x = 40.0 \text{ N} \\ R_y = 8.96 \text{ N} \\ R_z = 16.67 \text{ N} \end{cases}$$

3.1. Introduction

La **cinématique du solide** est une branche de la mécanique qui étudie les mouvements des objets rigides sans tenir compte des forces qui les provoquent. Elle se concentre uniquement sur la description géométrique des déplacements, des vitesses et des accélérations d'un corps solide ou de ses différentes parties, sans s'intéresser aux causes de ces mouvements (c'est-à-dire les forces).

Concepts clés de la cinématique du solide :

1. Solide indéformable :

- En cinématique du solide, on considère les objets comme **indéformables**, c'est-à-dire que la distance entre deux points quelconques du corps reste constante au cours du mouvement. Cela signifie que les objets ne subissent ni déformation ni changement de forme.

2. Types de mouvements :

- Les mouvements d'un solide peuvent être décrits par trois types principaux :
 - **Translation** : Tous les points du solide se déplacent dans la même direction et à la même vitesse.
 - **Rotation** : Le solide tourne autour d'un axe fixe, et chaque point du solide décrit un cercle ou une trajectoire circulaire autour de cet axe.
 - **Mouvement plan** : Il s'agit d'une combinaison de translation et de rotation dans un plan bidimensionnel.

3. Paramètres de mouvement :

- **Position** : La position d'un point ou d'un objet dans l'espace est définie à un instant donné.
- **Vitesse** : La vitesse d'un point est le taux de variation de sa position par rapport au temps.
- **Accélération** : C'est la variation de la vitesse d'un point au cours du temps.

4. Référentiel :

- Le mouvement d'un solide est toujours étudié par rapport à un système de référence, appelé **référentiel**. Le choix du référentiel peut influencer la manière dont le mouvement est perçu et décrit (référentiel fixe ou mobile, inertiel ou non inertiel).

Objectifs de la cinématique du solide :

L'objectif principal de la cinématique du solide est de **décrire** avec précision comment un solide se déplace dans l'espace au cours du temps, en déterminant :

- Les trajectoires des différents points du solide.
- La vitesse de chaque point, qui peut être calculée à partir de la dérivée de la position par rapport au temps.
- L'accélération, obtenue en dérivant la vitesse.

Importance de la cinématique du solide :

La cinématique du solide est une étape préalable à l'étude des forces (statique et dynamique) dans la mécanique. Elle est essentielle pour comprendre le mouvement d'objets dans de nombreux domaines scientifiques et techniques, notamment en robotique, en ingénierie mécanique, dans la conception de machines et dans les simulations numériques de systèmes physiques.

En résumé, la cinématique du solide fournit un cadre rigoureux pour analyser et comprendre les mouvements sans se soucier des causes, et elle constitue une base indispensable avant de passer à la dynamique où les forces sont considérées.

3.2. Les quantités cinématiques d'un point matérielNotion de référentiel

Un **référentiel** en mécanique est un système de coordonnées utilisé pour décrire la position et le mouvement d'un objet dans l'espace et dans le temps. Il sert de point de référence par rapport auquel les positions, les vitesses et les accélérations des objets sont mesurées. Il est composé d'un repère d'espace et d'un repère de temps.

Repère d'espace

Repère de temps

$$R_0(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$



$$(t)$$

Trouver la position du solide au cours du temps.

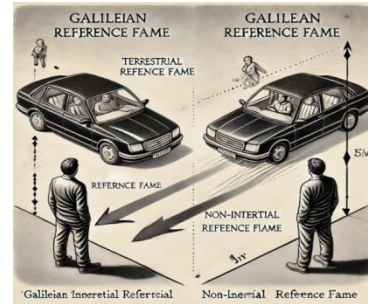
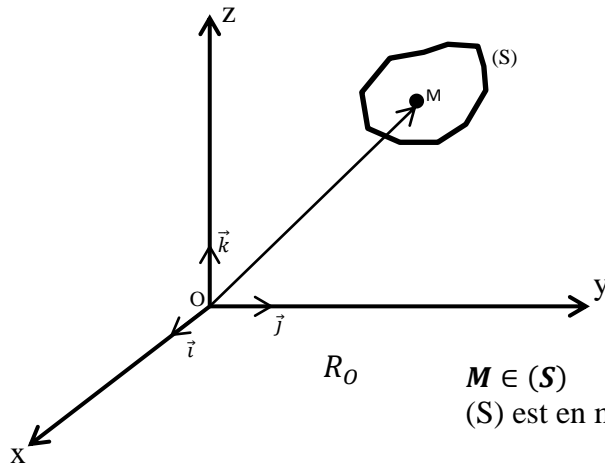


Figure 3.1 Référentiel d'un point matériel.

La vitesse du point **M** par rapport au repère R_0 peut s'écrire comme suit :

$$\vec{v}(M \in S/R_0) = \frac{d\vec{OM}}{dt} \Big|_{R_0} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

L'accélération du point **M** par rapport au repère R_0 peut s'écrire comme suit :

$$\vec{\gamma}(M \in S/R_0) = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} \Big|_{R_0} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{R_0} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

3.3. Cinématique d'un corps solide

3.3.1. Champs des vitesses :

Soit **(S)** un solide indéformable.

Si $\overline{AB} = Cte$ au cours du temps $\Rightarrow \overline{AB}^2 = Cte$

Donc on peut écrire :

$$\frac{d\overline{AB}^2}{dt} = 2\overline{AB} \frac{d\overline{AB}}{dt} = 0$$

D'où

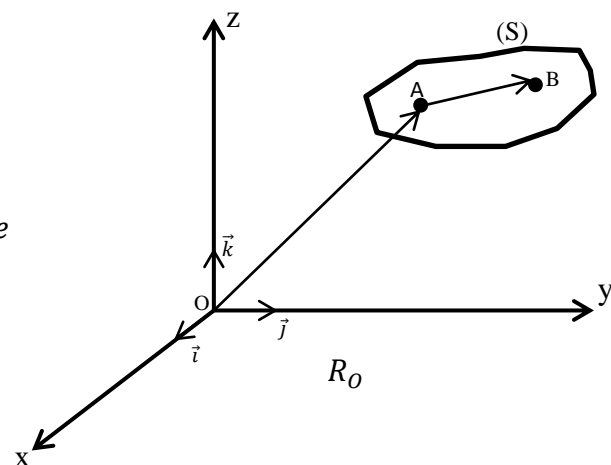


Figure 3.2 Champ des vitesses d'un solide en mouvement.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = 0$$

donc :

$$\overrightarrow{AB} \perp \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}$$

Remarque :

(S) est indéformable, c'est-à-dire que la distance entre A et B ne change pas mais le vecteur \overrightarrow{AB} peut changer de direction.

Champs des vitesses

Soit un référentiel $R_O(O_0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ fixe

R_S est lié au solide (S)

$R_S(O_S, \vec{i}_S, \vec{j}_S, \vec{k}_S)$

Le repère R_S ou (S) étant en mouvement par rapport à R_O .

On a dans R_O :

$$\begin{cases} \overrightarrow{O_0B} = \overrightarrow{O_0A} + \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O_0B} - \overrightarrow{O_0A} \end{cases}$$

On a dans R_S :

$$\begin{cases} \overrightarrow{O_SB} = \overrightarrow{O_SA} + \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O_SB} - \overrightarrow{O_SA} \end{cases}$$

On utilise la notion du vecteur rotation (dérivation)

$$\vec{v}_A / R_O = \frac{d\overrightarrow{O_0A}}{dt} / R_O$$

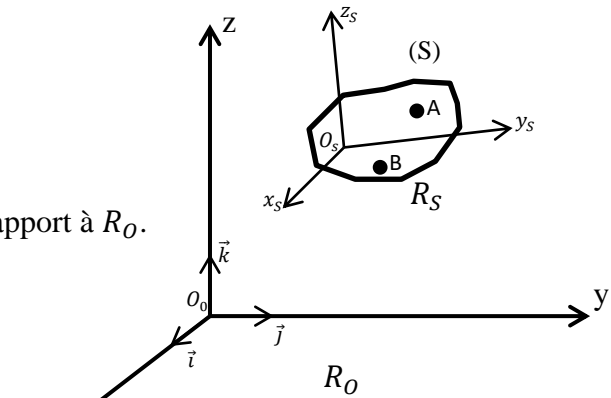


Figure 3.3 Composition de mouvements

$$\vec{v}_A / R_O = \frac{d\overrightarrow{O_0A}}{dt} / R_S + \vec{\Omega}_{R_S/R_O} \wedge \overrightarrow{O_0A} \quad (1)$$

De même :

$$\vec{v}_B / R_O = \frac{d\overrightarrow{O_0B}}{dt} / R_S + \vec{\Omega}_{R_S/R_O} \wedge \overrightarrow{O_0B} \quad (2)$$

Donc pour un vecteur position \vec{u} :

$$\vec{u} = \frac{d\vec{u}}{dt} / R_O = \frac{d\vec{u}}{dt} / R_S + \vec{\Omega}_{R_S/R_O} \wedge \vec{u}$$

$\vec{\Omega}_{R_S/R_O}$: vecteur instantané de rotation de R_S/R_O

② - ①

$$\begin{aligned}\vec{v}_B/R_O - \vec{v}_A/R_O &= \frac{d(\overrightarrow{O_0B} - \overrightarrow{O_0A})}{dt} \Big/_{R_S} + \vec{\Omega}_{R_S/R_O} \wedge (\overrightarrow{O_0B} - \overrightarrow{O_0A}) \\ &= \frac{d(\overrightarrow{AB})}{dt} \Big/_{R_S} + \vec{\Omega}_{R_S/R_O} \wedge \overrightarrow{AB} \quad \text{Avec} \quad \frac{d(\overrightarrow{AB})}{dt} \Big/_{R_S} = 0 \\ &= \vec{\Omega}_{R_S/R_O} \wedge \overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{v}_B/R_O - \vec{v}_A/R_O = \vec{\Omega}_{R_S/R_O} \wedge \overrightarrow{AB}}$$

**Formule fondamentale de la cinématique du solide
(Relation de VARIGNON)**

$$\boxed{\vec{v}_B/R_O = \vec{v}_A/R_O + \vec{\Omega}_{R_S/R_O} \wedge \overrightarrow{AB}}$$

Si $\vec{\Omega}_{R_S/R_O} = 0$

Alors $\vec{v}_B/R_O = \vec{v}_A/R_O$

Le mouvement est de
Translation.
(Torseur couple)

Si $\vec{v}_A/R_O = 0$

Alors $\vec{v}_B/R_O = \vec{\Omega}_{R_S/R_O} \wedge \overrightarrow{AB}$

Le mouvement est de
Rotation.
(Torseur glisseur)

3.3.2. Equiprojectivité du champ de vitesses.

L'équiprojectivité du champ des vitesses est un concept utilisé en dynamique des milieux continus. Cela signifie que les vectrices vitesses d'un ensemble de particules d'un milieu en mouvement restent dans des directions qui conservent des propriétés géométriques particulières lorsqu'elles sont projetées sur une surface ou un volume.

$$\vec{v}_B / R_o = \vec{v}_A / R_o + \vec{\Omega}_{RS/R_o} \wedge \overrightarrow{AB}$$

En multipliant l'égalité par \overrightarrow{AB}

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}_B / R_o = \overrightarrow{AB} \cdot (\vec{v}_A / R_o + \vec{\Omega}_{RS/R_o} \wedge \overrightarrow{AB})$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}_B / R_o = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}_A / R_o \quad \text{Avec} \quad \overrightarrow{AB} \cdot (\vec{\Omega}_{RS/R_o} \wedge \overrightarrow{AB}) = 0$$

Le champ des vitesses est equiprojectif \Leftrightarrow Antisymétrique.

La signification graphique

Soient deux points **A** et **B** appartenant au solide (S), on a :

$$\vec{v}_B / R_o = \vec{v}_A / R_o + \vec{\Omega}_{RS/R_o} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Si \vec{v}_A / R_o et \vec{v}_B / R_o sont connus \Rightarrow

Le champ des vitesses est déterminé en tout point du solide.

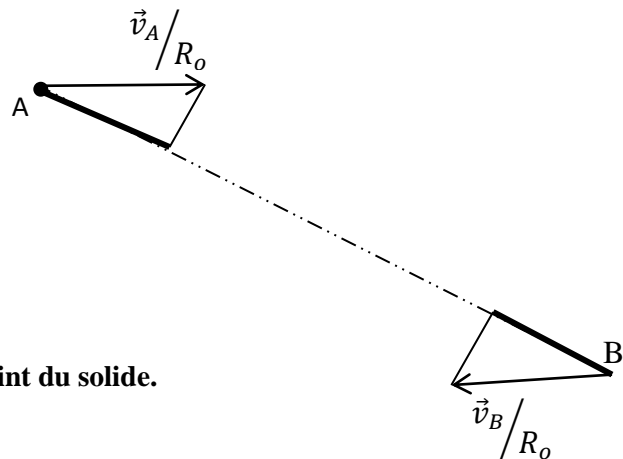


Figure 3.4 Equiprojectivité du champ de vitesses.

3.3.3. Torseur cinématique.

Le **torseur cinématique** est un outil mathématique utilisé en mécanique pour décrire de manière compacte l'état de mouvement d'un solide ou d'un système mécanique. Il regroupe les informations relatives à la **vitesse** de translation et de rotation en un seul objet. Cela permet une analyse simplifiée et plus générale des mouvements, notamment dans les systèmes multicorps.

Comme le champ des vitesses est equiprojectif, donc **Antisymétrique**.

$$\text{On a : } \overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}_B / R_o = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}_A / R_o$$

Donc le torseur cinématique est défini :

$$\left[C_{RS/R_O} \right]_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{RS/R_O} \\ \vec{v}_A/R_O \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{RS/R_O} \\ \vec{v}_B/R_O + \vec{\Omega}_{RS/R_O} \wedge \overrightarrow{AB} \end{array} \right\}$$

Ou

$$\left[C_{RS/R_O} \right]_B = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{RS/R_O} \\ \vec{v}_B/R_O \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{RS/R_O} \\ \vec{v}_A/R_O + \vec{\Omega}_{RS/R_O} \wedge \overrightarrow{AB} \end{array} \right\}$$

3.3.4. Champ des accélérations.

Le **champ des accélérations** décrit la variation des accélérations en fonction de la position dans un domaine spatial. Il s'agit d'un champ vectoriel qui associe à chaque point de l'espace un vecteur représentant l'accélération à cet endroit.

On a :

$$\vec{v}_B/R_O - \vec{v}_A/R_O = \vec{\Omega}_{RS/R_O} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\frac{d\vec{v}_B}{dt}/R_O = \frac{d\vec{v}_A}{dt}/R_O + \frac{d\vec{\Omega}_{RS/R_O}}{dt} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}_{RS/R_O} \wedge \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}$$

$$\vec{\gamma}_B/R_O = \vec{\gamma}_A/R_O + \frac{d\vec{\Omega}_{RS/R_O}}{dt} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}_{RS/R_O} \wedge \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}$$

$$= \vec{\gamma}_A/R_O + \frac{d\vec{\Omega}_{RS/R_O}}{dt} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}_{RS/R_O} \wedge \frac{d(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB})}{dt}$$

$$= \vec{\gamma}_A/R_O + \frac{d\vec{\Omega}_{RS/R_O}}{dt} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}_{RS/R_O} \wedge (\vec{v}_B/R_O - \vec{v}_A/R_O)$$

$$\vec{\gamma}_B/R_O = \vec{\gamma}_A/R_O + \frac{d\vec{\Omega}_{RS/R_O}}{dt} \wedge \overrightarrow{AB} + \underbrace{\vec{\Omega}_{RS/R_O} \wedge (\vec{\Omega}_{RS/R_O} \wedge \overrightarrow{AB})}_{=0}$$

Formule de RIVALS (dérivée de la relation de VARIGNON)

Remarque : le champ des accélérations n'est pas Antisymétrique, donc il n'est un Torseur

3.3.5. Dérivation vectorielle.

En suppose que R_0 étant le repère absolu, R_1 le repère relatif et R le repère lié au solide (S). le dérivation du vecteur \overrightarrow{AB} .

$$\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \Big/_{R_0} = \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \Big/_{R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Le repère R_1 est mobile par rapport à au repère R_0 .

$\vec{\Omega}_{R_1/R_0}$ le vecteur rotation instantané de R_1/R_0 .

Exemple : Rotation autour de (z).

$$\vec{\Omega}_{R'/R_0} = \frac{d\theta}{dt} \vec{k} = \dot{\theta} \vec{k}$$

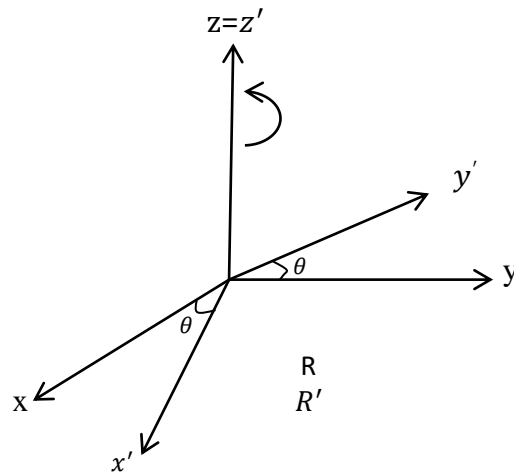


Figure 3.5 Rotation autour d'un axe.

3.4. Loi de composition des vitesses

En suppose que R_0 étant le repère absolu, R_1 le repère relié au solide (S).

Dans R_0 on peut écrire :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$$

$$\vec{v}_M / R_0 = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Big/_{R_0} = \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} \Big/_{R_0} + \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \Big/_{R_0}$$

$$\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} \Big/_{R_0} = \vec{v}_{O_1} / R_0$$

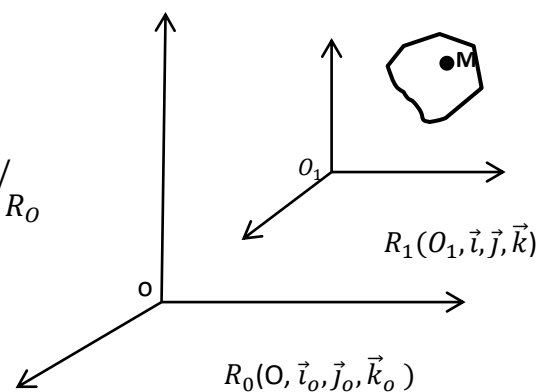


Figure 3.6 Composition des vitesses.

$$\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \Big/_{R_0} = \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \Big/_{R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

(Loi de dérivation vectorielle L.D.V)

$$\vec{v}_M \Big/_{R_0} = \vec{v}_{O_1} \Big/_{R_0} + \vec{v}_M \Big/_{R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

$$\vec{v}_M \Big/_{R_0} = \vec{v}_M \Big/_{R_1} + \vec{v}_{O_1} \Big/_{R_0} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

$$\vec{v}_a(M) = \vec{v}_r(M) + \vec{v}_e(M)$$

C'est Loi de composition des vitesses

$$\vec{v}_a(M) = \vec{v}_M \Big/_{R_0} : \text{vitesse absolue}$$

$$\vec{v}_r(M) = \vec{v}_M \Big/_{R_1} : \text{vitesse relative.}$$

$$\vec{v}_e(M) = \vec{v}_{O_1} \Big/_{R_0} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \overrightarrow{O_1M} : \text{vitesse d'entraînement}$$

3.5. Loi de composition des accélérations.

Nous avons précédemment la loi de composition des vitesses que nous allons dériver :

$$\vec{v}_M \Big/_{R_0} = \vec{v}_M \Big/_{R_1} + \vec{v}_{O_1} \Big/_{R_0} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

$$\vec{\gamma}_M \Big/_{R_0} = \vec{\gamma}_a(M) = \frac{d\vec{v}_M \Big/_{R_0}}{dt} \Big/_{R_0} = \frac{d\vec{v}_r(M)}{dt} \Big/_{R_0} + \frac{d\vec{v}_{O_1} \Big/_{R_0}}{dt} \Big/_{R_0} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \Big/_{R_0} \wedge \overrightarrow{O_1M} +$$

$$\vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \Big/_{R_0}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{d\vec{v}_r(M)}{dt} \Big/_{R_0} &= \frac{d\vec{v}_r(M)}{dt} \Big/_{R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{v}_r(M) \\ &= \vec{\gamma}_r(M) + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{v}_r(M) \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \frac{d\vec{v}_{O_1} \Big/_{R_0}}{dt} \Big/_{R_0} = \vec{\gamma}_a(O_1)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \Big/_{R_0} &= \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \Big/_{R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \overrightarrow{O_1M} \right) \\ &= \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{v}_r(M) + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge (\vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \overrightarrow{O_1M}) \end{aligned}$$

D'où :

$$\vec{\gamma}_a(\mathbf{M}) = \vec{\gamma}_r(\mathbf{M}) + \boxed{2\vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{v}_r(\mathbf{M})} + \boxed{\vec{\gamma}_a(\mathbf{O}_1) + \frac{d\vec{\Omega}_{R_1/R_0}}{dt} \wedge \overrightarrow{\mathbf{O}_1\mathbf{M}}}$$

↑
Accélération de **Coriolis**

↑
Accélération d'**Entrainement**

$$\vec{\gamma}_a(\mathbf{M}) = \vec{\gamma}_r(\mathbf{M}) + \vec{\gamma}_c(\mathbf{M}) + \vec{\gamma}_e(\mathbf{M})$$

NB : L'accélération d'entraînement est l'accélération du point **M** fixe dans $R_1 \Rightarrow$

$$\vec{v}_r(\mathbf{M}) = \mathbf{0} \text{ et } \vec{\gamma}_r(\mathbf{M}) = \mathbf{0}$$

3.6. Mouvement de translation

Un solide (S) lié à un repère $R_1(\mathbf{O}_1, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dit en mouvement de translation pur par rapport à un repère $R_0(\mathbf{O}, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ si les axes de $R_1(\mathbf{O}_1, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ gardent une direction fixe par rapport à ceux de $R_0(\mathbf{O}, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$, au cours du temps.

Tous les points du solide ont la même vitesse et la même accélération que le point $P \in (S)$.

La vitesse de rotation du solide est nulle par rapport à $R_0(\mathbf{O}, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$.

On peut écrire : $\vec{v}_{R_1/R_0}(P) = \vec{v}_{R_1/R_0}(\mathbf{O}_1)$

Et $\vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{\mathbf{O}_1\mathbf{P}} = \vec{0}$

Comme $\overrightarrow{\mathbf{O}_1\mathbf{P}} \neq \vec{0}$ donc $\vec{\Omega}_{S/R_0} = \vec{0}$

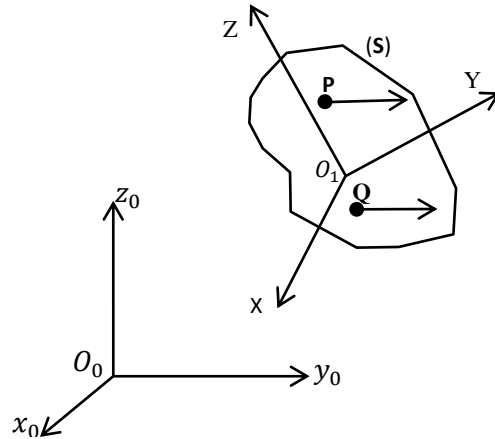


Figure 3.7 Mouvement de translation.

Dans ce cas le champ des vitesses est un champ uniforme.

Le torseur cinématique qui décrit le mouvement de translation pur est un torseur couple, dont la résultante est nulle mais le moment n'est pas nul.

$$\left[\mathbf{C}_{R_1/R_0} \right]_P = \begin{cases} \vec{\Omega}_{S/R_0} = \vec{0} \\ \vec{V}_{R_1/R_0}(P) = \vec{V}_{R_1/R_0}(O_1) \neq \vec{0} \end{cases}$$

3.7. Mouvement de rotation autour d'un axe (Δ) fixe.

Un solide (S) lié à un repère $R_1(O_1, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dit en mouvement de rotation pur par rapport à un repère $R_0(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ si un axe de $R_1(O_1, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ reste fixe à tout instant et d'une manière permanente dans le repère $R_0(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$. Nous avons donc deux points distincts O_1 et I du solide (qui restent fixes dans le repère au cours du mouvement de rotation).

Le repère $R_1(O_1, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est en rotation pur par rapport au repère $R_0(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ à une vitesse angulaire donnée par :

$$\vec{\Omega}_{R_1/R_0} = \dot{\Psi} \vec{z}_0 = \dot{\Psi} \vec{Z} \quad \text{et} \quad \vec{V}(O_1)/_{R_0} = \vec{0}$$

Soit P un point quelconque du solide et n'appartenant pas à l'axe de rotation tel que :

$$\vec{IP} = r \vec{X}$$

Quel que soit $\in \vec{z}_0$ et \vec{Z} , on peut écrire :

$$\vec{V}(I)/_{R_0} = \vec{V}(O_1)/_{R_0} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{O_1I} : \text{or nous avons}$$

$$\vec{\Omega}_{R_1/R_0} \parallel \vec{O_1I} \Rightarrow \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{O_1I} = \vec{0} : \text{d'où}$$

$$\vec{V}(I)/_{R_0} = \vec{V}(O_1)/_{R_0}$$

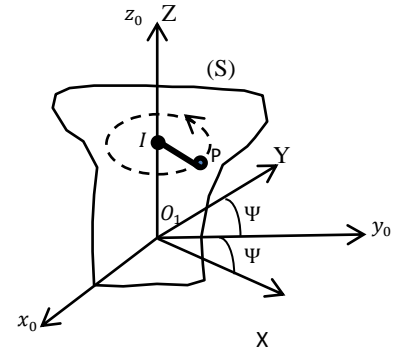


Figure 3.8 Mouvement de rotation.

I et P sont deux points du solide, nous pouvons alors écrire :

$$\vec{V}(P)/_{R_0} = \vec{V}(I)/_{R_0} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{IP} = \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{IP} \Rightarrow \vec{V}(P)/_{R_0} = \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{IP}$$

On remplace $\vec{\Omega}_{R_1/R_0}$ et \vec{IP} par leurs expressions, la vitesse du point P devient :

$$\vec{V}(P)/_{R_0} = \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{IP} = \dot{\Psi} \vec{Z} \wedge r \vec{X} = r \dot{\Psi} \vec{Y}$$

Dans un mouvement de rotation pur, le torseur des vitesses est équivalent au torseur glisseur défini par :

$$\left[\mathbf{C}_{R_1/R_0} \right]_P = \begin{cases} \vec{\Omega}_{S/R_0} \neq \vec{0} \\ \vec{V}_{R_1/R_0}(I) = \vec{0} \end{cases} \quad \text{Tel que } I \in \vec{z}_0 \text{ et } \vec{Z}$$

3.8. Mouvement plan sur plan

Le mouvement d'un solide (S) lié à un repère $R_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ par rapport à un repère fixe $R_0(O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ est un mouvement plan sur plan si et seulement si, un plan (P_S) du solide reste en coïncidence avec un plan π_0 lié au repère $R_0(O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$.

On étudie ainsi le mouvement relatif de deux plans, l'un constituant le référentiel fixe. Les vecteurs \vec{k}_0 et \vec{k}_1 sont orthogonaux aux plans (P_S) et π_0 respectivement en O et O_1 .

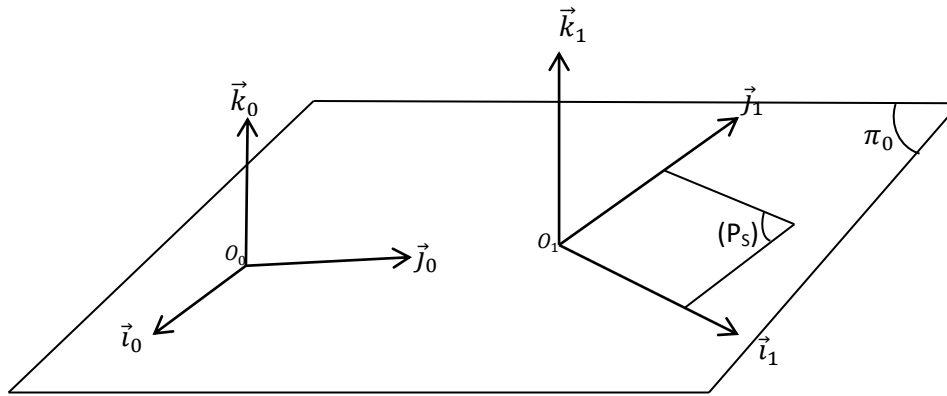


Figure 3.9 Mouvement plan sur plan.

Le vecteur rotation instantané du solide (S) lié à $R_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ par rapport au repère fixe $R_0(O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ est donné par : $\vec{\Omega}_{S/R_0} = \dot{\Psi} \vec{k}_0$

Tous les points du solide se déplacent parallèlement au plan (π_0), leurs vecteurs vitesses sont aussi parallèles à ce plan, alors $\forall P \in (S)$ nous aurons :

$$\vec{V}(P)/_{R_0} = f(t)\vec{i}_0 + g(t)\vec{j}_0 \Rightarrow \vec{V}(P)/_{R_0} \cdot \vec{k}_0 = 0$$

On remarque dans ce cas que l'automoment $\vec{V}(P)/_{R_0} \cdot \vec{\Omega}_{S/R_0} = 0$ du torseur cinématique

$$\left[\mathbf{C}_{R_1/R_0} \right]_P = \begin{cases} \vec{\Omega}_{S/R_0} \\ \vec{V}_{R_1/R_0}(P) \end{cases} \text{ décrivant le mouvement est nul. En effet nous avons :}$$

$$\vec{V}(P)/_{R_0} \cdot \vec{\Omega}_{S/R_0} = (f(t)\vec{i}_0 + g(t)\vec{j}_0) \cdot \dot{\Psi} \vec{k}_0 = 0, \text{ nous pouvons conclure que :}$$

- Si $\Psi = Cte \Rightarrow \vec{\Omega}_{S/R_0} = \dot{\Psi} = 0$, la résultante du torseur étant nulle, alors le torseur est un couple et le mouvement est une translation rectiligne sur le plan π_0 , l'axe central du torseur reste indéfini ;
- Si ψ varie au cours du temps, alors $\vec{\Omega}_{S/R_0} = \dot{\Psi}$, dans ce cas le torseur est un glisseur dont l'axe central est l'axe instantané de rotation orthogonal au plan (π_0) donc parallèle à \vec{k}_0 .

3.9. Mouvement composé

Un solide (S) lié à un repère $R_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ décrit un mouvement hélicoïdal par rapport à un repère fixe $R_0(O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ si :

- Un axe du repère $R_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ reste en coïncidence à tout instant avec un axe du repère $R_0(O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$.
- La coordonnée du point O_1 centre du repère $R_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ suivant l'axe de coïncidence, est proportionnelle à l'angle de rotation du repère $R_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ par rapport au repère $R_0(O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ au cours du mouvement de rotation.

Nous avons alors : $\overrightarrow{O_0O_1} = \lambda \Psi(t) \vec{k}_0$

Le scalaire λ représente le pas du mouvement hélicoïdal le long de l'axe de coïncidence.

Nous avons deux mouvements qui se superposent :

- Un mouvement de translation le long de l'axe commun $\vec{k}_0 = \vec{k}_1$
- Un mouvement de rotation autour de ce même axe $\vec{k}_0 = \vec{k}_1$.

Soit P un point du solide, nous avons à chaque instant : $\overrightarrow{O_0P} = \overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1P}$

Le vecteur $\overrightarrow{O_0O_1}$ s'écrit dans le repère $R_0(O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$: $\overrightarrow{O_0O_1} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \lambda \Psi(t) \end{cases}$

Le vecteur $\overrightarrow{O_1P}$ s'écrit dans le repère $R_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$: $\overrightarrow{O_1P} = \begin{cases} a \\ b \\ c \end{cases}$

$$\text{et dans } R_0(O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0) : \overrightarrow{O_1 P} = \begin{cases} a \cos \Psi(t) \\ b \sin \Psi(t) \\ c \end{cases}$$

$$\text{la somme des deux vecteurs nous donne le vecteur } \overrightarrow{O_0 P} \text{ dans } R_0 : \overrightarrow{O_0 P} = \begin{cases} a \cos \Psi(t) \\ b \sin \Psi(t) \\ c + \lambda \Psi(t) \end{cases}$$

La vitesse et l'accélération du point P dans le repère R_0 se déduisent facilement par dérivation dans le même repère :

$$\vec{V}(P) / R_0 = \frac{d\overrightarrow{O_0 P}}{dt} = \begin{cases} -a\dot{\Psi} \cdot \sin \Psi(t) \\ b\dot{\Psi} \cdot \cos \Psi(t) \\ \lambda \dot{\Psi}(t) \end{cases}$$

et

$$\vec{\gamma}(P) / R_0 = \frac{d\vec{V}(P)}{dt} = \begin{cases} -a\ddot{\Psi} \cdot \sin \Psi(t) - a\dot{\Psi}^2 \cos \Psi(t) \\ b\ddot{\Psi} \cdot \cos \Psi(t) - b\dot{\Psi}^2 \sin \Psi(t) \\ \lambda \ddot{\Psi}(t) \end{cases}$$

3.10. APPLICATIONS

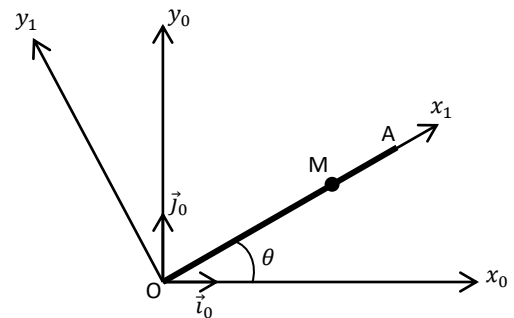
Exercice 1 :

Soit une barre (\mathbf{OA}) en rotation autour de \mathbf{z} avec une vitesse constante. $R_0(O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ étant le repère absolu et $R_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ le repère relatif. Le point \mathbf{M} glisse le long de la barre (\mathbf{OA}).

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = Cte$$

1- Vitesse absolue

$$\vec{V}_a(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} / R_0 = \frac{d\rho \vec{i}_1}{dt} / R_0 = \dot{\rho} \vec{i}_1 + \rho \frac{d\vec{i}_1}{dt} / R_0$$



$$\dot{\rho} \vec{i}_1 + \rho \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d\vec{i}_1}{d\theta} = \dot{\rho} \vec{i}_1 + \rho \dot{\theta} \cdot \vec{j}_1$$

$$\text{Donc : } \vec{V}_a(M) = \dot{\rho} \vec{i}_1 + \rho \dot{\theta} \cdot \vec{j}_1$$

2- Vitesse relative

$$\vec{V}_r(M) = \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \Big/_{R_1} = \frac{d\rho\vec{i}_1}{dt} \Big/_{R_1} = \dot{\rho}\vec{i}_1$$

Donc : $\vec{V}_r(M) = \dot{\rho}\vec{i}_1$

3- Vitesse d'entraînement

$$\vec{V}_e(M) = \vec{V}(O) + \overrightarrow{MO} \wedge \vec{\omega} = \vec{0} + (-\rho\vec{i}_1 \wedge \dot{\theta}\vec{k}) = -\rho\dot{\theta}(-\vec{j}_1)$$

$$\vec{V}_e(M) = \rho\dot{\theta}\vec{j}_1$$

Vérifions :

$$\vec{V}_a(M) = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M)$$

$$\dot{\rho}\vec{i}_1 + \rho\dot{\theta}\vec{j}_1 = \dot{\rho}\vec{i}_1 + \rho\dot{\theta}\vec{j}_1$$

4- $\vec{\gamma}_A(M) = ?$

$$\vec{V}_a(M) = \dot{\rho}\vec{i}_1 + \rho\dot{\theta}\vec{j}_1$$

$$\vec{\gamma}_A(M) = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \Big/_{R_0} = \frac{d\vec{V}_a(M)}{dt} \Big/_{R_0}$$

$$= \ddot{\rho}\vec{i}_1 + \dot{\rho}\frac{d\vec{i}_1}{dt} \Big/_{R_0} + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{j}_1 + \rho\ddot{\theta}\vec{j}_1 + \rho\dot{\theta}\frac{d\vec{j}_1}{dt} \Big/_{R_0}$$

$$= \ddot{\rho}\vec{i}_1 + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{j}_1 + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{j}_1 + \rho\ddot{\theta}\vec{j}_1 + \rho\dot{\theta}^2(-\vec{i}_1)$$

$$= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{i}_1 + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{j}_1$$

Or $\dot{\theta} = Cte \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$

$$\vec{\gamma}_A(M) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{i}_1 + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\vec{j}_1$$

$$\vec{\gamma}_r(M) = \frac{d\vec{V}_r(M)}{dt} \Big/_{R_1} \quad \text{tel que : } \vec{V}_r(M) = \dot{\rho} \vec{l}_1$$

Donc : $\vec{\gamma}_r(M) = \ddot{\rho} \vec{l}_1$

$$\vec{\gamma}_e(M) = \vec{\gamma}(O) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O_1M}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

$$= \vec{0} + \vec{\theta} \vec{k} \wedge (\dot{\theta} \vec{k} \wedge \rho \vec{l}_1) + \vec{0}$$

$$= \dot{\theta} \vec{k} \wedge \rho \dot{\theta} \vec{j}_1$$

$$\vec{\gamma}_e(M) = -\rho \dot{\theta}^2 \vec{l}_1$$

Exercice 2 :

On considère le système de pendule composé de deux tiges. Les deux tiges sont de longueurs identiques L. Le bâti (O) est lié au repère $R_0(O_0, \vec{l}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$.

La tige (1) est lié au repère $R_1(O_1, \vec{l}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$.

La tige (2) est lié au repère $R_2(O_2, \vec{l}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$.

- 1- Déterminer par la méthode de dérivation (méthode directe) :

$$\vec{V}_{A \in 1/0} ; \vec{V}_{B \in 2/1} ; \vec{\gamma}_{A \in 1/0} \text{ et } \vec{\gamma}_{B \in 2/0}.$$

- 2- Déterminer par la méthode de champ des vitesses :

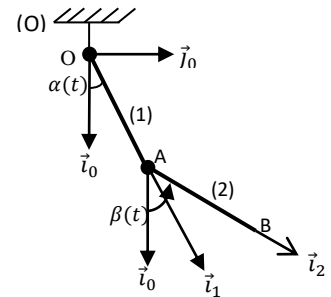
$$\vec{V}_{A \in 1/0} ; \vec{V}_{B \in 2/1}$$

- 3- Déterminer les torseurs cinématiques suivants :

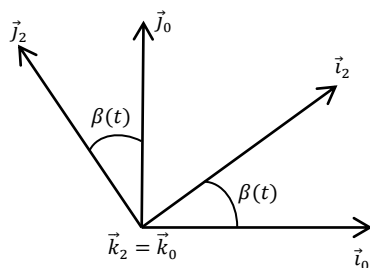
$$[C_{1/0}]_0 ; [C_{1/0}]_A ; [C_{2/1}]_A ; [C_{2/1}]_B$$

- 4- Déterminer par la méthode de composition de mouvement :

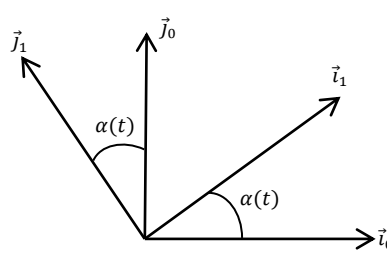
$$\vec{V}_{A \in 2/0} ; \vec{V}_{B \in 2/0}$$



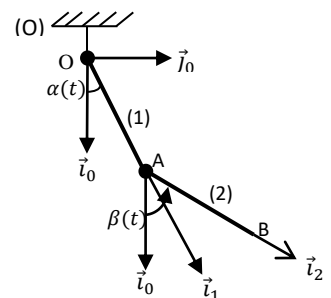
Solution de l'exercice 2 :



$$\vec{\Omega}_{2/0} = \dot{\beta}(t) \vec{k}_2 = \dot{\beta}(t) \vec{k}_0$$



$$\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\alpha}(t) \vec{k}_1 = \dot{\alpha}(t) \vec{k}_0$$



1- Par la méthode directe :

$$\bullet \quad \vec{V}_{A \in 1/0} = \frac{d\vec{OA}}{dt} \Big/_{R_0} = L \frac{d\vec{i}_1}{dt} \Big/_{R_0} = L \left[\frac{d\vec{i}_1}{dt} \Big/_{R_1} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{i}_1 \right] = L\dot{\alpha} \vec{k}_1 \wedge \vec{i}_1 = \mathbf{L}\dot{\alpha} \vec{j}_1$$

$$\bullet \quad \vec{V}_{B \in 2/1} = \frac{d\vec{OB}}{dt} \Big/_{R_1} = \frac{d\vec{OA}}{dt} \Big/_{R_1} + \frac{d\vec{AB}}{dt} \Big/_{R_1} = \vec{0} + L \frac{d\vec{i}_2}{dt} \Big/_{R_1}$$

$$L \frac{d\vec{i}_2}{dt} \Big/_{R_1} = L \frac{d\vec{i}_2}{dt} \Big/_{R_2} + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{i}_2$$

$$\text{Or } \vec{\Omega}_{2/1} = \vec{\Omega}_{2/0} - \vec{\Omega}_{1/0} = L(\dot{\beta} - \dot{\alpha}) \vec{k}_2$$

$$\vec{V}_{B \in 2/1} = L(\dot{\beta} - \dot{\alpha}) \vec{j}_2$$

$$\bullet \quad \vec{V}_{B \in 2/0} = \frac{d\vec{OB}}{dt} \Big/_{R_0} = \frac{d\vec{OA}}{dt} \Big/_{R_0} + \frac{d\vec{AB}}{dt} \Big/_{R_0} = L \frac{d\vec{i}_1}{dt} \Big/_{R_0} + L \frac{d\vec{i}_2}{dt} \Big/_{R_0}$$

$$L\dot{\alpha} \vec{j}_1 + L\dot{\beta} \vec{k}_2 \wedge \vec{i}_2 = L\dot{\alpha} \vec{j}_1 + L\dot{\beta} \vec{j}_2$$

Donc :

$$\vec{V}_{B \in 2/0} = L\dot{\alpha} \vec{j}_1 + L\dot{\beta} \vec{j}_2$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \vec{V}_{A \in 1/0} &= \frac{d\vec{V}_{A \in 1/0}}{dt} \Big/_{R_0} = \frac{dL\dot{\alpha} \vec{j}_1}{dt} \Big/_{R_0} = L\ddot{\alpha} \vec{j}_1 + L\dot{\alpha} \frac{d\vec{j}_1}{dt} \Big/_{R_0} \\ &= L\ddot{\alpha} \vec{j}_1 + L\dot{\alpha} (\vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{j}_1) = L\ddot{\alpha} \vec{j}_1 + L\dot{\alpha} (\dot{\alpha} \vec{k}_1 \wedge \vec{j}_1) = L\ddot{\alpha} \vec{j}_1 - L\dot{\alpha}^2 \vec{i}_1 \end{aligned}$$

$$\vec{V}_{A \in 1/0} = L\ddot{\alpha} \vec{j}_1 - L\dot{\alpha}^2 \vec{i}_1$$

=

$$\bullet \quad \vec{V}_{B \in 2/0} = \frac{d\vec{V}_{B \in 2/0}}{dt} \Big/_{R_0} = \frac{d(L\dot{\alpha} \vec{j}_1 + L\dot{\beta} \vec{j}_2)}{dt} \Big/_{R_0} = L\ddot{\alpha} \vec{j}_1 + L\ddot{\beta} \vec{j}_2 + L\dot{\alpha} \frac{d\vec{j}_1}{dt} \Big/_{R_0}$$

$$\vec{V}_{B \in 2/0} = \ddot{\alpha} \vec{j}_1 + L\ddot{\beta} \vec{j}_2 - L\dot{\alpha}^2 \vec{i}_1 - L\dot{\beta}^2 \vec{i}_2$$

2- Déterminer par la méthode des champs de vitesses :

$$\vec{V}_{A \in 1/0} ; \vec{V}_{B \in 2/1}$$

$$\bullet \quad \vec{V}_{A \in 1/0} = \vec{V}_{O \in 1/0} + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = \vec{0} - L\vec{i}_1 \wedge \dot{\alpha}\vec{k}_1 = L\dot{\alpha}\vec{j}_1$$

$$\vec{V}_{A \in 1/0} = L\dot{\alpha}\vec{j}_1$$

$$\bullet \quad \vec{V}_{B \in 2/1} = \vec{V}_{A \in 2/1} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}_{2/1} = \vec{0} - L\vec{j}_1 \wedge (\dot{\beta} - \dot{\alpha})\vec{k}_2$$

$$\vec{V}_{B \in 2/1} = L(\dot{\beta} - \dot{\alpha})\vec{j}_2$$

3- Déterminer les torseurs cinématiques suivants :

$$[C_{1/0}]_0 ; [C_{1/0}]_A ; [C_{2/1}]_A \text{ et } [C_{2/1}]_B$$

$$\bullet \quad [C_{1/0}]_0 = \begin{cases} \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\alpha}\vec{k}_0 \\ \vec{V}_{O \in 1/0} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\bullet \quad [C_{1/0}]_A = \begin{cases} \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\alpha}\vec{k}_0 \\ \vec{V}_{A \in 1/0} = L\dot{\alpha}\vec{j}_1 \end{cases}$$

$$\bullet \quad [C_{2/1}]_A = \begin{cases} \vec{\Omega}_{2/1} = (\dot{\beta} - \dot{\alpha})\vec{k}_0 \\ \vec{V}_{A \in 2/1} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\bullet \quad [C_{2/1}]_B = \begin{cases} \vec{\Omega}_{2/1} = (\dot{\beta} - \dot{\alpha})\vec{k}_0 \\ \vec{V}_{B \in 2/1} = L(\dot{\beta} - \dot{\alpha})\vec{j}_2 \end{cases}$$

4- Déterminer par la méthode de composition de mouvement :

$$\bullet \quad \vec{V}_{A \in 2/0} = \vec{V}_{A \in 2/1} + \vec{V}_{A \in 1/0} = \vec{V}_{A \in 1/0} = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} \Big|_{R_0} = L\dot{\alpha}\vec{j}_1$$

$$\bullet \quad \vec{V}_{B \in 2/0} = \vec{V}_{B \in 2/1} + \vec{V}_{B \in 1/0} \quad \text{et} \quad \vec{V}_{B \in 2/1} = L(\dot{\beta} - \dot{\alpha})\vec{j}_2$$

$$\vec{V}_{B \in 1/0} = \vec{V}_{O \in 1/0} + \overrightarrow{BO} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = -(L\vec{i}_1 + L\vec{i}_2) \wedge \dot{\alpha}\vec{k}_0$$

Donc :

$$\vec{V}_{B \in 2/0} = L\dot{\alpha}\vec{j}_1 + L\dot{\beta}\vec{j}_2$$

4.1. Introduction

La dynamique du corps solide est une branche de la mécanique qui s'intéresse à l'étude des mouvements des corps rigides sous l'influence de forces et de moments (ou couples). Contrairement à la dynamique des points matériels, où l'on considère des objets sans dimension, la dynamique du corps solide prend en compte les dimensions et la distribution de masse des objets. Les corps solides sont supposés indéformables, c'est-à-dire que la distance entre deux points quelconques du corps reste constante pendant le mouvement.

4.1.1. Concepts fondamentaux

- **Corps rigide** : Un corps rigide est un objet dont la forme et les dimensions restent inchangées sous l'action des forces appliquées. En pratique, les corps rigides sont une idéalisation, car tous les matériaux se déforment dans une certaine mesure, mais cette hypothèse est souvent suffisamment précise pour l'étude des mouvements.
- **Degrés de liberté** : Un corps rigide dans l'espace tridimensionnel possède six degrés de liberté, correspondant à trois translations (dans les directions x , y et z) et trois rotations (autour des axes x , y et z).

4.1.2. Types de mouvements d'un corps solide

- **Translation** : Le corps se déplace de manière telle que tous ses points suivent des trajectoires parallèles. La direction et la vitesse de tous les points du corps sont identiques.
- **Rotation autour d'un axe fixe** : Le corps tourne autour d'un axe fixe. Chaque point du corps suit une trajectoire circulaire autour de cet axe.
- **Mouvement général** : Une combinaison de translation et de rotation. Par exemple, le mouvement d'une roue de voiture en marche comporte à la fois une translation du centre de la roue et une rotation autour de cet axe.

4.2. Rappels sur les quantités dynamiques pour un point matériel

La dynamique des particules est régie par des principes basés sur les lois de Newton.

– Première loi de Newton (loi d'inertie)

Dans un repère absolu, une particule (**M**) de masse **m** totalement isolée reste au repos si elle est initialement au repos, ou bien est animée d'un mouvement de translation

rectiligne uniforme si elle était en mouvement. Cette particule possède **une quantité de mouvement** constante. On écrit :

$$\vec{p} = m \cdot \vec{V}_M$$

– **Deuxième loi de Newton (Relation fondamentale de la dynamique).**

Une particule (**M**) de masse **m** invariable est soumise à des actions de la part d'une autre particule. À l'instant **t**, ces actions sont représentées par le vecteur force \vec{F} s'exerçant sur cette particule. On écrit alors:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{V}_M)}{dt} = m \cdot \vec{\gamma}_M$$

Le vecteur force \vec{F} est la résultante de toutes les forces s'appliquant sur (**M**).

Remarque :

La loi de Newton définit les équations différentielles du mouvement.

$$\vec{F} = \sum \vec{f}_i = m \cdot \vec{\gamma}_M = m \cdot \frac{d\vec{V}_M}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\vec{F} = \sum \vec{f}_i = m \cdot \vec{\gamma}_M = \begin{cases} \vec{F}_x \\ \vec{F}_y \\ \vec{F}_z \end{cases} = m \cdot \begin{cases} \frac{d\vec{V}_x}{dt} \\ \frac{d\vec{V}_y}{dt} \\ \frac{d\vec{V}_z}{dt} \end{cases} = m \cdot \begin{cases} \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \\ \frac{d^2\vec{y}}{dt^2} \\ \frac{d^2\vec{z}}{dt^2} \end{cases}$$

– **Troisième loi de Newton (Action-Réaction)**

Quand deux corps s'interagissent, à partir du principe de la conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\Delta\vec{p}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta\vec{p}_2}{\Delta t} \Rightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \Rightarrow \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

\vec{F}_{12} Force appliquée par le corps 1 sur le corps 2.

\vec{F}_{21} Force appliquée par le corps 2 sur le corps 1.

4.3. Moment cinétique (Moment de la quantité de mouvement)

Le moment cinétique $\vec{\sigma}_A$ du point matériel M en un point A quelconque de l'espace est donné par le moment de la quantité de mouvement en A , il a pour grandeur :

$$\vec{\sigma}_A = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{V}_M$$

4.4. Quantité de mouvement d'un système matériel (S)

a) Système matériel discret :

Le système est constitué d'un ensemble de point M_i de masse m_i et de vitesses \vec{V}_{M_i} dans un repère $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- La résultante cinétique (Quantité de mouvement) du système est donnée par la relation suivante :

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{V}_{M_i}$$

- Le moment cinétique $\vec{\sigma}_A$ du système (S) d'un point matériel A quelconque de l'espace est donné par le moment de la quantité de mouvement en A , il a pour grandeur vectorielle :

$$\vec{\sigma}_A = \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{V}_{M_i}$$

b) Système matériel continu :

Dans le cas d'un système matériel continu (S) : linéaire, surfacique où volumique nous avons :

- **La résultante cinétique** (quantité de mouvement) du système matériel continu, est donnée par la grandeur vectorielle :

$$\vec{p} = \int_S \vec{V}_M dm$$

- Le moment cinétique $\vec{\sigma}_A$ du système (S) d'un point matériel A quelconque de l'espace est donné par le moment de la quantité de mouvement en A , il a pour grandeur vectorielle :

$$\vec{\sigma}_A = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_M dm$$

4.5. Torseur cinématique

Soit un solide (S) de masse m et de centre d'inertie G , en mouvement par rapport à un repère fixe $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit M un point de ce solide et deux points A et B quelconque de l'espace mais connus dans le repère R .

Par définition nous avons les moments cinétiques en A et B qui sont donnés par :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_A &= \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_M dm \quad \text{et} \quad \vec{\sigma}_B = \int_S \overrightarrow{BM} \wedge \vec{V}_M dm \\ \vec{\sigma}_A - \vec{\sigma}_B &= \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_M dm - \int_S \overrightarrow{BM} \wedge \vec{V}_M dm = \int_S (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM}) \wedge \vec{V}_M dm \\ &= \int_S \overrightarrow{AB} \wedge \vec{V}_M dm\end{aligned}$$

$$\vec{\sigma}_A - \vec{\sigma}_B = \overrightarrow{AB} \wedge \int_S \vec{V}_M dm$$

$$\vec{\sigma}_A - \vec{\sigma}_B = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{p}$$

Cette relation est appelée **loi de variation du moment cinétique**.

On constate que le moment cinétique obéit à la loi des transports des moments. Nous pouvons alors construire un torseur cinétique dont les éléments de réduction sont : la résultante cinétique et le moment cinétique.

$$[C]_A = \begin{cases} \vec{P} = \int_S \vec{V}_M dm \\ \vec{\sigma}_A = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_M dm \end{cases}$$

4.5.1. Expression de la résultante cinétique d'un système matériel

Soit un solide (S) de masse m et de centre d'inertie G , en mouvement par rapport à un repère orthonormé fixe $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Quel que soit $M \in (S)$ nous avons par définition du centre d'inertie :

$$\int_S \overrightarrow{GM} dm = \vec{0}$$

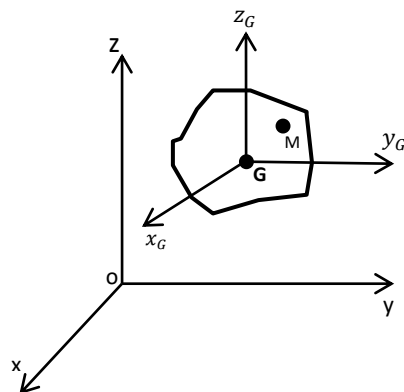


Figure 4.1 Résultante cinétique d'un système matériel

Les points G et M sont Mobiles dans le repère $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, nous pouvons écrire :

$\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OG}$ Leurs vitesses sont liées par la relation suivante :

$$\frac{d\overrightarrow{GM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} \Leftrightarrow \frac{d\overrightarrow{GM}}{dt} = \vec{V}_M - \vec{V}_G$$

En dérivant cette expression par rapport au temps sous le signe intégrale, on obtient :

$$\int_S \frac{d\overrightarrow{GM}}{dt} dm = \int_S (\vec{V}_M - \vec{V}_G) dm = \vec{0}$$

D'où : $\int_S \vec{V}_M dm = \int_S \vec{V}_G dm = m\vec{V}_G$ ce qui donne : $\vec{P} = m\vec{V}_G$

4.6. Energie cinétique

4.6.1. Définition

L'énergie cinétique d'un système matériel continu (S) en mouvement par rapport à un repère fixe R_0 est définie par la quantité scalaire exprimée par la relation :

$$E_C^0 = \int_S \frac{1}{2} (\vec{V}_M^0)^2 dm$$

4.6.2. Théorème de Koëinig relatif à l'énergie cinétique

Soit $R_0(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé fixe. Le référentiel de Koëinig (appelé aussi référentiel barycentrique) $R_G(G, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est le référentiel lié au centre d'inertie du solide dont les axes sont parallèles à ceux du repère fixe.

La vitesse du repère R_G par rapport au repère R_0 est nulle : $\vec{\Omega}_{R_G/R_0} = \vec{0}$

Nous allons chercher une relation entre :

- L'énergie cinétique du système dans son mouvement par rapport à R_0

Et

- L'énergie cinétique du système dans son mouvement par rapport à R_G

Soit M un point du système matériel. La loi de composition des vitesses donne :

$$\vec{V}_M^0 = \vec{V}_G^0 + \vec{V}_M^G$$

en remplaçant cette expression dans celle de l'énergie cinétique nous aurons :

$$E_C^0 = \int_S \frac{1}{2} (\vec{V}_G^0 + \vec{V}_M^G)^2 dm = \frac{1}{2} \int_S (\vec{V}_G^0)^2 dm + \int_S \vec{V}_G^0 \cdot \vec{V}_M^G dm + \frac{1}{2} \int_S (\vec{V}_M^G)^2 dm$$

Or nous avons : $\vec{V}_M^G = \frac{d\vec{GM}}{dt}$ dans le repère R_G .

Donc nous obtenons :

$$E_C^0 = \frac{1}{2} \int_S (\vec{V}_G^0)^2 dm + \vec{V}_G^0 \cdot \frac{d}{dt} \int_S \vec{GM} dm + \frac{1}{2} \int_S (\vec{V}_M^G)^2 dm$$

nous avons aussi par définition du centre d'inertie que : $\int_S \vec{GM} dm = 0$

L'expression de l'énergie cinétique devient :

$$E_C^0 = \frac{1}{2} (\vec{V}_G^0)^2 \int_S dm + \frac{1}{2} \int_S (\vec{V}_M^G)^2 dm$$

qui s'écrit aussi sous la forme réduite :

$$E_C^0 = \frac{1}{2} (\vec{V}_G^0)^2 \int_S dm + E_C^G$$

L'énergie cinétique du système (S) en mouvement quelconque par rapport au repère R_0 est égale à l'énergie cinétique du système dans son mouvement autour de son centre d'inertie G augmentée de l'énergie cinétique du centre d'inertie affecté de la masse totale du système.

4.7. Solide indéformable en mouvement quelconque

Soit $R_0(O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ un repère orthonormé fixe et $R_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ un repère lié à un solide indéformable et de centre de d'inertie G .

Le solide est en mouvement quelconque tel que $O \in (S)$. La vitesse de rotation du repère R_1 par rapport au repère R_0 est : $\vec{\Omega}_1^0$

Soit M un point quelconque du solide, nous avons par la cinématique du solide :

$$\vec{V}_M^0 = \vec{V}_{O_1}^0 + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{O_1M}$$

L'énergie cinétique du solide (S) est donnée par :

$$\begin{aligned}
 E_C^0 &= \frac{1}{2} \int_S (\vec{V}_M^0)^2 dm = \frac{1}{2} \int_S (\vec{V}_{O_1}^0 + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1 M})^2 dm \\
 E_C^0 &= \frac{1}{2} \int_S (\vec{V}_M^0) (\vec{V}_{O_1}^0 + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1 M}) dm \\
 &= (\vec{V}_{O_1}^0) \int_S \frac{1}{2} \cdot \vec{V}_M^0 dm + \int_S \frac{1}{2} \cdot \vec{V}_M^0 (\vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1 M}) dm \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (\vec{V}_{O_1}^0) \cdot m \cdot \vec{V}_G^0 + \vec{\Omega}_1^0 \cdot \int_S \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{O_1 M} \wedge \vec{V}_M^0
 \end{aligned}$$

L'expression du moment cinétique déjà développée auparavant est donnée par :

$$\vec{\sigma}_{O_1}^0 = \int_S \overrightarrow{O_1 M} \wedge \vec{V}_M^0 dm$$

Nous avons alors l'énergie cinétique en fonction du moment cinétique du solide:

$$E_C^0 = \frac{1}{2} \cdot (\vec{V}_{O_1}^0) \cdot m \cdot \vec{V}_G^0 + \vec{\Omega}_1^0 \cdot \vec{\sigma}_{O_1}^0$$

Si le centre O_1 du repère R_1 est confondu avec le centre d'inertie G du solide : $O_1 \equiv G$ alors :

$$E_C^0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\vec{V}_G^0)^2 + \vec{\Omega}_1^0 \cdot \vec{\sigma}_G^0$$

Le moment cinétique en G s'écrit : $\vec{\sigma}_G^0 = \mathbf{I}_G \cdot \vec{\Omega}_1^0$ on aboutit à la relation finale :

$$E_C^0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\vec{V}_G^0)^2 + \vec{\Omega}_1^{0T} \cdot \mathbf{I}_G \vec{\Omega}_1^0$$

$\frac{1}{2} \cdot m \cdot (\vec{V}_G^0)^2$: est l'énergie cinétique de translation du solide

$\vec{\Omega}_1^{0T} \cdot \mathbf{I}_G \vec{\Omega}_1^0$: est l'énergie cinétique de rotation du solide autour de son centre d'inertie G .

L'énergie cinétique totale d'un solide en mouvement quelconque dans l'espace est égale à la somme de l'énergie cinétique de translation de son centre d'inertie affectée de la masse du solide et de l'énergie cinétique de rotation autour du centre d'inertie.

L'énergie cinétique totale peut s'exprimer en fonction des torseurs cinématiques et cinétique au point en la mettant sous la forme :

$$E_C^0 = \begin{pmatrix} \vec{\Omega}_1^0 \\ \vec{V}_M^0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \cdot \vec{V}_G^0 \\ \vec{\sigma}_{O_1}^0 \end{pmatrix}$$

L'énergie cinétique totale d'un solide est égale à la moitié du produit scalaire du torseur cinématique par le torseur cinétique au point O_1 exprimé dans le repère R_0 .

$$E_C^0 = \frac{1}{2} [V]_{O_1} \cdot [C]_{O_1}$$

4.8. Théorèmes fondamentaux de la dynamique

4.8.1. Objectifs de la dynamique

La dynamique permet d'analyser les liens existant entre les mouvements d'un solide déjà décrits par la cinématique et les forces ou actions qui les provoquent. Nous introduirons la notion de torseur des efforts extérieurs, nécessaire à l'écriture du principe fondamental de la dynamique.

4.8.2. Notions de référentiels

Du principe fondamental de la dynamique et celui de l'action-réaction, nous pouvons établir les théorèmes généraux de la dynamique dans un référentiel Galiléen ou non Galiléen. En effet, un référentiel est dit Galiléen ou (absolu) si les **lois de Newton** exprimées dans celui-ci **sont valables**. Tout repère en mouvement de translation uniforme par rapport à un repère Galiléen est lui aussi Galiléen, car les accélérations constatées à partir d'un même point seront les mêmes dans les deux repères.

4.8.3. Expression de la loi fondamentale de la dynamique

Soit un système matériel (S) non isolé et soumis à des interactions dans un repère Galiléen $R_O(O, \vec{i}_O, \vec{j}_O, \vec{k}_O)$. Pour ce système matériel on distingue deux types d'actions :

- Les actions mécaniques intérieures, résultant des actions d'une partie de (S) sur une autre partie de (S) ; *ces actions sont appelées forces intérieures et notées : $d\vec{F}_i$*
- Les actions mécaniques extérieures résultant des actions du reste de l'univers (le milieu extérieur) sur (S), ces actions sont appelées forces extérieures et notées : $d\vec{F}_e$

Il faut choisir convenablement les conditions aux limites du système pour pouvoir classer les actions (forces) intérieures et extérieures.

En un point quelconque M du système (S), la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$d\vec{F}_e + d\vec{F}_i = \vec{\gamma}_M dm$$

dm : Élément de masse au voisinage du point M ;

$\vec{\gamma}_M$: accélération du point M ;

En sommant sur l'ensemble du système matériel, nous avons :

$$\int_S d\vec{F}_e + \int_S d\vec{F}_i = \int_S \vec{\gamma}_M dm$$

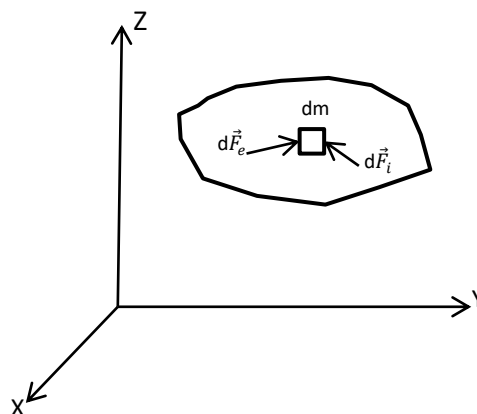


Figure 4.2 Actions intérieures et extérieures sur un système matériel.

En un point A quelconque de l'espace les moments, de ces forces, sont donnés par :

$$\int_S \overrightarrow{AP} \wedge d\vec{F}_e + \int_S \overrightarrow{AP} \wedge d\vec{F}_i = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\gamma}_M dm$$

Le système matériel (S), sa masse totale est constante.

Les actions mécaniques extérieures qui s'exercent sur (S) sont représentées par un torseur $[\tau_{F_{ext}}]$: appelé torseur des forces extérieures dont les éléments de réduction au point A sont :

$$[\tau_{F_{ext}}]_A = \begin{Bmatrix} \vec{F}_{ext} \\ M_{A_{ext}} \end{Bmatrix}$$

\vec{F}_{ext} : est la résultante des forces extérieures s'exerçant sur le système (S)

$M_{A_{ext}}$: est le moment au point A des forces extérieures s'exerçant sur le système (S).

Le principe fondamental de la dynamique montre que dans tout référentiel Galiléen, le torseur dynamique $[D]_A$ du système (S) est égal au torseur des forces extérieures $[\tau_{F_{ext}}]_A$ calculé au même point A .

Les éléments de réduction du torseur dynamique $[D]_A$ du système (S) dans le repère Galiléen $R_O(O, \vec{i}_O, \vec{j}_O, \vec{k}_O)$.

$$[D]_A = \begin{Bmatrix} \vec{D} \\ \vec{\delta}_A \end{Bmatrix}$$

\vec{D} : la résultante dynamique

$\vec{\delta}_A$: le moment dynamique au point A .

L'égalité des deux torseurs induit l'égalité de leurs éléments de réduction. Ce principe équivaut à la généralisation des lois de Newton. Les éléments des deux torseurs peuvent être calculés séparément et ensuite faire l'égalité des expressions obtenues.

Le point A par rapport auquel on calcul les moments est un point quelconque, il faut faire un choix judicieux pour faciliter l'écriture des équations. Souvent dans les problèmes de mécanique, on choisit le centre de masse du système car le moment d'inertie intervenant dans les calculs est plus facile à déterminer.

4.8.4. Théorème du moment dynamique

Soit un système matériel (S) en mouvement dans un repère Galiléen $R_0(O, \vec{i}_O, \vec{j}_O, \vec{k}_O)$ et soumis à des actions extérieures. *Le moment dynamique du système matériel (S) en un point A quelconque est égal au moment des actions (forces) mécaniques extérieures au même point A .*

$$\vec{\delta}_A(S/R_0) = \vec{M}_A(S/R_0)$$

Au centre d'inertie du système cette égalité s'écrirait :

$$\vec{\delta}_G(S/R_0) = \vec{M}_G(S/R_0) = \frac{d\vec{\sigma}_G(S/R_0)}{dt}$$

Comme nous l'avons déjà montré précédemment, le moment cinétique au point G centre d'inertie du système est indépendant du repère dans lequel il est mesuré, alors il est souvent plus simple d'effectuer le calcul des moments dynamiques au centre d'inertie des systèmes.

4.9. Théorème de l'énergie cinétique

Dans de nombreux cas, pour déterminer l'équation du mouvement d'un solide ou d'un système de solide, il est plus judicieux d'utiliser le théorème de l'énergie cinétique afin d'aboutir à la solution du problème mécanique.

De plus la dérivée de l'énergie cinétique est liée à la puissance des efforts intérieurs et extérieurs agissant sur le solide.

4.9.1. Travail et puissance d'une force

Soit un système discret composé de n particules M_i de masse m_i , mobiles dans un référentiel Galiléen $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit le vecteur position \vec{OM} dans le repère R de la particule M_i , son vecteur vitesse s'écrirait :

$$\vec{v}_{M_i} = \frac{d\vec{OM}_i}{dt} \Rightarrow d\vec{OM}_i = \vec{v}_{M_i} dt$$

$d\vec{OM}_i$: le vecteur déplacement élémentaire durant un temps dt

Si la particule M_i est soumise à une force \vec{F}_i , le travail élémentaire de cette force est égale à :

$$d\vec{W}_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{OM}_i$$

4.10. Applications

4.10.1. Cas de translation pure + rotation

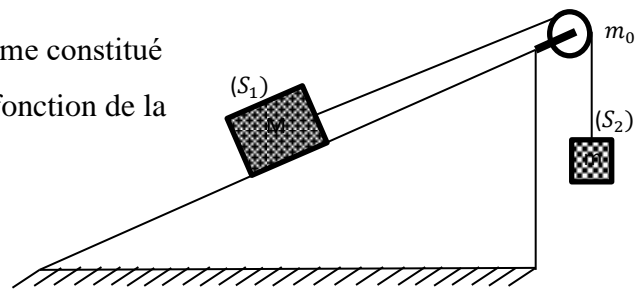
On rappelle que moment d'inertie d'un cylindre homogène de masse m_0 et de rayon R par rapport à son axe de révolution (Δ) est : $J_\Delta = \frac{1}{2}m_0r^2$

Considérons le système suivant constitué d'un treuil de masse m_0 , d'un solide (S_1) de masse M , d'un solide (S_2) de masse m et d'un câble inextensible et de masse négligeable entouré autour d'un treuil et portant à ses extrémités les solides (S_1) et (S_2).

On abandonne à l'instant initial le système sans vitesse initiale. Le solide (S_1) se déplace sans frottement le long de la ligne de plus grande pente du plan incliné qui fait un angle $\alpha = 30^\circ$ avec l'horizontale.

On donne : $M=3\text{Kg}$; $m=2\text{Kg}$; $g=10\text{m/s}^{-2}$

- 1- Exprimer l'énergie cinétique du système constitué par (S_1), (S_2), le treuil et le câble en fonction de la vitesse V des solides (S_1) et (S_2).



- 2- En appliquant le théorème de l'énergie cinétique que l'on énoncera,
Donner l'expression de la vitesse V en fonction de g , des différentes masses,
De l'angle α et de h la hauteur de chute de (S_2).

Solution de l'exercice 1 :

1- Expression de l'énergie cinétique du système ((S_1) + (S_2) + le treuil + le câble)

$$E_c = E_c(S_1) + E_c(S_2) + E_c(\text{treuil})$$

$$E_c = \frac{1}{2}M.V_1^2 + \frac{1}{2}m.V_2^2 + \frac{1}{2}J_\Delta.\omega^2$$

$$\text{Or } V_1 = V_2 = V \quad \text{et} \quad \omega = \frac{V}{r}$$

On peut écrire donc :

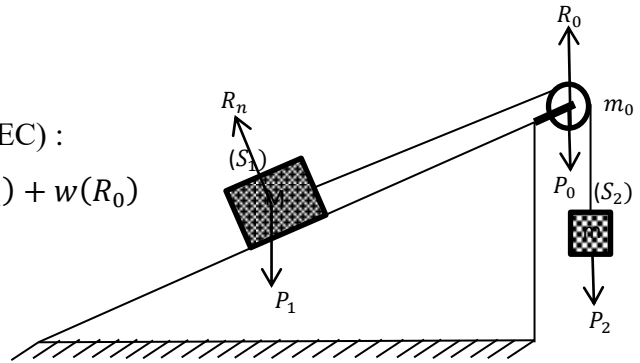
$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2}M.V_1^2 + \frac{1}{2}m.V_2^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}m_0r^2\right) \cdot \left(\frac{V}{r}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(M + m + \frac{m_0}{2}\right)V^2 \end{aligned}$$

2- Expression de V en fonction de h

Bilan des forces : \vec{P}_1 ; \vec{P}_2 ; \vec{R}_n ; \vec{P}_0 et \vec{R}_0

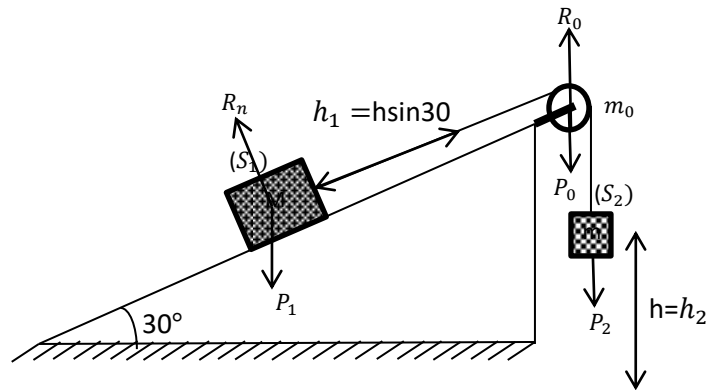
D'après le théorème de l'énergie cinétique (TEC) :

$$E_c - E_{c0} = w(P_1) + w(P_2) + w(P_0) + w(R_n) + w(R_0)$$



$$E_c - 0 = w(P_1) + w(P_2) + 0 + 0 + 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \left(M + m + \frac{m_0}{2} \right) V^2 = -Mg h_1 + mgh_2$$



$$\frac{1}{2} \left(M + m + \frac{m_0}{2} \right) V^2 = -Mg h \sin 30 + mgh$$

$$\frac{1}{2} \left(M + m + \frac{m_0}{2} \right) V^2 = gh(m - M \sin 30)$$

$$\left(M + m + \frac{m_0}{2} \right) V^2 = 2g(m - M \sin 30)h$$

$$V = \sqrt{\frac{2g(m - M \sin 30)}{M + m + \frac{m_0}{2}}} \cdot h$$

3- Expression de l'accélération (a) du système

$$V^2 = \frac{2g(m - M \sin 30)}{M + m + \frac{m_0}{2}} \cdot h$$

Posons $x=h$

$$V^2 = \frac{2g(m - M \sin 30)}{M + m + \frac{m_0}{2}} \cdot x$$

$$\frac{d(V^2)}{dt} = \frac{d\left[\frac{2g(m - M\sin 30)}{M + m + \frac{m_0}{2}} \cdot x\right]}{dt}$$

$$\Leftrightarrow 2 \frac{dV}{dt} V = \frac{2g(m - M\sin 30)}{M + m + \frac{m_0}{2}} \frac{dx}{dt}$$

$$a \cdot V = \frac{g(m - M\sin 30)}{M + m + \frac{m_0}{2}} \cdot V \quad \Leftrightarrow \text{Donc : } a = \frac{g(m - M\sin 30)}{M + m + \frac{m_0}{2}}$$

5.1. Introduction

La **géométrie des masses** est un concept fondamental dans la mécanique, et elle concerne la manière dont la masse d'un système matériel est répartie dans l'espace. Cette distribution influence les propriétés mécaniques d'un objet, notamment son centre de masse, son moment d'inertie, et sa dynamique dans des mouvements complexes.

La masse d'un système peut être définie de deux manières, en fonction de la nature du système matériel : **discret** ou **continu**. Voici une distinction claire entre ces deux concepts.

5.2. Masse d'un système discret

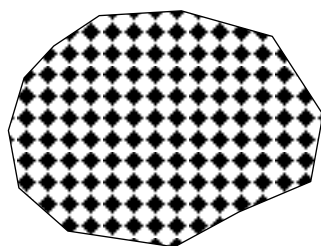
Dans un **système discret**, la masse est répartie en un nombre fini de points. Chaque point possède une masse distincte et se trouve à une position spécifique dans l'espace. Ce type de système est souvent utilisé pour modéliser des objets composés de particules distinctes ou des assemblages de masses.

Formule pour la masse d'un système discret :

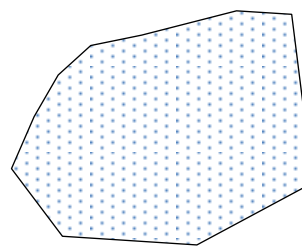
La masse totale **M** d'un système discret composé de n points de masse est simplement la somme des masses individuelles m_i :

$$M = \sum_{i=1}^n m_i$$

chaque m_i représente la masse d'un élément discret (par exemple, une particule ou un objet).



(a) Système discret



(b) Système continu

Figure 5.1 Système discret et système continu.

5.3. Masse d'un système continu

Un **système continu**, quant à lui, correspond à un objet ou une distribution de masse qui est étendue sur une région de l'espace de manière continue. Au lieu d'être divisée en

particules discrètes, la masse est distribuée de manière uniforme ou non uniforme à travers l'objet.

Formule pour la masse d'un système continu :

La masse totale \mathbf{M} est calculée à l'aide d'une intégrale, qui prend en compte la densité $\rho(\mathbf{x})$ de la matière en chaque point de l'espace. Selon la dimension du système (ligne, surface, volume), l'intégrale est différente :

- Pour une ligne : $\int_L \rho(x)dx$

où $\rho(x)$ est la densité linéique (masse par unité de longueur) le long de la ligne L .

- Pour une surface : $\int_A \rho(x,y)dA$

où $\rho(x,y)$ est la densité surfacique (masse par unité de surface), et dA est l'élément de surface.

- Pour un volume : $\int_V \rho(x,y,z)dV$

où $\rho(x,y,z)$ est la densité volumique (masse par unité de volume), et dV est l'élément de volume.

Exemple :

Considérons une tige de longueur L , avec une densité de masse linéique uniforme

$$\rho = 2Kg/m. \text{ La masse totale de la tige serait : } \int_0^L 2dx = 2L Kg$$

5.4. Formulation intégrale du centre de masse.

Le **centre de masse** (\mathbf{G}) d'un objet est le point où l'on peut considérer que toute la masse de l'objet est concentrée pour simplifier les calculs de dynamique. Sa position dépend de la répartition de la masse dans l'espace et peut être calculée de manière différente pour les systèmes discrets et continus.

5.4.1. Centre de masse d'un système discret

Pour un système discret constitué de plusieurs particules de masse \mathbf{m}_i situées à des positions r_i , la position du centre de masse \mathbf{G} est donnée par :

$$\mathbf{G} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Où :

m_i : La masse de la $i^{\text{ème}}$ particule

\mathbf{r}_i : La position de la $i^{\text{ème}}$ particule

n : Le nombre de particules.

5.4.2. Formulation intégrale pour un système continu.

Pour un système continu, la masse est distribuée de façon uniforme ou non sur une ligne, une surface, ou un volume. Le centre de masse est alors calculé à l'aide d'intégrales prenant en compte la distribution de la masse (via la densité) dans l'espace.

a. Centre de masse d'une ligne (distribution unidimensionnelle)

Pour une distribution continue de masse le long d'une ligne \mathbf{L} , avec une densité linéique de masse $\lambda(\mathbf{x})$, la position du centre de masse \mathbf{x}_{CM} est donnée par :

$$x_G = \frac{\int_L x \lambda(x) dx}{\int_L \lambda(x) dx}$$

b. Centre de masse d'une surface (distribution bidimensionnelle)

Pour une distribution de masse sur une surface \mathbf{S} , avec une densité centre de masse sont calculées par : surfacique $\sigma(x, y)$, les coordonnées (x_G, y_G) du

$$x_G = \frac{\int_S x \sigma(x, y) dA}{\int_S \sigma(x, y) dA}$$

$$y_G = \frac{\int_S y \sigma(x, y) dA}{\int_S \sigma(x, y) dA}$$

Où dA est l'élément de surface différentielle.

c. Centre de masse d'un volume (distribution tridimensionnelle)

Pour une distribution de masse dans un volume V , avec une densité volumique $\rho(x, y, z)$, les coordonnées du centre de masse (x_G, y_G, z_G) sont données par les équations :

$$x_G = \frac{\int_V x \rho(x, y, z) dV}{\int_V \rho(x, y, z) dV}$$

$$y_G = \frac{\int_S y \rho(x, y, z) dV}{\int_S \rho(x, y, z) dV}$$

$$z_G = \frac{\int_S z \rho(x, y, z) dV}{\int_S \rho(x, y, z) dV}$$

Où dV est l'élément de volume différentiel.

5.4.3. Formulation discrète du centre de masse (centre d'inertie)

La **formulation discrète du centre de masse** concerne un système constitué d'un nombre fini de masses ponctuelles situées à des positions spécifiques. Contrairement à un système continu, où la masse est répartie de manière uniforme ou non uniforme sur une région, un système discret considère un ensemble de particules ou objets ayant des masses distinctes.

Pour un **système discret** tridimensionnel composé de plusieurs masses ponctuelles m_1, m_2, \dots, m_n situées à des positions r_1, r_2, \dots, r_n , la position du centre de masse (centre d'inertie) est donné par les expressions suivantes :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$z_G = \frac{\sum_{i=1}^n z_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

x_i, y_i, z_i : sont les coordonnées de l'élément de masse m_i

x_G, y_G, z_G : Les coordonnées du système composé.

5.5. Théorème de GULDIN

Le **théorème de Guldin** (ou **théorème de Pappus-Guldin**) est un ensemble de deux théorèmes de géométrie qui permettent de calculer l'aire et le volume d'un solide de révolution. Ces théorèmes sont particulièrement utiles en mécanique et en ingénierie pour déterminer des grandeurs comme les volumes et les surfaces de solides obtenus par la rotation d'une courbe ou d'une surface autour d'un axe.

5.5.1. Premier Théorème de GULDIN

La surface S engendrée par la rotation d'un arc de courbe de longueur L autour d'un axe (Δ) sans l'intercepter dans son plan est égale au produit de la longueur L de l'arc par la longueur de la circonférence $2\pi R_G$ décrite par le centre d'inertie G de l'arc de courbe.

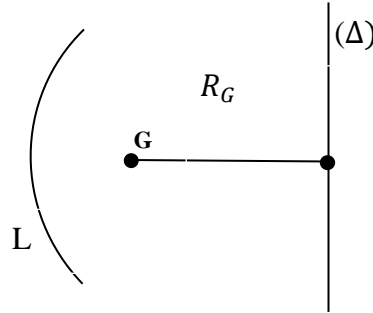


Figure 5.2 Centre d'inertie d'une courbe plane.

La longueur (périmètre) décrite par la rotation du centre d'inertie G par rapport à l'axe (Δ) est donnée par : $2\pi R_G$, alors la surface décrite par cet élément est égale à :

$$S_{/\Delta} = 2\pi R_G L \quad \text{d'où :} \quad R_G = \frac{S_{/\Delta}}{2\pi L}$$

Dans le cas d'un système homogène de plusieurs éléments on aura : $R_G = \frac{S_{totale/\Delta}}{2\pi L_{totale}}$

si l'axe (Δ) représente l'axe (O, \vec{y}) nous aurons : $x_G = \frac{S_{/oy}}{2\pi L}$

si l'axe (Δ) représente l'axe (O, \vec{x}) nous aurons : $y_G = \frac{S_{/ox}}{2\pi L}$

5.5.2. Deuxième Théorème de GULDIN

Le volume d'un solide de révolution généré par la rotation d'une surface plane S autour d'un axe extérieur à cette surface est égal à l'aire de la surface multipliée par la distance parcourue par le centre de gravité de la surface.

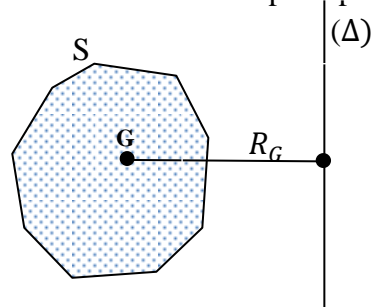


Figure 5.3 Centre d'inertie d'une surface plane.

Si A est l'aire de la surface S , et si : $2.\pi.R_G$ est la distance parcourue par le centre de masse de la surface lors de la rotation, alors le volume V du solide de révolution est donné par

$$: V_{/\Delta} = 2.\pi.R_G.S \quad \text{d'où} \quad R_G = \frac{V_{/\Delta}}{2.\pi.S}$$

Dans le cas d'un système homogène de plusieurs éléments on aura : $R_G = \frac{V_{totale/\Delta}}{2.\pi.S_{totale}}$

si l'axe (Δ) représente l'axe (O, \vec{y}) nous aurons : $x_G = \frac{V_{/oy}}{2.\pi.S}$

si l'axe (Δ) représente l'axe (O, \vec{x}) nous aurons : $y_G = \frac{V_{/ox}}{2.\pi.S}$

5.6. Moment d'inertie

Soit un solide de masse dm lié à une tige (AA') de masse négligeable, en rotation autour d'un axe (Δ) . Si on applique un couple au système (tige + masse), il se mettra à tourner librement autour de l'axe (Δ) . Le temps nécessaire à cet élément de masse dm pour atteindre une vitesse de rotation donnée est proportionnel à la masse dm et au carré de la distance r qui sépare la masse de l'axe (Δ) . C'est pour cette raison que le produit $r^2 \cdot dm$ est appelé moment d'inertie de la masse dm par rapport à l'axe (Δ) .

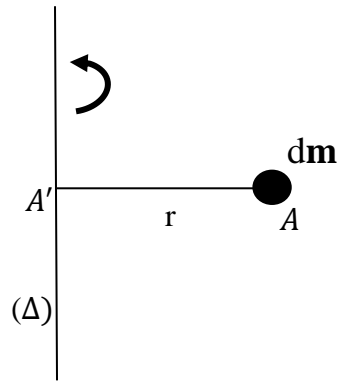


Figure 5.4 Moment d'inertie par rapport à un axe.

Soit un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et un solide (S) tel que $O \in (S)$. Le moment d'inertie de ce solide par rapport au point O (Moment polaire) est obtenu en intégrant la relation $r^2 \cdot dm$.

$$I_O = \int_{(S)} r^2 dm$$

Nous avons : $r^2 = OP^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Le solide peut être linéaire, surfacique ou volumique.

L'élément d'intégration $dm(P)$ est situé en un point P du solide.

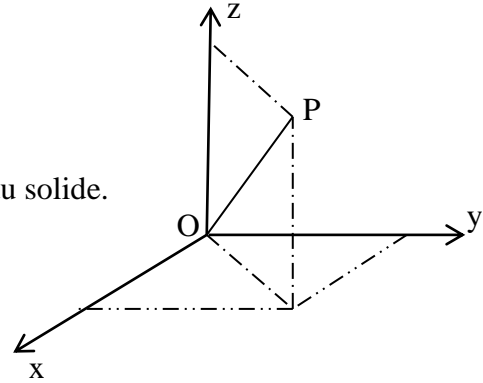


Figure 5.5 Moments d'inertie par rapport aux axes et aux plans.

Le tenseur d'inertie du solide au point O est représenté dans la base $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par une matrice notée: appelée matrice d'inertie en O dans la base $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ du solide (S) :

$$I_{O(S)/R} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Les éléments de la matrice s'écrivent comme suit :

- Moment d'inertie par rapport à l'axe (Ox) : $I_{xx} = \int_{(S)} (y^2 + z^2) dm$
- Moment d'inertie par rapport à l'axe (Oy) : $I_{yy} = \int_{(S)} (x^2 + z^2) dm$
- Moment d'inertie par rapport à l'axe (Oz) : $I_{zz} = \int_{(S)} (x^2 + y^2) dm$
- Moment d'inertie par rapport au plan (Oxy) où produit d'inertie : $I_{xy} = \int_S x \cdot y dm$
- Moment d'inertie par rapport au plan (Oxz) où produit d'inertie : $I_{xz} = \int_S x \cdot z dm$
- Moment d'inertie par rapport au plan (Oyz) où produit d'inertie : $I_{yz} = \int_S y \cdot z dm$

Remarque : Lorsque des solides admettant *des plans de symétrie* par rapport aux axes du repère choisi. Pour chaque plan de symétrie, les produits d'inertie sur les deux autres plans sont nuls :

$$(xOy) \text{ plan de symétrie } \implies I_{xz} = \int_S x \cdot z = 0 \text{ et } I_{yz} = \int_S y \cdot z dm = 0$$

$$(yOz) \text{ plan de symétrie } \implies I_{xz} = \int_S x \cdot z = 0 \text{ et } I_{xy} = \int_S x \cdot y dm = 0$$

$$(xOz) \text{ plan de symétrie } \implies I_{yz} = \int_S y \cdot z dm = 0 \text{ et } I_{xy} = \int_S x \cdot y dm = 0$$

5.6.1. Solides plans.

Dans le cas des solides plans, l'une des coordonnées de l'élément, dm est *nulle*. Si le solide est dans le plan (xOy) alors $= 0$.

On déduit immédiatement que :

$$I_{xx} = \int_{(S)} y^2 \cdot dm$$

$$I_{yy} = \int_{(S)} x^2 \cdot dm$$

D'où :

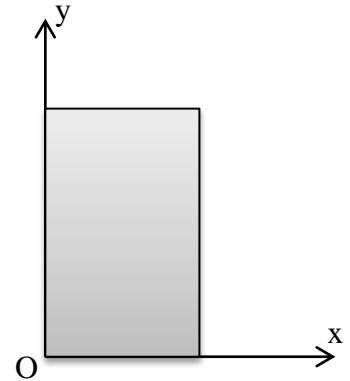


Figure 5.6 Moment d'inertie d'un solide plan.

$$I_{zz} = \int_{(S)} (x^2 + y^2) dm = I_{xx} + I_{yy}$$

$$I_{xy} = \int_S x \cdot y dm \text{ Avec : } I_{yz} = I_{xz} = 0$$

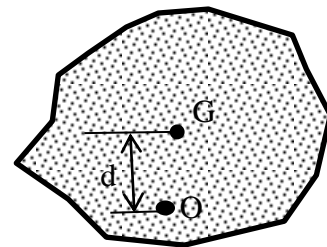
5.7. Théorème de HUYGENS

Le théorème de Huygens stipule que le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe quelconque est égal à la somme du moment d'inertie par rapport à un axe parallèle passant par le centre de masse et du produit de la masse du solide par le carré de la distance entre les deux axes.

Autrement dit, si :

- I_G est le moment d'inertie par rapport à l'axe passant par le centre de masse G ,
- d est la distance entre l'axe passant par le centre de masse et l'axe décalé,
- m est la masse totale du solide.

$$I_o = I_G + m \cdot d^2$$



D'une manière générale :

Figure 5.7 Théorème de HUYGENS par rapport à un axe.

$$I_{Ox_0x_0} = I_{GXX} + m(y_G^2 + z_G^2)$$

$$I_{Oy_0y_0} = I_{GYY} + m(x_G^2 + z_G^2)$$

$$I_{Oz_0z_0} = I_{GZZ} + m(x_G^2 + y_G^2)$$

Et les produits d'inertie sont :

$$I_{Ox_0y_0} = I_{GXY} + m.x_G.y_G$$

$$I_{Ox_0z_0} = I_{GXZ} + m.x_G.z_G$$

$$I_{Oy_0z_0} = I_{GYZ} + m.y_G.z_G$$

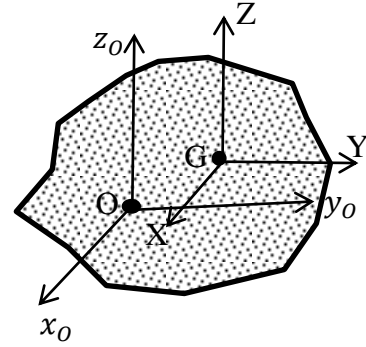


Figure 5.8 Théorème de HUYGENS général

5.8. Applications

Exercice 1:

Déterminer le moment d'inertie au point O de la plaque mince rectangulaire de masse m , de longueur $2a$ et de largeur $2b$ de centre d'inertie $G(a, b, 0)$.

En appliquant le théorème de HUYGENS, nous obtenons :

$$I_{Ox_0x_0} = I_{GXX} + m(y_G^2 + z_G^2) = m \frac{b^2}{3} + m.b^2$$

$$I_{Oy_0y_0} = I_{GYY} + m(x_G^2 + z_G^2) = m.\frac{a^2}{3} + m.a^2$$

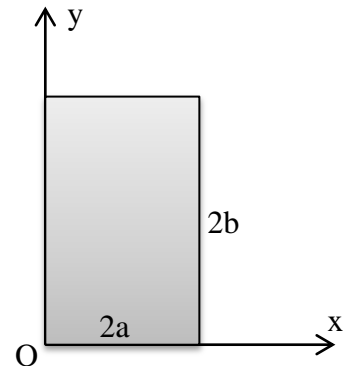
$$I_{Oz_0z_0} = I_{GZZ} + m(x_G^2 + y_G^2) = m\left(\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3}\right) + m.(a^2 + b^2) = \frac{4}{3}m.(a^2 + b^2)$$

Les produits d'inertie sont :

$$I_{Ox_0y_0} = I_{GXY} + m.x_G.y_G = 0 + m.ab = m.ab$$

$$I_{Ox_0z_0} = I_{GXZ} + m.x_G.z_G = 0 + m.a.0 = 0$$

$$I_{Oy_0z_0} = I_{GYZ} + m.y_G.z_G = 0 + m.b.0 = 0$$



Exercice 2 :

Déterminer le moment d'inertie au point G centre d'inertie d'une plaque mince rectangulaire de masse m , de longueur $2a$ et de largeur $2b$ et de coordonnées $G(a, b, 0)$.

Les plans (xGz) et (yGz) sont des plans de symétrie, alors tous les produits d'inertie sont nuls

$I_{Gxy} = I_{Gxz} = I_{Gyz} = 0$; la matrice d'inertie en G est diagonale.

Masse de la plaque : $m = \sigma \cdot S = \sigma \cdot 4ab$

Nous avons un solide plan : $z = 0$ donc $I_{Gzz} = I_{Gxx} + I_{Gyy}$

$$I_{Gxx} = \int_S y^2 dm = \int_S y^2 \sigma dS = \int_S y^2 \sigma dx dy = \sigma \int_{-a}^{+a} dx \int_{-b}^{+b} y^2 dy = \sigma 2a \cdot \frac{2}{3} b b^2 = \sigma \cdot m \frac{b^2}{3}$$

$$I_{Gyy} = \int_S x^2 dm = \int_S x^2 \sigma dS = \int_S x^2 \sigma dx dy = \sigma \int_{-a}^{+a} x^2 dx \int_{-b}^{+b} dy = \sigma \cdot \frac{2}{3} a a^2 \cdot 2b = \sigma \cdot m \frac{a^2}{3}$$

$$I_{Gzz} = I_{Gxx} + I_{Gyy} = \sigma \cdot m \left(\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3} \right)$$

La masse d'inertie au point G s'écrit :

$$I_G(S) = \begin{bmatrix} m \frac{b^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & m \frac{a^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & m \left(\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3} \right) \end{bmatrix}$$

Bibliographie

- A. KADI. Mécanique rationnelle, Cours & exercices résolus, Université de BOUMERDES,
- T. HANI. Mécanique générale, Exercices et problèmes résolus avec rappels de cours, Office des publications universitaires, 1983, 386p.
- Ferdinand. P. BEER, Mécanique à usage des ingénieurs, Statique, Edition Russell.
- M. BOURICH. Cours de Mécanique des Systèmes de Solides Indéformables. 2^{ème} édition 2014.
- Yves BERTHAUD. Notes de cours « Mécanique des solides rigides, (UPMC), 2006.
- TARG. S. Eléments de Mécanique Rationnelle, Edition Mir, Moscou, 1966, 479p.
- Muray R. SPIEGEL. Mécanique générale – Théorie et applications, Editions série schaum, 367p.
- A. KASSOUL. Polycopié Physique 4 : Mécanique Rationnelle COURS et EXERCICES, 2009.
- M. BOURICH. Cours de Mécanique des Systèmes de Solides Indéformables. 2^{ème} édition 2014.
- STARJINSKI, "Mécanique rationnelle", Editions Mir (Moscou), 479p.
- TOUT LE MONDE, " Notions de mécanique statique et de résistance des matériaux", Tome 1, Editions TECHNIP, 402p.