

Chapitre I

Corps des nombres réels

I.1 Définition axiomatique des nombres réels.

Le Corps des réels est un ensemble $\mathbb{R}$ dans lequel sont définies les deux lois de composition internes suivantes:

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto x + y \quad \text{et} \quad (x, y) \longmapsto x \cdot y$$

1.1 Inégalités dans $\mathbb{R}$

Déf 1 (Relation de Comparaison $\leq$)

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $\leq$ par
 $x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \iff y - x \in \mathbb{R}_+$.

On peut définir sur $\mathbb{R}$ de la même manière les relations $<, \geq$ et $>$.

Pour la relation $\leq$ on a les propriétés suivantes

a) Soient x, y, α trois réels, alors :

1) si $x \leq y \Rightarrow x + \alpha \leq y + \alpha$

2) si $x \leq y$ et $\alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha x \leq \alpha y$

3) si $x \leq y$ et $\alpha \leq 0 \Rightarrow \alpha x \geq \alpha y$.

b) Soient $x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors

1) si $x \leq y$ et $\alpha \leq \beta \Rightarrow x + \alpha \leq y + \beta$

2) si $0 \leq x \leq y$ et $0 \leq \alpha \leq \beta \Rightarrow x\alpha \leq y\beta$

I.2 parties bornées de $\mathbb{R}$

Déf 2 (Majorant et Minorant d'une partie de $\mathbb{R}$)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$, ($A \neq \emptyset$).

• Un majorant de A est un réel M tel que

$$\forall x \in A, x \leq M$$

- Un minorant de A est un réel m tel que

$$\forall x \in A, x \geq m$$

Déf 3 (Partie majorée, minorée et bornée)

Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. On dit que A est :

- majorée si A possède au moins un majorant
- minorée si A possède au moins un minorant
- bornée si A est à la fois majorée et minorée

Exemple

$A = [0, 5]$, $\forall x \in A, 0 \leq x \leq 5$.

Donc A est bornée car elle est majorée par 5 et minorée par 0

Rq: Le majorant et le minorant d'une partie A de $\mathbb{R}$ ne sont pas uniques.

Pour la partie $A = [0, 5]$ on a :

$]-\infty, 0]$ est l'ensemble des minorants de A

$[5, +\infty[$ est l'ensemble des majorants de A

Déf 4 (Maximum et minimum)

Soit $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$,

- Un maximum de A (ou plus grand élément de A) est un majorant de A qui est dans A . C'est à dire un élément $M \in A$ tel que $\forall x \in A, x \leq M$
- Un minimum de A (ou plus petit élément de A) est un minorant de A qui est dans A . C'est à dire un élément $m \in A$ tel que : $\forall x \in A, x \geq m$

Rq: Si un maximum ou un minimum existe pour $A \subset \mathbb{R}$, il est unique. Le maximum de A est noté $\text{Max}(A)$, le minimum de A est noté $\text{Min}(A)$.

Exemple $A = [0, 4[$, $\forall x \in A$ $0 \leq x < 4$
 0 est le plus petit élément et $0 \in A$,
alors $\text{Min}(A) = 0$. $\text{Max}(A)$ n'existe pas
Car $4 \notin A$ (4 est le plus grand élément)

Déf 5 (Borne sup et Borne inf)

Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ et bornée.

- L'ensemble des majorants de A admet un ~~peu~~ plus petit élément M , appelé borne supérieure de A
- L'ensemble des mineurs de A admet un plus grand élément m , appelé borne inférieure de A
- Comme notation: La borne supérieure de A est notée $\text{sup}(A)$ et la borne inférieure de A est notée $\text{Inf}(A)$

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et bornée

$$M = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A: x \leq M \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A / \\ M - \varepsilon < x \end{cases}$$

qui signifie que $M - \varepsilon$ n'est un majorant de A

$$m = \inf(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x > m \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A / \\ x < m + \varepsilon \end{cases}$$

qui signifie que $m + \varepsilon$ n'est pas un minorant de A .

Exemple

$$A = [-3, 3]$$

$\forall x \in A, -3 \leq x \leq 3 \Rightarrow A$ est bornée

L'ensemble des majorants de A est $[3, +\infty[$

L'ensemble des mineurs de A est $] -\infty, -3]$

$\min(A) = -3, \max(A) = 3, \inf(A) = -3$
et $\sup(A) = 3$

Rq: $\sup(A)$ et $\inf(A)$ s'ils existent, ils sont uniques.

si $\sup(A) \in A$, alors $\max(A) = \sup(A)$

sinon $\max(A)$ n'existe pas.

si $\inf(A) \in A$, alors $\min(A) = \inf(A)$

sinon $\min(A)$ n'existe pas.

Exemple $A = \{4 - \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}^*\}$

Comme $n \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow$

$-1 \leq -\frac{1}{n} < 0 \Rightarrow 3 \leq 4 - \frac{1}{n} < 4$. Donc

$\forall x \in A, 3 \leq x < 4$, alors A est bornée,

de plus les majorants de A sont $[4, +\infty[$,

les mineurs de A sont $] -\infty, 3]$

$\inf(A) = 3$ (plus grand des mineurs)

$\sup(A) = 4$ (plus petit des majorants)

Comme $\begin{cases} 3 \in A, \text{ alors } \min(A) = 3 \\ 4 \in A, \text{ alors } \max(A) = 4 \end{cases}$

I.2.1 propriétés sup et inf.

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$

- 1) Si $A \subset B$ et B est bornée, alors A est bornée et on a:

$$\inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)$$

- 2) Si A et B sont bornées alors :

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$$

$$\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$$

$$\sup(A \cap B) \leq \min(\sup(A), \sup(B))$$

$$\inf(A \cap B) \geq \max(\inf(A), \inf(B))$$

$$\sup(-A) = -\inf(A) \text{ avec } -A = \{-x, x \in A\}$$

Preuve de 1: B est bornée $\Rightarrow \forall x \in B$

$\inf(B) \leq x \leq \sup(B)$. Comme $A \subset B \Rightarrow$

$\forall x \in A, x \in B$ donc $\forall x \in A, \inf(B) \leq x \leq \sup(B)$

$\inf(B) \leq x \leq \sup(B) \Rightarrow A$ est bornée.

• $\forall x \in A, x \leq \sup(B) \Rightarrow \sup(B)$ est un majorant de $A \Rightarrow \sup(A) \leq \sup(B)$

• $\forall x \in \inf(B) \leq x \Rightarrow \inf(B)$ est un minorant de $A \Rightarrow \inf(A) \geq \inf(B)$, et on

$$\boxed{\inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)}$$

I.3 Intervalles de $\mathbb{R}$ (En plus) ~~xxx~~

Déf 6 (Intervalle) Un intervalle de $\mathbb{R}$ est une partie I de $\mathbb{R}$ / $\forall a, b \in I$,
 $\forall x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b \Rightarrow x \in I$.

$\emptyset$, $\{a\}$, $a \in \mathbb{R}$ sont des cas particuliers
tout intervalle I différent de $\emptyset$
et singleton $\{a\}$, $a \in \mathbb{R}$ est appelé
intervalle non triviale

soient a, b deux réels, alors

$I = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$ intervalle
Borné et fermé

$I =]a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$ intervalle
Borné et ouvert

On peut avoir d'autres comme :

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$

$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < +\infty\}$

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$

$] -\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} / -\infty < x \leq b\}$

$] -\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

I.4 valeur absolue

Déf 7 ($|x|$, $x \in \mathbb{R}$)

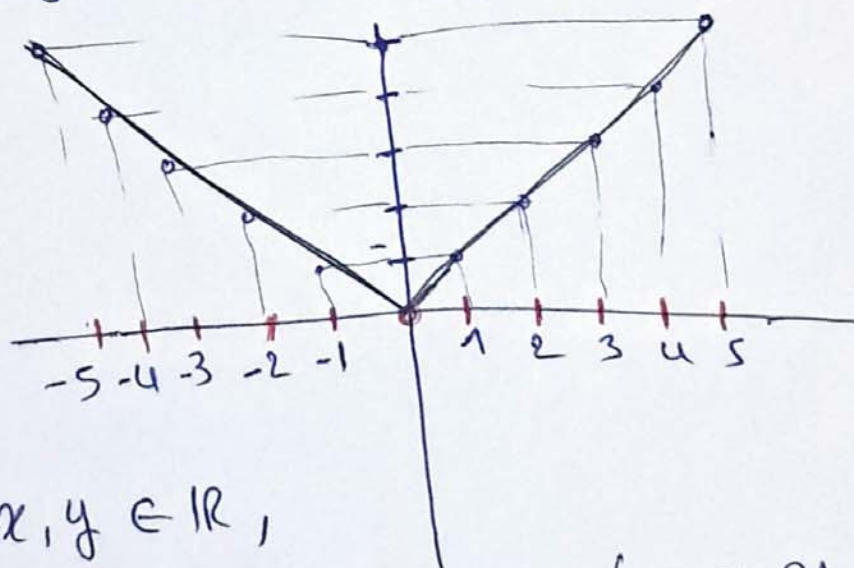
Soit $x \in \mathbb{R}$. La valeur absolue de x , notée $|x|$, est définie par :

$$|x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Le graphe de la fonction

$$|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$x \longmapsto |x|$ est donné par la figure suivante.



Propriétés

Soient $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|-x| = |x|$$

$$|x-y| = |y-x|$$

$$x=0 \Leftrightarrow |x|=0$$

$$x \geq 0 \Leftrightarrow |x| = x$$

$$x \leq 0 \Leftrightarrow |x| = -x$$

$$\begin{aligned} |x| &= |y| \Leftrightarrow (x=y \text{ ou } x=-y) \\ \sqrt{x^2} &= |x| \\ |xy| &= |x| \cdot |y| \\ |x+y| &\leq |x| + |y| \\ ||x| - |y|| &\leq |x-y| \end{aligned}$$

Proposition Soient $x, a, b \in \mathbb{R}$ avec $b \geq 0$
 on a les equivalences suivantes

- $|x-a| = b \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow \cancel{x=a-b} \text{ ou } x=a+b$
- $|x-a| \leq b \Leftrightarrow x \in [a-b, a+b]$
- $|x-a| > b \Leftrightarrow x \in]-\infty, a-b[\cup]a+b, +\infty[$

Rq. une partie ~~A~~ non vide de $\mathbb{R}$ est
 dite bornée si $\exists C \geq 0$ tel que
 $\forall x \in A, |x| \leq C$.

I.5 Partie entière

Def (8) (partie entière)

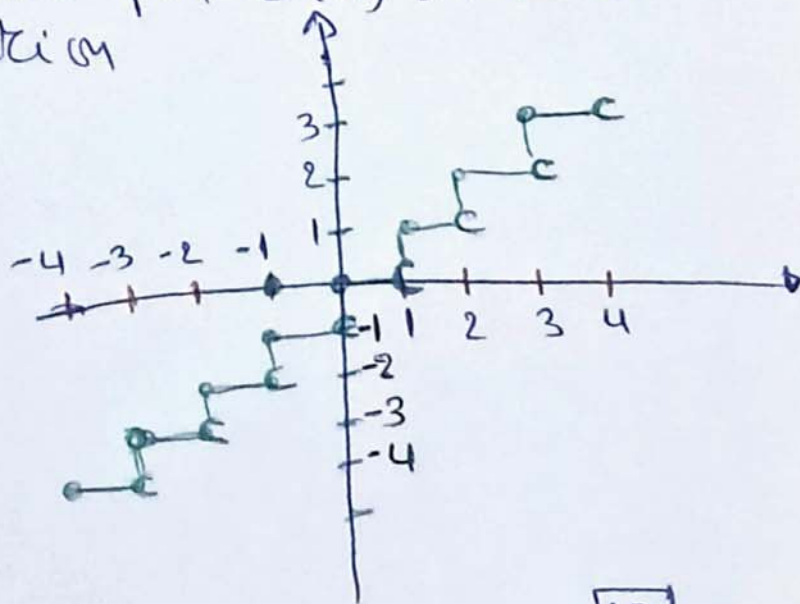
Soit $x \in \mathbb{R}$, le plus grand entier
 inférieur ou égal à x s'appelle la partie
 entière de x , notée par $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$

Le graphe de la fonction

$$E: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$x \longmapsto E(x)$$

est le suivant:



Propriétés Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a:

- $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lfloor x \rfloor = x$
- $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.
- $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$
- $x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a:

- $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$
- $x \leq y \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$
- $\lfloor -x \rfloor = \begin{cases} -\lfloor x \rfloor & \text{si } x = \lfloor x \rfloor \\ -\lfloor x \rfloor - 1 & \text{si } x \neq \lfloor x \rfloor \end{cases}$

Exemple $\lfloor 1,3 \rfloor = 1 \quad \lfloor \sqrt{6} \rfloor = 2$

$$\lfloor -7 \rfloor = -7, \lfloor -5,5 \rfloor = -6, \lfloor \pi \rfloor = 3$$

$$\lfloor e \rfloor = 2.$$