

Chapitre II

Suites de nombres réels

Déf ① On appelle suite de nombres réels toute fonction $U: (I \subseteq \mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Une telle suite est notée $n \longmapsto u_n$

$(u_n)_{(n \in I)}$ ou (u_n) . u_n est appelé terme général de la suite (u_n) .

Exemple

* $u_n = 2n + 1, n \in \mathbb{N} (I = \mathbb{N})$.

On a $u_0 = 1, u_1 = 3, u_2 = 5, u_3 = 7, \dots$

* $v_n = \frac{1}{(n-1)(n-2) \cdot n}, n \geq 3 (I = \mathbb{N}^* - \{1, 2\})$

On a $v_3 = \frac{1}{6}, v_4 = \frac{1}{24}, v_5 = \frac{1}{60}, \dots$

II.1 Opérations sur les suites

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles

• On dit que (u_n) et (v_n) sont égales

si $u_n = v_n, \forall n \in (I \subseteq \mathbb{N})$.

• On appelle somme de (u_n) et (v_n) , la suite

$$w_n = u_n + v_n$$

• On appelle produit de (u_n) et (v_n) , la suite

$$t_n = u_n \cdot v_n.$$

II.2 suites bornées

Déf②

- une suite (u_n) est dite majorée (resp. minorée) s'il existe $M \in \mathbb{R}$ (resp. $m \in \mathbb{R}$) tel que $\forall n \in (I \subseteq \mathbb{N})$, $u_n \leq M$ (resp. $u_n \geq m$).
- une suite (u_n) est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée c'est-à-dire (si $\exists m, M \in \mathbb{R} \mid \forall n \in I \subseteq \mathbb{N}$, $m \leq u_n \leq M$)

$$\Leftrightarrow (\exists \underbrace{C}_{C \in \mathbb{R}_+^*} > 0 \mid \forall n \in I \subseteq \mathbb{N}, |u_n| \leq C)$$

Rq: si une suite (u_n) admet un majorant M , alors tout réel $M' \geq M$ est aussi majorant de (u_n) . Ainsi, si (u_n) admet un majorant, elle en admet une infinité. (même chose pour le minorant)

Déf③ (Borne sup, Borne inf)

toute suite réelle (u_n) majorée admet une borne supérieure (par définition la borne supérieure de (u_n) est le plus petit des majorants de (u_n)). Cette borne est notée par $\sup_{n \in I \subseteq \mathbb{N}} (u_n)$

Toute suite réelle (u_n) minorée admet une borne inférieure (par définition la borne inférieure de (u_n) est le plus grand des minorants de (u_n)). Cette borne est notée par $\inf_{n \in I \subseteq \mathbb{N}} (u_n)$.

$$n \in I \subseteq \mathbb{N}$$

Rq $\sup(u_n)$ et $\inf(u_n)$ s'ils existent ils sont uniques.

- Soit (u_n) une suite réelle bornée, alors

$$\sup(u_n) = (M \in \mathbb{R}) \iff \begin{cases} \forall n \in I \subseteq \mathbb{N}, u_n \leq M \\ \text{et} \\ \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in I \subseteq \mathbb{N}, \\ u_{n_0} > M - \varepsilon \end{cases}$$

$$\text{et } \inf(u_n) = (m \in \mathbb{R}) \iff \begin{cases} \forall n \in I \subseteq \mathbb{N}, u_n \geq m \\ \text{et } \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in I \subseteq \mathbb{N}, \\ u_{n_0} < m + \varepsilon \end{cases}$$

Déf@ (Notion de maximum, minimum)

- * On dira que (u_n) admet un maximum (atteint au rang n_0) si : $\forall n \in I \subseteq \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n_0}$. On écrit donc $\text{Max}(u_n) = u_{n_0}$ $n \in I \subseteq \mathbb{N}$.
- * On dira que (u_n) admet un minimum (valeur atteinte au rang n_0) si : $\forall n \in I \subseteq \mathbb{N}$ $u_n \geq u_{n_0}$. On écrit alors $\text{Min}(u_n) = u_{n_0}$ $n \in I \subseteq \mathbb{N}$.

Rq * Si (u_n) admet un maximum, alors (u_n) admet une borne supérieure. Ainsi (contraposée) si (u_n) n'a pas de borne supérieure, alors (u_n) n'a pas non plus de maximum.

- * (u_n) peut admettre une borne supérieure mais pas de maximum. Autrement dit $\sup(u_n)$ n'est pas forcément un élément de (u_n) . (Cette remarque est valable pour le minimum et la borne inférieure).

ona donc : si $\sup(u_n) \in (u_n)$,

$\text{Max}(u_n) = \sup(u_n)$ et

si $\inf(u_n) \in (u_n)$, $\text{Min}(u_n) = \inf(u_n)$

II.3 Suites monotones

Déf 5 Une suite $(u_n)_{n \in I}$ (avec $I \subseteq \mathbb{N}$)
est dite :

- * Croissante si pour tout $n \in I$, $u_{n+1} \geq u_n$
 - * strictement croissante si pour tout $n \in I$, $u_{n+1} > u_n$
 - * Décroissante si pour tout $n \in I$, $u_{n+1} \leq u_n$
 - * strictement décroissante si pour tout $n \in I$, $u_{n+1} < u_n$.
- Si (u_n) est croissante ou décroissante, elle est dite monotone
 - Si (u_n) est strictement croissante ou strictement décroissante, elle est dite strictement monotone.

Exemple $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ le terme général $u_n = n^2$ est st $\nearrow$
car $u_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 > (n^2 = u_n)$

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ le terme général $v_n = \frac{1}{n}$ est st $\searrow$
car $v_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \left(\frac{1}{n} = u_n\right)$

II. 4 Notion de limites

* On dit qu'une suite réelle (u_n) admet $(l \in \mathbb{R})$ comme limite lorsque n tend vers $(+\infty)$ (ou u_n converge vers $l \in \mathbb{R}$) (ou n tend vers $l \in \mathbb{R}$ quand n tend vers $+\infty$) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{I} \subseteq \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

(i.e) quelle que soit la précision $\varepsilon > 0$ choisie, on peut trouver un rang (n_0) à partir duquel les éléments de la suite (u_n) ne s'écartent pas de l de plus de ε .

on écrit alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow[n \xrightarrow{\text{vers}} +\infty]{\text{tend vers}} l$$

* On dit que la suite (u_n) est divergente si elle n'est pas convergente. Autrement dit, (u_n) est divergente si $\nexists (l \in \mathbb{R})$ tel que (u_n) converge vers l

Exemple

Montrons que la suite
(u_n) $_{n \geq 1}$ de terme général $u_n = \frac{1}{n}$
tend vers 0, quand tend vers $+\infty$.

$$\left(\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq 1, n \geq N_0 \Rightarrow |u_n - 0| < \varepsilon \right)$$

Supposons que pour $\varepsilon > 0$, on a $|u_n - 0| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n\varepsilon > 1$$

$\boxed{n > \frac{1}{\varepsilon}}$. Pour l'entier N_0 , on peut prendre
n'importe quel entier plus grand ou égal
à $\frac{1}{\varepsilon}$. on peut par exemple prendre

$$N_0 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1, \text{ ainsi donc}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq 1,$$

$$n \geq \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 \text{ on a } |u_n| < \varepsilon.$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Déf 6 (Limites Infinites)

* On dit qu'une suite (u_n) tend vers $+\infty$ si $\forall A > 0, \exists n_0 = n_0(A) \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$
 $n \geq n_0 \Rightarrow u_n > A$

* On dit qu'une suite (u_n) tend vers $-\infty$ si $\forall A > 0, \exists n_0 = n_0(A) \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$
 $n \geq n_0 \Rightarrow u_n < -A$.

• Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, on dit que u_n est
infinitement petite

• Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, on dit que u_n est
infinitement grande

Remarque En particulier une suite
qui tend vers $\pm\infty$ est dite
divergente.

Théorème ①: Si (u_n) converge vers une limite l , alors l est unique

Preuve supposons que (u_n) a deux limites $l_1 \neq l_2$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l_1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \\ (n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l_1| < \varepsilon/2)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l_2 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \\ (n \geq N_2 \Rightarrow |u_n - l_2| < \varepsilon/2)$$

Posons $N_0 = \max(N_1, N_2)$ alors $\forall n \geq N_0$

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - u_n + u_n - l_2| = |(l_1 - u_n) + (u_n - l_2)| \\ \leq |u_n - l_1| + |u_n - l_2| < (\varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0.$$

d'où $l_1 = l_2$ contradiction, alors l est unique.

Théorème 2 Toute suite convergente est bornée.

Preuve (u_n) est convergente, alors $(\exists l \in \mathbb{R})$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ $\forall n \in \mathbb{N} (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$.

$$\Leftrightarrow -\varepsilon < u_n - l < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon)$$

$\Leftrightarrow (u_n)$ est bornée.

(ie) $\forall n \geq n_0$ les termes de u_n sont à l'intérieur de $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$. A l'extérieur de $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$ il existe un nombre fini de termes $u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n_0-1}$. Si on pose $M = \max(u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n_0-1}, l + \varepsilon)$ et $m = \min(u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n_0-1}, l - \varepsilon)$, on obtient $m \leq u_n \leq M$ pour tout $n \geq n_0$.
Donc (u_n) est bornée.

Remarque : La réciproque n'est pas vraie

Exemple $\frac{(-1)^n}{3}$ est bornée, mais elle n'est pas convergente. Car sa limite n'est pas unique.

$$\begin{array}{l} \text{pour } n = 2p+1 \text{ (Impair)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1 \\ \text{pour } n = 2p \text{ (Pair)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +1 \end{array}$$

4.1 opérations sur les suites convergentes

Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites convergentes,

alors $(u_n \pm v_n), (u_n \cdot v_n), (h u_n) (h \in \mathbb{R}),$

$\left(\frac{u_n}{v_n}\right) (v_n \neq 0)$ sont convergentes et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \cdot v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (h u_n) = h \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n}{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n} \quad \text{avec } \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \neq 0\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = \left| \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \right|.$$

4.2 suites de même nature

Deux suites sont dites de même nature si la convergence (resp. divergence) de l'une implique la convergence (resp. divergence) de l'autre.

Proposition 1 Soit (u_n) une suite convergente vers l' ($\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l'$). Soit (v_n) une suite convergente vers l'' ($\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l''$). Si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0$ on a $l' < l''$, alors $u_n < v_n$.

Preuve $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l' \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq n_1 \Rightarrow |u_n - l'| < \varepsilon) \rightarrow *$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l'' \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq n_2 \Rightarrow |v_n - l''| < \varepsilon) \rightarrow **$

soit $l \in]l' \quad l''[$. posons dans $*$ $\varepsilon = l - l'$ et dans $**$ $\varepsilon = l'' - l$,

alors :

$$\forall n \geq n_1 \Rightarrow |u_n - l'| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < u_n - l' < \varepsilon$$

$$\Rightarrow l' - l < u_n - l' < l - l'$$

$$\Rightarrow 2l' - l < u_n < l \Rightarrow \boxed{u_n < l}$$

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_2 &\Rightarrow |v_n - l''| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < v_n - l'' < \varepsilon \\ \Rightarrow l - l'' &< v_n - l'' < l'' - l \\ \Rightarrow l &< v_n < 2l'' - l \\ \Rightarrow &\boxed{v_n > l}. \end{aligned}$$

alors si on pose $n_0 = \text{Max}(n_1, n_2)$, on obtient: $\forall n \geq n_0$, $u_n < l$ et $v_n > l$
 $\Rightarrow \boxed{u_n < v_n}$.

Proposition 2 Si (u_n) est une suite convergente à termes positifs ($\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$), alors sa limite l est positive ($l \geq 0$).

Preuve supposons que la limite de u_n est négative ($l < 0$), si on prend $\boxed{-l = 2\varepsilon}$, alors $\exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N$, on ait $|u_n - l| < (\varepsilon = \frac{l}{2})$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u_n &< l + \varepsilon \Rightarrow \\ u_n &< l - \frac{l}{2} \Rightarrow \boxed{u_n < \frac{l}{2} < 0} \end{aligned}$$

c'est-à-dire à partir de N les termes de u_n sont négatifs, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse.

Corollaire 1 Soient (u_n) et (v_n) deux suites qui convergent respectivement vers l' et l'' . On suppose que $u_n < v_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Alors $l' \leq l''$.

Pour la démonstration on va considérer la suite $(w_n = v_n - u_n)$ (à termes positifs) et appliquer la proposition 2.

Théorème 2 (Encadrement)

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites réelles et $l \in \mathbb{R}$. On suppose que $\forall n \geq 0, v_n \leq u_n \leq w_n$.

Si (v_n) et (w_n) convergent vers l ($\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$), alors (u_n) converge vers l ($\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$).

Preuve $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N} / \forall n: n \geq n_1 \Rightarrow |v_n - l| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N} / \forall n: n \geq n_2 \Rightarrow |w_n - l| < \varepsilon$

Posons $n_0 = \max(n_1, n_2)$, alors $\forall n \geq n_0$

$$\begin{cases} l - \varepsilon < v_n < l + \varepsilon \\ l - \varepsilon < w_n < l + \varepsilon \end{cases} \Rightarrow l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon.$$

□

Exemple

$$u_n = \frac{\sin n}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leq \sin n \leq 1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{n^2} \leq \frac{\sin n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} -\frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, alors

d'après le théorème d'encadrement

(des gendarmes) $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin n}{n^2} = 0$

($\frac{\sin n}{n^2}$ converge vers sa limite $l=0$)

Proposition 3 Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que :

- (u_n) tend vers $+\infty$
- à partir d'un certain rang N
($\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N$), $u_n \leq v_n$.

Alors la suite (v_n) tend vers $+\infty$.

b) On suppose que (u_n) tend vers $-\infty$
et à partir d'un certain rang N
 $u_n \geq v_n$, alors la suite v_n tend vers $-\infty$

Proposition 4 Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et (v_n) est bornée, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \cdot v_n = 0.$$

Théorème 3 Soit (u_n) une suite réelle.

- si (u_n) est croissante et majorée, alors (u_n) est convergente
- si (u_n) est décroissante et minorée, alors (u_n) est convergente.

Remarque

- * Pour une suite $\nearrow$ et majorée, la limite est donnée par $l = \sup(u_n)$
- * Pour une suite $\searrow$ et minorée la limite est donnée par $l = \inf(u_n)$

II.5 Suites extraites (sous-suite)

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que la suite (v_n) est une sous-suite (suite extraite) de (u_n) s'il existe une application strictement croissante $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a

$$v_n = u_{\varphi(n)}$$

Exemple 5. Pour $u_n = (-1)^n$. L'application $\varphi: n \rightarrow 2n$ donne la sous-suite $v_n = u_{2n} = (-1)^{2n} = 1$. Cette sous-suite est une suite constante. De même l'application $\varphi: n \rightarrow 2n+1$ donne la suite extraite $w_n = u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$. Cette sous-suite est aussi une suite constante.

Proposition 5 Soit (u_n) une suite réelle. Alors (u_n) tend vers l si et seulement si toute sous-suite de (u_n) tend vers l .

Remarque

Pour démontrer que (u_n) diverge, il suffit de trouver deux de ses suites extraites qui tendent vers deux limites distinctes. Comme exemple

$$u_n = \frac{(-1)^n}{3}, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ est divergente car}$$
$$v_n = u_{2n} = 1/3 \text{ et } w_n = u_{2n+1} = -1/3$$
$$\text{et } \left(\lim_{n \rightarrow \pm\infty} v_n = 1/3 \right) \neq \left(\lim_{n \rightarrow \pm\infty} w_n = -1/3 \right).$$

Proposition 6 soit $(l \in \mathbb{R})$ et soit (u_n) une suite réelle alors :

$$\text{si } \lim_{n \rightarrow \pm\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} u_{2n+1} = l \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} u_n = l \quad (u_n \text{ converge vers } l)$$

Théorème 1 (Bolzano-Weierstrass)

Toute suite réelle bornée possède une sous-suite (suite extraite) convergente

Exemple $u_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$. Il est clair que (u_n) est bornée : $\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leq u_n \leq 1$.

or $u_{2n} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \pm\infty} u_{2n} = 1 \Rightarrow u_{2n}$ converge vers 1

II.6 suites adjacentes

Deux suites réelles sont dites adjacentes si et seulement si :

- a) l'une est croissante
- b) l'autre est décroissante
- c) Leur différence tend vers 0 (quand $n \rightarrow +\infty$)

Théorème 5 (Convergence de suites adjacentes)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

On suppose que (u_n) est $\nearrow$, (v_n) est $\searrow$ et
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$. Alors (u_n) et (v_n) sont

convergentes et convergent vers la
même limite $l \in \mathbb{R}$. De plus

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \boxed{u_n \leq l \leq v_n}.$$

Preuve On a $u_n \nearrow$, $v_n \searrow$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$. Alors

$$\begin{aligned} (v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) &= v_{n+1} - v_n - u_{n+1} + u_n \\ &= \underbrace{v_{n+1} - v_n}_{< 0} + \underbrace{u_n - u_{n+1}}_{< 0} < 0 \Rightarrow (v_n - u_n) \searrow \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0 \Rightarrow \inf (v_n - u_n) = 0$

$$\Rightarrow (v_n - u_n) \geq 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow v_n \geq u_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n \leq u_{n+1} < \dots < v_{n+1} \leq v_n \\ \leq \dots \leq v_n \leq v_0 \end{aligned}$$

On a donc $\begin{cases} u_n \nearrow \text{ et majoré par } v_0 \\ v_n \searrow \text{ et minoré par } u_0 \end{cases}$

Donc u_n et v_n sont convergentes

et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0 \Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

Exemple, on considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$, $n \geq 1$.

Les suites $(v_n)_{n \geq 1}$ et $(w_n)_{n \geq 1}$ définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$, $n \geq 1$ sont adjacentes ~~car~~

En effet:

$$\begin{aligned} \text{a) } u_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = v_n, \quad u_{2(n+1)} = v_{n+1} = \\ &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} \\ &= v_n + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} = v_n - \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{(2n+2)(2n+1)} < 0 \Rightarrow v_n \text{ est } \downarrow$$

$$\begin{aligned} \text{b) } u_{2n+1} &= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} = w_n, \quad w_{n+1} = u_{2(n+1)+1} = \\ &= \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3} \\ &= w_n + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} = w_n + \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \\ \Rightarrow w_{n+1} - w_n &= \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} > 0 \Rightarrow w_n \text{ est } \uparrow \end{aligned}$$

$$c) \quad v_n - w_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} - \left[\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} \right]$$

$$= \frac{1}{2n+1} \cdot \text{Donc } \lim_{n \rightarrow \infty} v_n - w_n = 0.$$

a, b et c montrent que v_n et w_n sont adjacentes, donc sont convergentes et convergent vers la même limite $\boxed{l \in \mathbb{R}}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \boxed{w_n \leq l \leq v_n}$.

II.7 Suite de Cauchy ^{**} en plus ^{**}

Soient (u_n) une suite réelle, $n \in \mathbb{N}$.
on dit que (u_n) est de Cauchy si
 $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \mid \forall n, m \in \mathbb{N}.$

$$(n \geq n_0, m \geq n_0) \Rightarrow |u_n - u_m| < \varepsilon$$

sa négation est : « (u_n) n'est pas de Cauchy »

si $\exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n, m \in \mathbb{N} :$

$$(n \geq n_0, m \geq n_0 \text{ et } |u_n - u_m| \geq \varepsilon).$$

Proposition 7 toute suite de Cauchy est bornée ^{**} en plus ^{**}

Théorème 6 (Critère de Cauchy) * En plus **

Une suite réelle (u_n) est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

Exemple la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{\cos k}{k(k+1)} \text{ est convergente car elle est de Cauchy}$$

En effet, soient $n, m \in \mathbb{N}$, tels que $n > m$.

soit $\varepsilon > 0$, on a $|u_n - u_m|$ * En plus

$$= \left| \sum_{k=1}^n \frac{\cos k}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^m \frac{\cos k}{k(k+1)} \right| =$$

$$\left| \sum_{k=m+1}^n \frac{\cos k}{k(k+1)} \right| \leq \sum_{k=m+1}^n \left| \frac{\cos k}{k(k+1)} \right|$$

$$\leq \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k(k+1)} \Rightarrow |u_n - u_m| \leq$$

$$\sum_{k=m+1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \Rightarrow$$

$$|u_n - u_m| \leq \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1} < \boxed{\frac{1}{m+1}} < \varepsilon$$

Donc il faut prendre $m = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} - 1 \rfloor + 1$.

II.8 Suites récurrentes

Soit $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, telle que $f(D) \subset D$. On appelle suite récurrente une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par la donnée de son premier terme u_0 et d'une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exemples

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}, \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$$

Remarques (monotonie de (u_n))

* Si f est $\nearrow$, alors la monotonie de $(u_n)_{n \geq 0}$ revient à l'étude de signe de $f(u_0) - u_0$

$$\begin{cases} f(u_0) - u_0 \geq 0 \Rightarrow (u_n) \text{ est } \nearrow \\ f(u_0) - u_0 < 0 \Rightarrow (u_n) \text{ est } \searrow \end{cases}$$

* Si f est monotone et continue sur D et (u_n) est convergente vers $l \in D$, alors $f(l) = l$.

II.9 suites particulières

a) suites arithmétiques

On appelle suite arithmétique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison r ,

la suite définie par $u_{n+1} = u_n + r, n \geq 0$

Autrement dit, on passe d'un terme de la suite au suivant en ajoutant toujours le même nombre r .

Remarque: Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, il faut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la différence $u_{n+1} - u_n$ est un réel r constant.

Proposition 8 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r . Alors

1) pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 + n \cdot r$

2) pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$,

(tel que $p \leq n$) on a $u_p + (n-p) \cdot r = u_n$

Corollaire 2

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \begin{cases} u_0 & \text{si } r = 0 \\ +\infty & \text{si } r > 0 \\ -\infty & \text{si } r < 0 \end{cases}$$

Proposition 9 (somme des n-premiers termes)

La somme des n premiers entiers naturels est $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Pour la démonstration on additionne membre à membre les deux égalités suivantes

$$\begin{array}{r} + \quad 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n-3 + n-2 + n-1 + n = S_n \\ \quad n + n-1 + n-2 + n-3 + \dots + 4 + 3 + 2 + 1 = S_n \\ \hline \end{array}$$

on obtient $2S_n = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}_{n \text{ fois}}$

$$\Rightarrow \boxed{S_n = \frac{n(n+1)}{2}} \quad \text{Pour la suite } u_n = u_0 + n \cdot r$$

$$\text{on a } S = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$= u_0 + u_0 + r + u_0 + 2r + \dots + u_0 + n \cdot r$$

$$= (n+1)u_0 + r(1+2+3+\dots+n) =$$

$$(n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2} r = (2u_0 + n \cdot r) \frac{(n+1)}{2}$$

b) Suites géométriques

On appelle suite géométrique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $q \neq 0$, la suite définie par $u_{n+1} = q \cdot u_n, n \geq 0$

* Pour démontrer qu'une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est géométrique, il faut montrer que $\forall n \in \mathbb{N} (u_n \neq 0 \text{ et } \frac{u_{n+1}}{u_n} = (q \text{ "constant"})$

Proposition 10 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q , alors

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \leq n$, on a :

$$u_n = q^{(n-p)} \cdot u_p = q^n \cdot u_0$$

Corollaire 3

$$\lim u_n = \begin{cases} u_0 & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } |q| < 1 \\ +\infty & \text{si } q > 1 \text{ et } u_0 > 0 \\ -\infty & \text{si } q > 1 \text{ et } u_0 < 0 \end{cases}$$

pas de limite si $\cancel{q \leq -1} \quad q \leq -1$ et $u_0 \neq 0$.

Proposition II (somme des n premiers termes)

La somme des $(n+1)$ premières puissances d'un nombre réel ($q \neq 1$) est donnée par :

$$S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

pour la démonstration on a

$$(1 - q)S = (1 - q)(1 + q + q^2 + \dots + q^n) = \Delta$$

$$(1 - q)S = (1 + \cancel{q} + \dots + q^n - \cancel{q} - \cancel{q^2} - \dots - \cancel{q^n} - q^{n+1})$$

$$\Rightarrow (1 - q)S = (1 - q^{n+1}) \Rightarrow \boxed{S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$$

pour la suite $u_{(n+1)} = q \cdot u_n$ on a :

$$\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + qu_0 + q^2u_0 + \dots + q^nu_0$$

$$= u_0 [1 + q + q^2 + \dots + q^n]$$

$$= u_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right), \quad q \neq 1, \text{ ce qui}$$

$$\text{montre que } S = \sum_{k=0}^n u_k = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1 - q}, \quad (q \neq 1)$$

pour $q = 1$, on a $u_n = u_0 \Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^n u_k = \frac{u_0 + u_0 + \dots + u_0}{(n+1) \text{ fois}} = (n+1)u_0.$$

c) suites arithmético-géométriques

On appelle suite arithmético-géométrique toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant

$$u_{n+1} = a u_n + b \quad \text{ou} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Proposition III Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite arithmético-géométrique $(u_{n+1} = a u_n + b)$

$n \geq 0$ tel que $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 1$.

Soit $l \in \mathbb{R} \mid l = a l + b$, alors la suite $(u_n - l)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $\boxed{a}$.

Pour la preuve on a:

$$\begin{cases} u_{n+1} = a u_n + b \\ l = a l + b \end{cases} \Rightarrow$$

$$(u_{n+1} - l) = (a u_n + b) - (a l + b)$$

$$\Rightarrow (u_{n+1} - l) = a (u_n - l) \quad \text{donc}$$

$(u_n - l)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $\boxed{a}$

Exemples

$$1) \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1, n \geq 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} v_0 = -1 \\ v_{n+1} = \frac{v_n + 1}{2}, n \geq 0 \end{cases}$$

Pour 1: Soit $l \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{3}l - 1 = l \Rightarrow \boxed{l = -3}$

Donc $(u_{n+1} + 3) = \frac{2}{3}(u_n + 3)$ ce qui montre que ~~u_n~~ $(u_n + 3)$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$. Donc $(u_n + 3) = \left(\frac{2}{3}\right)^n (u_0 + 3)$

$$\Rightarrow u_n + 3 = 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow \boxed{u_n = 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3}$$

Pour 2 Soit $l \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2}l + \frac{1}{2} = l \Rightarrow \boxed{l = 1}$

Donc $(v_{n+1} - 1) = \frac{1}{2}(v_n - 1)$. Ce qui montre que $(v_n - 1)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Donc $(v_n - 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - 1)$

$$\Rightarrow v_n - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^n (-2)$$

$$\Rightarrow v_n = 1 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \boxed{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}$$