Analyse I

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année Ingénieur (ST-TM)
Année universitaire 2025–2026

✠– Série de TD numéro 1–✠

Exercice 1 : Déterminer, s'ils existent, les majorants, les minorants, la borne inférieure, la borne supérieure, le maximum et le minimum des ensembles suivants :

1. $[-3;10]$, 2. $]-1;15[$, 3. $[-4;4]\cap\mathbb{Z}$ 4. $\mathbb{N}$, 5. $A=\{\frac{1}{n};\ n\in\mathbb{N}^*\}$,
6. $B=\{(-1)^n+\frac{1}{n^2};\ n\in\mathbb{N}^*\}$ 7. $C=\{\frac{1}{2x+1};\ x\in\ [0;1]\}$

Exercice 2 Soient x et y deux nombres réels. Démontrer que :
a. $max(x,y)=\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$, b. $min(x,y)=\frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$

Exercice 3 Soit A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
1. $A\subset B$ alors $sup(A)\leq sup(B)$, 2. $A\subset B$ alors $inf(A)\leq inf(B)$,
3. $A\cup B$ est borné, 4. $sup(A\cup B)=max(sup(A),sup(B))$,
5. $inf(A\cup B)=max(inf(A),inf(B))$, 6. $sup(-A)=-inf(A)$.

Exercice 4
a. Écrire les expressions suivantes sans valeur absolue :
 1. $3+|x-2|$, 2. $|x+2|+|3x-6|$, 3. $|x+10|$.
b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
 1. $|x+3|\leq 5$, 2. $|3x-6|\leq|x+2|$, 3. $|x+3|\geq 7$, 4. $|x+4|=5$.

Exercice 5
a. Évaluer les expressions suivantes :‘
 1. $[\frac{2}{3}]$, 2. $[\pi]$ 3. $[\frac{-3}{4}]$.
b. Soient $x\in\mathbb{R}$ et $k\in\mathbb{Z}$.
 • Déterminer $[2x]$ en fonction de $[x]$.
 • Simplifier $[x+k]$.
 • Résoudre $[x]=4$, $[2x-1]+1=0$ et $[2x+1]=[x+4]$.
c. Tracer graphiquement la fonction

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ & & x & \mapsto & [x] \end{array}$$

Analyse I

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année Ingénieur (ST-TM)
Année universitaire 2025–2026

✠– Corrigé de la Série de TD numéro 1–✠

Exercice 1 : Majorants, Minorants, Sup, Inf, Max et Min :

1. L'ensemble $[-3;10]$ admet $[10;\infty[$ comme ensemble des majorants et $]-\infty;-3]$ comme ensemble des minorants, $sup([-3;10]) = 10$, $inf([-3;10]) = -3$, $max([-3;10]) = 10$ et $min([-3;10]) = -3$.
2. L'ensemble $]-1;15[$ admet $[15;\infty[$ comme ensemble des majorants et $]-\infty;-1]$ comme ensemble des minorants, $sup(]-1;15[) = 15$, $inf(]-1;15[) = -1$, $max(]-1;15[)$ et $min(]-1;15[)$ n'existent pas.
3. Comme $[-4;4] \cap \mathbb{Z} = \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$, alors il admet $[4;+\infty[$ comme ensemble des majorants et $]-\infty;-4]$ comme ensemble des minorants, $sup([-4;4] \cap \mathbb{Z}) = 4$, $inf([-4;4] \cap \mathbb{Z}) = -4$, $max([-4;4] \cap \mathbb{Z}) = 4$ et $min([-4;4] \cap \mathbb{Z}) = -4$.
4. L'ensemble $\mathbb{N}$ n'admet pas de majorants, l'ensemble des minorants de $\mathbb{N}$ est l'intervalle $]-\infty;0]$, $inf(\mathbb{N}) = 0$, $sup(\mathbb{N})$ n'existe pas, $max(\mathbb{N})$ n'existe pas, $min(\mathbb{N}) = 0$.
5. Pour l'ensemble $A = \{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\}$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n}$ est strictement décroissante, ayant 1 comme valeur maximale et tend vers 0 quant n tend vers l'infini. Alors A admet $[1;\infty[$ comme ensemble des majorants et $]-\infty;-0]$ comme ensemble des minorants, $sup(A) = 1$, $inf(A) = 0$, $max(A) = 1$ et $min(A)$ n'existe pas.
6. Pour l'ensemble $B = \{(-1)^n + \frac{1}{n^2};\ n \in \mathbb{N}^*\}$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^n \in \{-1,1\}$ et $\frac{1}{n^2}$ est strictement décroissante, alors $B \in]-1;\frac{5}{4}]$. Donc B admet $[\frac{5}{4};+\infty[$ comme ensemble des majorants et $]-\infty;-1]$ comme ensemble des minorants, $sup(B) = \frac{5}{4}$, $inf(B) = -1$, $max(B) = \frac{5}{4}$ et $min(B)$ n'existe pas. On peut calculer les premiers termes comme suit :
   - Pour $n = 1$: $(-1)^1 + \frac{1}{1^2} = -1 + 1 = 0$.
   - Pour $n = 2$: $(-1)^2 + \frac{1}{2^2} = 1 + 0.25 = 1.25$.
   - Pour $n = 3$: $(-1)^3 + \frac{1}{3^2} = -1 + \frac{1}{9} \approx -0.888$.
   - Pour $n = 4$: $(-1)^4 + \frac{1}{4^2} = 1 + 0.0625 = 1.0625$.

   Analyse par parité :
   - Si n est **pair** : $B = 1 + \frac{1}{n^2} \in]1, 1.25]$.
   - Si n est **impair** : $B = -1 + \frac{1}{n^2} \in [-1, 0]$.
7. Pour l'ensemble $C = \{\frac{1}{2x+1};\ x \in\ [0;1]\}$ on a $x \in\ [0;1]\} \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 2x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq 2x+1 \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2x+1} \leq 1$. Donc C admet $[1;+\infty[$ comme ensemble des majorants et $]-\infty;\frac{1}{3}]$ comme ensemble des minorants, $sup(B) = 1$, $inf(B) = \frac{1}{3}$, $max(B) = 1$ et $min(B) = \frac{1}{3}$.

Exercice 2 : Soient x et y deux nombres réels.

1. Montrons que $max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$. On distingue deux cas :
   $\triangleright$ Si $x \geq y$, alors $x - y \geq 0 \Rightarrow |x - y| = x - y \Rightarrow$
   $\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y + x - y) = x.$ ———— $\star$
   comme $x \geq y$, alors $max(x, y) = x.$ ———— $\star\star$
   $\star$ et $\star\star$ montrent que $max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.
   $\triangleright$ Si $x \leq y$, alors $x - y \leq 0 \Rightarrow |x - y| = -x + y \Rightarrow$
   $\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y - x + y) = y.$ ———— $\star$
   comme $x \leq y$, alors $max(x, y) = y.$ ———— $\star\star$
   $\star$ et $\star\star$ montrent que $max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.
   Donc les deux cas montrent que $max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.
2. Montrons que $min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$. On distingue deux cas :
   $\triangleright$ Si $x \geq y$, alors $x - y \geq 0 \Rightarrow |x - y| = x - y \Rightarrow$
   $\frac{1}{2}(x + y - |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y - x + y) = y.$ ———— $\star$
   comme $x \geq y$, alors $min(x, y) = y.$ ———— $\star\star$
   $\star$ et $\star\star$ montrent que $min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.
   $\triangleright$ Si $x \leq y$, alors $x - y \leq 0 \Rightarrow$
   $|x - y| = -x + y \Rightarrow \frac{1}{2}(x + y - |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y + x - y) = x.$ ———— $\star$
   comme $x \leq y$, alors $min(x, y) = x.$ ———— $\star\star$
   $\star$ et $\star\star$ montrent que $min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.
   Donc les deux cas montrent que $min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.

Exercice 3 : Soit A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$, alors :
1. $A \subset B$ alors $sup(A) \leq sup(B)$ (**vraie**), 2. $A \subset B$ alors $inf(A) \leq inf(B)$ (**fausse**),
3. $A \cup B$ est borné (**vraie**), 4. $sup(A \cup B) = max(sup(A), sup(B))$ (**vraie**),
5. $inf(A \cup B) = max(inf(A), inf(B))$ (**fausse**), 6. $sup(-A) = -inf(A)$ (**vraie**).

Exercice 4 :
a. Expressions sans valeur absolue :

1. Pour l'expression $3 + |x - 2|$ on a :
   $$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & x \geq 2 \\ -x + 2 & x < 2 \end{cases} \Rightarrow 3 + |x - 2| = \begin{cases} x + 1 & x \geq 2 \\ -x + 5 & x < 2 \end{cases}$$
2. Pour l'expression $|x + 2| + |3x - 6|$ on a : $|x + 2|$ change le signe en -2 et $|3x - 6|$ change de signe en 2 (On peut tracer le tableau pour voir facilement les signes).

Intervalle	$]-\infty, -2]$	$[-2, 2]$	$[2, +\infty[$
x	$x \leq -2$	$-2 \leq x \leq 2$	$x \geq 2$
$\|x + 2\|$	$-x - 2$	$x + 2$	$x + 2$
$\|3x - 6\|$	$-3x + 6$	$-3x + 6$	$3x - 6$
$\|x + 2\| + \|3x - 6\|$	$-4x + 4$	$-2x + 8$	$4x - 4$

Donc $$|x + 2| + |3x - 6| = \begin{cases} -4x + 4 & x \in]-\infty, -2] \\ -2x + 8 & x \in [-2, 2] \\ 4x - 4 & x \in [2, +\infty[\end{cases}$$

3. Pour l'expression $|x+10|$ on a : $|x+10| = \begin{cases} x+10 & x \geq -10 \\ -x-10 & x < -10 \end{cases}$

b. Résolution dans $\mathbb{R}$ des inéquations suivantes :

1. $|x+3| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq x+3 \leq 5 \Rightarrow -8 \leq x \leq 2$.

   On peut utiliser le fait que $|x+3|$ change de signe en -3 comme suit :

   $|x+3| \leq 5 \Rightarrow \begin{cases} x+3 \leq 5 & x \geq -3 \\ -x-3 \leq 5 & x < -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 2 & x \geq -3 \\ x \geq -8 & x < -3 \end{cases}$

2. $|3x-6| \leq |x+2|$. on a : $|x+2|$ change le signe en -2 et $|3x-6|$ change de signe en 2 (On peut tracer le tableau pour voir facilement les signes).

Intervalle	$]-\infty,-2]$	$[-2,2]$	$[2,+\infty[$
x	$x \leq -2$	$-2 \leq x \leq 2$	$x \geq 2$
$\|x+2\|$	$-x-2$	$x+2$	$x+2$
$\|3x-6\|$	$-3x+6$	$-3x+6$	$3x-6$

Donc $|3x-6| \leq |x+2| \Rightarrow \begin{cases} -3x+6 \leq -x-2 & x \in]-\infty,-2] \\ -3x+6 \leq x+2 & x \in [-2,2] \\ 3x-6 \leq x+2 & x \in [2,+\infty[\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -2x+8 \leq 0 & x \in]-\infty,-2] \\ -4x+4 \leq 0 & x \in [-2,2] \\ 2x-8 \leq 0 & x \in [2,+\infty[\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 4 & x \in]-\infty,-2] \\ x \geq 1 & x \in [-2,2] \\ x \leq 4 \leq 0 & x \in [2,+\infty[\end{cases}$.

• $x \geq 4$ et $x \leq -2$ sont incompatibles, donc aucune solution
• $x \geq 1$ et $-2 \leq x \leq 2 \Rightarrow$ la solution est $[-2;2] \cap [1;+\infty[= [1;2]$.
• $x \leq 4$ et $x \geq 2 \Rightarrow$ la solution est $]-\infty;4] \cap [2;+\infty[= [2;4]$.

3 $|x+3| \geq 7$.

$$|x+3| \geq 7 \Rightarrow x+3 \leq -7 \quad \text{ou} \quad x+3 \geq 7$$
$$\Rightarrow x \leq -10 \quad \text{ou} \quad x \geq 4$$

Avec la méthode par cas :

$$|x+3| \geq 7 \Rightarrow \begin{cases} x+3 \geq 7 & x \geq -3 \\ -x-3 \geq 7 & x < -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 4 & x \geq -3 \\ x \leq -10 & x < -3 \end{cases}$$

Solution : $]-\infty,-10] \cup [4,+\infty[$

4. $|x+4| = 5$

$$|x+4| = 5 \Rightarrow \begin{cases} x+4 = 5 & x \geq -4 \\ -x-4 = 5 & x < -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 & x \geq -4 \\ x = -9 & x < -4 \end{cases}$$

Exercice 5 :

a. 1. $[\frac{2}{3}] = 0$ car $0 \leq \frac{2}{3} \leq 1$, 2. $[\pi] = 3$, 3. $[\frac{-3}{4}]$ = -1.

b. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

• Détermination de $[2x]$ en fonction de $[x]$.

posons $[x] = n$, avec $n \in \mathbb{N}$, alors $n \leq x < n+1 \Rightarrow 2n \leq 2x < 2n+2$. Comme [x] = n, alors x=n+p avec $0 \leq p < 1$. Pour la résolution on distingue deux cas :

Cas1 Si $0 \leq p < \frac{1}{2}$, alors $0 \leq 2p < 1 \Rightarrow 2n \leq 2x < 2n+1$ car $2x = 2n+2p$. donc la solution dans ce cas est $[2x] = 2n$.

Cas2 Si $\frac{1}{2} \leq p < 1$, alors $1 \leq 2p < 2 \Rightarrow 2n+1 \leq 2x < 2n+2$ car $2x = 2n+2p$. Donc la solution dans ce cas est $[2x] = 2n+1$.

• Simplification de $[x+k]$. Posons n= [x] $\Rightarrow n \leq x < n+1 \Rightarrow$ $n+k \leq x+k < n+1+k$. Or $n+k \in \mathbb{N}$, alors $[x+k] = n+k = [x]+k$.

• Résolution de : $[x] = 4$, $[2x-1]+1 = 0$ et $[2x+1] = [x+4]$.

▷ $[x] = 4 \Rightarrow 4 \leq x < 5$, donc la solution est $S = [4,\ 5[$.

▷ $[2x-1]+1 = 0 \Rightarrow [2x-1]=$ -1 $\Rightarrow -1 \leq 2x+1 < 0 \Rightarrow 0 \leq 2x < 1 \Rightarrow 0 \leq x < \frac{1}{2}$, donc la solution est $S = [0,\ \frac{1}{2}[$.

▷ $[2x+1] = [x+4] \Rightarrow [2x]+1 = [x]+4 \Rightarrow [2x] = [x]+3$. Posons $[x] = n$, avec $n \in \mathbb{N}$, alors $x = n+p$. Donc si $0 \leq p < \frac{1}{2}$, alors [2x] = 2n et si $\frac{1}{2} \leq p < 1$, alors [2x] = 2n+1.

• Dans le premier cas, on a $[2x] = [x]+3 \Rightarrow 2n = n+3 \Rightarrow n = 3$ et $0 \leq x-3 < \frac{1}{2}$. Alors $x \in [3,\ \frac{7}{2}[$.

• Dans le deuxième cas, on a $[2x] = [x]+3 \Rightarrow 2n+1 = n+3 \Rightarrow n = 2$ et $\frac{1}{2} \leq x-2 < 1$. Alors $x \in [\frac{5}{2},\ 3[$. Donc la solution générale est $x \in [\frac{5}{2},\ \frac{7}{2}[$.

c. La Figure ci-dessous montre la graphe de la fonction

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ & & x & \mapsto & [x] \end{array}$$