Analyse I

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année Ingénieur (ST-TM)
Année universitaire 2025–2026

✠– Série de TD numéro 2–✠

Exercice 1 :
a. Déterminer la limite éventuelle de chacune des suites numériques suivantes :

1. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, 2. $v_n = \dfrac{n \sin n}{n^2+1}$ 3. $w_n = \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$ 4. $\frac{3^n+(-3)^n}{3^n}$.

b. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite définie par : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^3+k}$.
Montrer, à l'aide du théorème d'encadrement, que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 2 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n+2} \end{cases}$

1. Montrer que $0 \leq u_n < 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire la monotonie de (u_n).
3. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = 2 - u_n$.
   a. Quel est le signe de (v_n) ?
   b. Montrer que pout tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leq \dfrac{1}{2}$.
   c. En utilisant un raisonnement par récurrence montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^\star, v_n \leq (\frac{1}{2})^{n-1}$$
   d. En déduire la limite de la suite (v_n), puis celle de (u_n).

Exercice 3 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite définie par : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.
On considère deux suites v_n et w_n définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
1. Montrer que (v_n) et (w_n) sont adjacentes.
2. En déduire que (u_n) converge.

Exercice 4 : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par :
$u_0 = 0$, $v_0 = 12$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n+2v_n}{3}$
1. Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_n = v_n$-u_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$.
2. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
3. On considère la suite $t_n = 2u_n + 3v_n$. Montrer que (t_n) est constante.

Exercice 5 : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par :
u_0 et v_0 tels que $u_0 < v_0$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n+v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n+2v_n}{3}$
1. Exprimer que $u_n - v_n$ en fonction de $u_{n-1} - v_{n-1}$ et en déduire la limite de $(u_n - v_n)$.
2. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes et calculer leur limite.

« Corrigé »

Exercice n° 01

a) Calcul de limites

multiplier et diviser par le conjugué

1) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$

$= \dfrac{n+1-n}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \dfrac{1}{\sqrt{n(1+1/n)}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+1/n}+1}\right)$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, alors

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

2) $v_n = \dfrac{n \sin n}{n^2+1}$. Comme $\overline{-1 \leq \sin n \leq 1}^{\forall n \in \mathbb{N}}$

alors $-n \leq n \sin n \leq n$

$\Rightarrow \dfrac{-n}{n^2+1} \leq \dfrac{n \sin n}{n^2+1} \leq \dfrac{n}{n^2+1}$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-n}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n^2+1} = 0$, alors

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

3) $w_n = \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n} = \dfrac{2\cdot 2^n + 3\cdot 3^n}{2^n+3^n}$

$= \dfrac{3^n\left(2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n+3\right)}{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)} = \dfrac{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}$

or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 3$

4) $t_n = \dfrac{3^n+(-3)^n}{3^n}$.

Pour n pair : $(-3)^n = 3^n \Rightarrow t_n = \dfrac{3^n+3^n}{3^n} = 2$

Pour n impair : $(-3)^n = -(3)^n \Rightarrow t_n = \dfrac{3^n-3^n}{3^n} = 0$

Comme t_n tend vers deux limites différents, alors t_n n'a pas de limite.

b) $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^3+k}$

$1 \leq k \leq n$

$\Rightarrow 1+n^2 \leq k+n^2 \leq n+n^2 \Rightarrow \dfrac{1}{n+n^3} \leq \dfrac{1}{k+n^3} \leq \dfrac{1}{1+n^3}$

$\Rightarrow \dfrac{n}{n+n^3} \leq \dfrac{n}{k+n^3} \leq \dfrac{n}{1+n^3}$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n+n^3} \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{k+n^3} \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{1+n^3}$

$$\Rightarrow \frac{n^2}{n^3+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^3+1}$$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n^3+n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n^3+1} = 0$, alors

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ (théorème d'encadrement)

Exercice n° 3 $\quad U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}, \quad n \geq 1$

$V_n = U_{2n}, \quad W_n = U_{2n+1}$

1) Montrons que V_n et W_n sont adjacentes

a) $V_{n+1} - V_n = U_{2(n+1)} - U_{2n} = U_{2n+2} - U_{2n}$

$$= \cancel{\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} - \cancel{\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}}$$

$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{\cancel{2n}+2-\cancel{2n}-1}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0 \Rightarrow V_n \text{ est croissante}$$

b) $w_{n+1} - w_n = u_{2(n+1)+1} - u_{2n+1}$

$= u_{2n+3} - u_{2n+1}$

$= \cancel{\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+4}}{2n+3} - \cancel{\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}}$

$= \frac{-1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} = \frac{\cancel{-2n}-3+\cancel{2n}+2}{(2n+2)(2n+3)}$

$= \frac{-1}{(2n+3)(2n+2)} < 0 \Rightarrow w_n$ est décroissante

c) $w_n - v_n = u_{2n+1} - u_{2n}$

$= \cancel{\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} - \cancel{\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}}$

$= \boxed{\frac{1}{2n+1}}$. $\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} (w_n - v_n) =$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$

a, b, c montrent que v_n et w_n sont adjacentes.

2) comme $(u_{2n} = v_n)$ et $(u_{2n+1} = w_n)$ convergent vers la même limite l, alors u_n converge vers l.

Exercice n°01

$u_0 = 0$, $v_0 = 12$, $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$

et $v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$

1) Montrons que $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique de raison $1/6$.

on a $w_n = v_n - u_n \Rightarrow w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1}$

$= \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{2u_n + 4v_n - 3u_n - 3v_n}{6}$

$= \frac{v_n - u_n}{6} = \frac{1}{6} w_n$. Donc w_n est une suite géométrique de raison $1/6$ et de premier terme $\boxed{v_0 - u_0}$. avec $v_0 - u_0 > 0$

donc $w_n = w_0 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{12}{6^n} > 0$

2) Montrons que u_n et v_n sont adjacentes

a) $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2}$

$= \frac{v_n - u_n}{2} = \frac{1}{2} w_n > 0$ donc u_n est croissante

b) $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - v_n = \frac{u_n + 2v_n - 3v_n}{3}$

$= \frac{u_n - v_n}{3} = -\frac{(v_n - u_n)}{3} = -\frac{1}{3} \cdot w_n < 0$

car $\boxed{w_n > 0}$. Donc v_n est décroissante.

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n)$. Comme $v_n - u_n = \frac{12}{6^n}$

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{12}{6^n} = 0$

a, b, c montrent que v_n et u_n sont adjacentes.

3) Montrons que la suite (t_n) est constante

$t_n = 2u_n + 3v_n \Rightarrow t_{n+1} = 2u_{n+1} + 3v_{n+1}$

$= \cancel{2}\left(\frac{\cancel{2u_n} + v_n}{\cancel{2}}\right) + \cancel{3}\left(\frac{u_n + 2v_n}{\cancel{3}}\right)$

$= 2u_n + 3v_n = t_n = t_0 =$

$2u_0 + 3v_0 = 2(0) + 3(12) = 36$.

Comme limite on a : $36 = 2\ell + 3\ell = 5\ell$

$\Rightarrow \ell = 36/5$

Exercice n° 05

$u_0 < v_0$, $u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}$, $v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$

1) $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} - \frac{u_n + 2v_n}{3}$

$= \frac{2u_n + v_n - u_n - 2v_n}{3} = \frac{u_n - v_n}{3} = \frac{1}{3}(u_n - v_n)$

Donc $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n - v_n)$, alors

$(u_n - v_n)$ est une suite géométrique de raison $1/3$ et de premier terme $\boxed{u_0 - v_0}$

Ainsi $u_n - v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (u_0 - v_0)$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$

2) montrons que u_n et v_n sont adjacentes

on va montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n < v_n$.

pour $n = 0$ on a $u_0 < v_0$ (vraie)

supposons que $u_n < v_n$ et montrons que $u_{n+1} < v_{n+1}$

On a $u_n < v_n$ (hypothèse de récurrence)

alors $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n - v_n) < 0$

$\Rightarrow u_{n+1} < v_{n+1}$. Donc par récurrence

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\boxed{u_n < v_n}$.

a) $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + v_n}{3} - u_n = \frac{2u_n + v_n - 3u_n}{3}$

$= \frac{v_n - u_n}{3} > 0 \Rightarrow u_n$ est st croissante

b) $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - v_n = \frac{u_n + 2v_n - 3v_n}{3}$

$= \frac{(u_n - v_n)}{3} = \frac{-(\cancel{v_n} - v_n)}{3} < 0 \Rightarrow$

v_n est st décroissante

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n (v_0 - u_0) = 0$

a, b, c montrent que u_n et v_n sont adjacentes

comme u_n et v_n sont adjacentes alors u_n et v_n convergent vers la même limite ℓ

ona $u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{2} + \frac{u_n + 2v_n}{3}$

$= \frac{3u_n + 3v_n}{3} = u_n + v_n$ (constante)

alors $u_n + v_n = u_0 + v_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

à la limite

$$l + l = u_0 + v_0 \Rightarrow 2l = u_0 + v_0$$

$$\Rightarrow \boxed{l = \frac{u_0 + v_2}{2}}$$

Exercice n°02 $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$, $n \geq 0$

1) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n < 2$.

$\boxed{\text{Par récurrence}}$ on a :

- Pour $n=0$ $0 \leq u_0 = 0 < 2$ (vraie).
- on suppose que $0 \leq u_n < 2$ est vérifiée.

alors $0 \leq u_n < 2 \Leftrightarrow 2 \leq u_n + 2 < 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{u_n + 2} < \sqrt{4} \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq u_{n+1} < 2$

donc $\boxed{0 \leq u_{n+1} < 2}$. D'après la récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$ $\boxed{0 \leq u_n < 2}$.

2) Monotonie de (u_n).

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 2} - u_n = \frac{\left(\sqrt{u_n+2} - u_n\right)\left(\sqrt{u_n+2} + u_n\right)}{\sqrt{u_n+2} + u_n}$$

$$= \frac{u_n + 2 - u_n^2}{\sqrt{u_n+2} + u_n} = \frac{(u_n+1)(2-u_n)}{\sqrt{u_n+2} + u_n}$$

or $0 \leq u_n < 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors $(u_n+1)(2-u_n) > 0$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$

et par conséquent (u_n) est croissante.

Exercice n°2

3) $v_n = 2 - u_n$, $n \geq 0$:

a) Comme $u_n < 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors

$$2 - u_n > 0 \Rightarrow \boxed{v_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

b) $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2-u_{n+1}}{2-u_n} = \frac{2-\sqrt{u_n+2}}{2-u_n} =$$

$$\frac{\left(2-\sqrt{u_n+2}\right)\left(2+\sqrt{u_n+2}\right)}{(2-u_n)\left(2+\sqrt{u_2+2}\right)} = \frac{\cancel{(2-u_n)}}{\cancel{(2-u_n)}\left(2+\sqrt{u_n+2}\right)}$$

$= \dfrac{1}{2+\sqrt{u_n+2}}$. or $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad u_n \geq 0$

$$\Rightarrow \quad u_n + 2 \geq 2 \Rightarrow \sqrt{u_n+2} \geq \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 2 + \sqrt{u_n+2} \geq 2 + \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$2 + \sqrt{u_n+2} \geq 2 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2+\sqrt{u_n+2}} \leq \frac{1}{2}}$$

et par conséquent,

$$\boxed{v_{n+1} \leq \frac{1}{2} v_n}$$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$?

Pour la démonstration on va procéder par récurrence.

Exercice n°2

Pour $n=1$, on a $v_1 = 2-u_1 = 2-\sqrt{2} \leq 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$ est vérifiée.

On suppose que $v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, alors

$$v_{n+1} \leq \frac{1}{2} v_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ car } v_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc $v_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et par récurrence

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

d) Comme $\quad 0 < v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$, alors

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ et comme $u_n = 2 - v_n$,

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

Exercice n° 02