Analyse I

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année Ingénieur (ST-TM)
Année universitaire 2025–2026

✠– Série de TD numéro 3–✠

Exercice 1 : Calculer les limites suivantes :

$$1.\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right),\quad 2.\ \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x},\quad 3.\ \lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$4.\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2+2|x|}{x},\quad 5.\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x\cos(e^x)}{x^2+1},\quad 6.\ \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Exercice 2 : On considère la fonction suivante :

$$f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{\sin 2x}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 2 & \text{si } x=0\end{cases}$$

Étudier la continuité de f sur son domaine de définition.

Exercice 3 : On considère la fonction suivante :

$$f(x)=\begin{cases} xe^{\frac{1}{x}} & \text{si } x<0\\ 0 & \text{si } x=0\\ x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x>0\end{cases}$$

Étudier la continuité de f sur son domaine de définition.

Exercice 4 : Peut-on prolonger par continuité les fonctions suivantes au point x_0 ?

1. $f(x)=\dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{1+x}-1},\quad x_0=0.$
2. $f(x)=\dfrac{e^x-e^2}{x^2+x-6},\quad x_0=2.$

Exercice 5 : Montrer que l'équation $\frac{x}{3}+\tan x=0$ admet une et une seule racine sur l'intervalle $\left]\frac{3\pi}{4},\pi\right[$.

Exercice 6 : On considère la fonction réelle suivante :

$$f(x)=\begin{cases} \ln(\sqrt{1+x}) & \text{si } x>0\\ \dfrac{e^x-1}{2} & \text{si } x\leq 0\end{cases}$$

a. Étudier la continuité de f en $x=0$.
b. Étudier la dérivabilité de f en $x=0$ et donner l'expression de la fonction dérivée f'.

Exercice 7 :
1. En utilisant le théorème des accroissements finis, démontrer les inégalités suivantes.
   a. Pour tout $x>0$, on a $\frac{1}{1+x}<\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}$.
   b. Pour tout $x\in[0,1[$, on a $\frac{\pi}{2}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}<\arccos x<\frac{\pi}{2}-x$.
2. Calculer les limites suivantes à l'aide de la règle de l'Hôpital :

$$1.\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2},\quad 2.\ \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(2x)}{x+\sin(3x)},\quad 3.\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}.$$

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année Ingénieur (ST-TM)
Année universitaire 2025–2026

Analyse I

✠– Corrigé de la Série de TD numéro 3–✠

Exercice 1 :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ (FI)

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$ (FI)

$$= \lim_{x\to0}\frac{x\sin x(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \lim_{x\to0}\frac{x\sin x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x} = \lim_{x\to0}\frac{x\sin x(1+\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{x(1+\cos x)}{\sin x} = \lim_{x\to0}\frac{1+\cos x}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{2}{1} = 2 \quad \text{car } \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

3. $\lim\limits_{x\to0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (FI)

   On a $\lim\limits_{x\to0} x = 0$ et $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le 1$ (fonction bornée)

   Alors $\lim\limits_{x\to0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+2|x|}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$ (FI)

   On a

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2+2|x|}{x} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2+2x}{x} = +2 & \text{si } x>0 \\ \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2-2x}{x} = -2 & \text{si } x<0 \end{cases}$$

   Comme $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2+2|x|}{x} \neq \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2+2|x|}{x}$, alors $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+2|x|}{x}$ **n'existe pas**.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\cos(e^x)}{x^2+1}$ (FI)

   On a $\forall x\in\mathbb{R}$, $-1 \le \cos(e^x) \le +1 \Leftrightarrow -\frac{x}{x^2+1} \le \frac{x\cos(e^x)}{x^2+1} \le \frac{x}{x^2+1}$

   On a $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2+1} = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\cos(e^x)}{x^2+1} = 0$ (Théorème d'encadrement).

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ (FI)

   On pose le changement de variable $y = \frac{1}{x}$.
   Comme $x\to+\infty$, alors $y\to0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = \lim_{y\to0} e^{\ln(1+y)\cdot\frac{1}{y}} = \lim_{y\to0} e^{\frac{\ln(1+y)}{y}} = e^1 = e$$

Exercice 2 :
Soit la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{\sin(2x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Il est clair que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ (comme quotient et composition de fonctions continues).
$\triangleright$ **Continuité en $x = 0$:**
La fonction f est continue en 0 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$
Calculons la limite :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} f(x) &= \lim_{x \to 0} (x + \frac{\sin(2x)}{x}) = \lim_{x \to 0} (x + \frac{2\sin(2x)}{2x}) \\ &= \lim_{x \to 0} x + \lim_{x \to 0} \frac{2\sin(2x)}{2x} \\ &= 0 + 2 \times \lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \\ &= 0 + 2 \times 1 \quad (\text{car } \lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1) \\ &= 2 = f(0) \end{aligned}$$

Donc f est continue en $x = 0$. Par conséquent, f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Soit la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On détermine le domaine de définition de f : $D_f =]-\infty, 0[\cup \{0\} \cup]0, +\infty[= \mathbb{R}$.
$\triangleright$**Continuité de f sur son domaine de définition :**
- Sur $]-\infty, 0[$, $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ est continue comme produit de deux fonctions continues.
- Sur $]0, +\infty[$, $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue comme produit et composition de fonctions continues.

$\triangleright$ **Continuité de f en 0 :**
La fonction f est continue en 0 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$
On a $f(0) = 0$.

$$\lim_{x \to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = 0 = f(0) \quad \text{donc } f \text{ est continue à gauche de 0.}$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad (\text{FI})$$

On a $-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq +1 \Leftrightarrow -x^2 \leq x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$
En utilisant le théorème d'encadrement, on obtient :

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0) \quad \text{donc } f \text{ est continue à droite de 0.}$$

Comme $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$, alors f est continue en 0. Par conséquent f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 :

▷ **Prolongement par continuité des fonctions suivantes :**

1. $f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{1+x}-1}$ au point $x_0 = 0$. f est définie si $\sqrt{1+x}-1 \neq 0$ et $x+1 \geq 0$. Donc $D_f = [-1, 0[\cup]0, +\infty[$.
   On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1+x}-1} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)(\sqrt{1+x}+1)}{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)(\sqrt{1+x}+1)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)(\sqrt{1+x}+1)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} 2 \cdot \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot (\sqrt{1+x}+1) \\
&= 4, \quad \text{car } \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = 1
\end{aligned}$$

   La fonction f admet un prolongement par continuité en 0.
   Son prolongement par continuité est donné par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{1+x}-1} & \text{si } x \in D_f \\ 4 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. $f(x) = \dfrac{e^x - e^2}{x^2+x-6}$ en $x_0 = 2$. Il est clair que $x^2+x-6 = (x+3)(x-2)$.
   Le domaine de définition de la fonction f est $D_f =]-\infty, -3[\cup]-3, 2[\cup]2, +\infty[$.
   On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{e^x - e^2}{x^2+x-6} &= \lim_{x\to 2} \frac{e^x - e^2}{(x-2)(x+3)} \\
&= \lim_{x\to 2} \left(\frac{e^x - e^2}{x-2}\right) \times \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+3} \\
&= g'(2) \times \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+3} \\
&= \frac{e^2}{5}
\end{aligned}$$

   Ici $g(x) = e^x$ et $g'(x) = e^x$.
   Par suite :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^2}{x^2+x-6} & \text{si } x \in D_f \\ \dfrac{e^2}{5} & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

   est le prolongement par continuité de f en 2.

Exercice 5 : On définit la fonction $f(x) = \frac{x}{3} + \tan x$.
La fonction f est continue sur $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$. Comme $\tan(\pi) = 0$ et $\tan(\frac{3\pi}{4}) = -1$, alors :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \times f(\pi) &= \left[\left(\frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] \times \left(\frac{\pi}{3} + \tan\pi\right) \\ &= \left(\frac{\pi}{4} - 1\right) \times \frac{\pi}{3} \\ &\approx -0{,}215 \times 1{,}047 < 0 \end{aligned}$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\exists x_0 \in \left]\frac{3\pi}{4}, \pi\right[: f(x_0) = 0$$

C'est-à-dire $\exists x_0 \in \left]\frac{3\pi}{4}, \pi\right[: \frac{x_0}{3} + \tan x_0 = 0$.
Unicité :

$$f'(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{\cos^2 x} > 0 \text{ sur } \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$$

donc la fonction f est strictement croissante.
Par suite, la solution est unique.

Exercice 6 :
On considère la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{1+x}) & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{2} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$\triangleright$ **Continuité de f au point 0 :**
La fonction f est continue en 0 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$

$$f(0) = \frac{e^0 - 1}{2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{2} = 0 = f(0)$$

et

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln(\sqrt{1+x}) = 0 = f(0)$$

On a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \Rightarrow$ la fonction f est continue en 0.
$\triangleright$ **Dérivabilité de f au point 0 :**
La fonction f est dérivable en 0 $\Leftrightarrow f'_d(0) = f'_g(0) = f'(0)$
On a :

$$f'_g(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{e^x - 1}{2}}{x} = \frac{1}{2} \quad \text{car } \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\sqrt{1+x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{2} \quad \text{car } \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$f'_d(0) = f'_g(0) \Rightarrow f$ est dérivable en 0.

▷ **Dérivée de f :**
Pour $x > 0$, f est dérivable et on a :

$$f'(x) = (\ln\sqrt{1+x})' = \frac{(\sqrt{1+x})'}{\sqrt{1+x}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2(1+x)}$$

Pour $x < 0$, $f'(x) = \left(\frac{e^x-1}{2}\right)' = \frac{e^x}{2}$
D'où :

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1+x)} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{e^x}{2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 7 :
1. Utilisant le théorème des accroissements finis
a. $\forall x > 0, \quad \dfrac{1}{x+1} < \ln(1+x) - \ln x < \dfrac{1}{x}$
On considère la fonction $h(x) = \ln x$ sur $[x, x+1]$ avec $x > 0$.
La fonction h est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$.
D'après le théorème des accroissements finis, $\exists c \in]x, x+1[$ tel que :

$$h(x+1) - h(x) = (x+1-x)h'(c) \implies \ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c}$$

D'autre part :

$$x < c < x+1 \Rightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}, \quad \forall x > 0}$$

b. $\forall x \in [0, 1[, \quad \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} < \arccos x < \dfrac{\pi}{2} - x$
On considère la fonction $g(x) = \arccos x$ sur $[0, x]$ avec $0 < x < 1$.
La fonction g est continue sur $[0, x]$, dérivable sur $]0, x[$.
D'après le théorème des accroissements finis, $\exists c \in]0, x[$ tel que :

$$g(x) - g(0) = (x-0)g'(c)$$

$$\arccos x - \arccos 0 = x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}\right)$$

$$\Rightarrow \arccos x - \frac{\pi}{2} = -\frac{x}{\sqrt{1-c^2}}$$

D'autre part :

$$0 < c < x \Rightarrow 0 < c^2 < x^2 \Rightarrow -x^2 < -c^2 < 0 \Rightarrow 1 - x^2 < 1 - c^2 < 1$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{1}{1-c^2} < \frac{1}{1-x^2} \Rightarrow 1 < \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} < \frac{-1}{\sqrt{1-c^2}} < -1 \Rightarrow -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} < -\frac{x}{\sqrt{1-c^2}} < -x.$$

$$\text{Comme} \quad \arccos x - \frac{\pi}{2} = -\frac{x}{\sqrt{1-c^2}} \quad \text{alors :}$$

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} < \arccos x - \frac{\pi}{2} < -x$$

$$\text{Donc} \quad \boxed{\frac{\pi}{2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} < \arccos x < \frac{\pi}{2} - x \quad \forall x \in [0,1[}.$$

2. Calcul de limites à l'aide de la règle de l'Hôpital
   - $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}$ (la règle de l'Hôpital).
   - $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(2x)}{x+\sin(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-2\cos(2x)}{1+3\cos(3x)} = \frac{1-2}{1+3} = -\frac{1}{4}$ (la règle de l'Hôpital).
   - $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-x-1}{x^2}$ (FI)

   On a $\lim\limits_{x\to 0}(e^x - x - 1) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ et $(x^2)' = 2x \neq 0$ pour $x \neq 0$.
   Donc on peut appliquer la règle de l'Hospital et on aura :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - x - 1)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} \quad \text{(FI)}$$

   On applique la deuxième fois la règle de l'Hôpital ; on obtient :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$$