

Exercice 5

Résolution de $E(2x) = E(x) + 1$

Par définition $E(x) = \lfloor x \rfloor$ donne le plus grand entier inférieur ou égal à x . Donc pour tout nombre réel x , on peut écrire $x = E(x) + p$ avec $p \in [0, 1[$ (la différence de $x - E(x)$)

Pour la résolution on pose $E(x) = n$ (où n est un entier) et $p \in [0, 1[$, donc

$$n \leq x < n+1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - n \geq 0 \\ x - n - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - n \geq 0 \\ x - n < 1 \end{cases} \quad \text{Donc}$$

$$x = n + p \quad \text{avec } 0 \leq p < 1$$

$$\Rightarrow 2x = 2n + 2p$$

$$\text{Donc } E(x) = n \Rightarrow \boxed{E(x) + 1 = n + 1}$$

$$\text{et } E(2x) = E(\underbrace{2n}_{\text{entier}} + \underbrace{2p}_{\text{réel}})$$

$$\text{Comme } E(x+k) = E(x) + k \quad \left(\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R} \\ \forall k \in \mathbb{Z} \end{array} \right)$$

$$\text{alors } E(2n + 2p) = E(2n) + E(2p)$$

$$= 2n + E(2p)$$

$$\text{avec } E(2p) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2p \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } 2p \in [1, 2[\end{cases}$$

□ 1

$$\Rightarrow E(2p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \in [0, \frac{1}{2}[\\ 1 & \text{si } p \in [\frac{1}{2}, 1[\end{cases}$$

Donc dans le cas où $p \in [0, \frac{1}{2}[$ on obtient

$$x = n + p \in [n, n + \frac{1}{2}[$$

et dans ce cas

$$E(2x) = 2n, \text{ donc}$$

$$E(2x) = E(x) + 1 \Rightarrow$$

$$2n = n + 1 \Rightarrow \boxed{n = 1}$$

$$\text{alors } x \in [n, n + \frac{1}{2}[= [1, 1.5[$$

Dans le cas où $p \in [\frac{1}{2}, 1[$ on obtient

$$x = n + p \in [n + \frac{1}{2}, n + 1[$$

et dans ce cas

$$E(2x) = 2n + 1, \text{ donc}$$

$$E(2x) = E(x) + 1 \Rightarrow$$

$$2n + 1 = n + 1 \Rightarrow n = 0, \text{ alors}$$

$$x \in [n + \frac{1}{2}, n + 1[= [\frac{1}{2}, 1[$$

Comme $p \in [0, 1[=$

$$[0, \frac{1}{2}[\cup [\frac{1}{2}, 1[, \text{ alors}$$

la solution finale est

$$x \in [\frac{1}{2}, 1[\cup [1, 1.5[$$

$$\Rightarrow \boxed{x \in [\frac{1}{2}, 1.5[}$$

□ 2

Exercice n°06

Résolution de $E(|x|) = 2|E(x)| \rightarrow \star$

Pour résoudre $\star$ on distingue les deux cas suivants

Cas 1 ($x \geq 0$) si $x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} |x| = x \\ E(x) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| = x \\ |E(x)| = E(x) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} E(|x|) = E(x) \\ |E(x)| = E(x) \end{cases}$, alors $E(|x|) = 2|E(x)| \Rightarrow E(x) = 2E(x)$

$\Rightarrow E(x) = 0 \Rightarrow x \in [0, 0+[\mathrel{\text{donc}} \text{ comme solutions on a}$

$$S = [0, 1[$$

Cas 2 ($x < 0$) si $x < 0 \Rightarrow \begin{cases} |x| = -x \\ E(x) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| = -x \\ |E(x)| = -E(x) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} E(|x|) = E(-x) \\ |E(x)| = -E(x) \end{cases}$, alors $E(|x|) = 2|E(x)| \Leftrightarrow E(-x) = -2E(x)$

$\Rightarrow \boxed{E(-x) = -2E(x)}$

$\star\star$ Pour résoudre $\star\star$, on distingue les deux cas suivants

a) $x < 0$ et $x \notin \mathbb{Z}$.

b) $x < 0$ et $x \in \mathbb{Z}$.

a) $x = -n + p$ avec $n \in \mathbb{N}$, $p \in]-1, 0[$, alors

$$E(x) = E(-n + p) \stackrel{\text{d'f}}{=} E(-n) + E(p) \text{ car } \underline{\text{par définition}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, E(x+k) = E(x) + \underline{k}.$$

$$\text{Donc } E(x) = E(-n) + E(p) = -n + E(p) \quad E''(k)$$

Comme $p \in]-1, 0[$, alors la première valeur entière $\leq p$ est $\underline{-1}$, donc $E(p) = -1$, alors $E(-n+p) = -n-1$

$$\Rightarrow \boxed{E(x) = -n-1}.$$

$$\underline{\underline{x = -n + p}} \Rightarrow -x = -(n+p) = n-p \text{ avec } -p \in]0, 1[$$

$$\Rightarrow -x = n + (-p) \Rightarrow E(-x) = E(n) + E(-p) = n + E(-p)$$

Comme $-p \in]0, 1[$ alors la première valeur entière $\leq -p$ est 0 , donc $E(-p) = 0$, donc $\boxed{E(-x) = n}$

$$\text{par suite } E(-x) = -2E(x) \Rightarrow n = -2(-n-1) \Rightarrow$$

$$n = 2n + 2 \Rightarrow \boxed{n = -2} \text{ impossible car } \boxed{n \in \mathbb{N}}.$$

$$b) x = -n, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow E[x] = -n$$

$$x = -n, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow -x = n, n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow E[-x] = n, \text{ donc } E(-x) = -2E(x) \Leftrightarrow$$

$$n = -2(-n) \Rightarrow n = 2n \Rightarrow n = 0, \text{ impossible}$$

car $n \in \mathbb{N}^* (n \geq 1)$. Dans le cas où $x < 0$

l'équation $E[|x|] = 2|E(x)|$ n'a pas de solution,

alors la solution finale est $S = [0, 1[$