Analyse I

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année LMD
Année universitaire 2025–2026

✠– Série de TD numéro 2–✠

Exercice 1 :
a. Déterminer la limite éventuelle de chacune des suites numériques suivantes :

1. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, 2. $v_n = \dfrac{n \sin n}{n^2+1}$ 3. $w_n = \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$ 4. $\frac{3^n+(-3)^n}{3^n}$.

b. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite définie par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^3+k}$.
Montrer, à l'aide du théorème d'encadrement, que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 2 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n} \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.
2. Étudier la monotonie de (u_n).
3. Déduire la convergence de (u_n) et calculer sa limite.
4. Déterminer $supE$, $InfE$ où $E = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 3 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite définie par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.
On considère deux suites v_n et w_n définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
1. Montrer que (v_n) et (w_n) sont adjacentes.
2. En déduire que (u_n) converge.

Exercice 4 : Soient (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = \dfrac{u_{n-1}-1}{u_{n-1}+3}$
et (v_n) la suite définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n+1}$.
1. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique
2. Montrer que la suite (u_n) converge et calculer sa limite.

Exercice 5 : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3} - \dfrac{1}{4} \end{cases} \quad \text{et } v_n = u_n + \frac{3}{8}.$$

1. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et déduire que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.
2. Exprimer v_n en fonction de n et calculer sa limite.
3. En déduire la limite de la suite u_n.

« Corrigé »

Exercice n°01

a) Calcul de limites

En multipliant et en divisant par le conjugué

1. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$

$$\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n(1+1/n)}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1}\right)$$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

2. $v_n = \dfrac{n\sin n}{n^2+1}$, Il est clair que $-1 \leq \sin n \leq 1$

$$\Rightarrow \quad -n \leq n\sin n \leq n$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-n}{n^2+1} \leq \frac{n\sin n}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-n}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n^2+1} = 0$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$$

3) $w_n = \dfrac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} = \dfrac{2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n}{2^n + 3^n}$

$= \dfrac{3^n\left(2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3\right)}{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right)} = \dfrac{2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, alors $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 3}$

4) $t_n = \dfrac{3^n + (-3)^n}{3^n}$ on distingue deux cas

Si n pair : $(-3)^n = 3^n \Rightarrow t_n = \dfrac{3^n + 3^n}{3^n} = 2$

Si n impair ; $(-3)^n = -3^n \Rightarrow t_n = \dfrac{3^n - 3^n}{3^n} = 0$

dans ce cas t_n n'admet pas de limite.

5) $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^3 + k}$

$1 \leq k \leq n$

$\Rightarrow 1 + n^3 \leq k + n^3 \leq n + n^3$

$\Rightarrow \dfrac{1}{n+n^3} \leq \dfrac{1}{k+n^3} \leq \dfrac{1}{1+n^3}$

$\Rightarrow \dfrac{n}{n+n^3} \leq \dfrac{n}{k+n^3} \leq \dfrac{n}{1+n^3}$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n+n^3} \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{k+n^3} \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{1+n^3}$

$\Rightarrow$

$$\frac{n^2}{n^3+n} \le u_n \le \frac{n^2}{n^3+1}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^3+n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^3+1} = 0$, alors

d'après le théorème d'encadrement

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

Exercice n°02. $\begin{cases} u_0 = 1/2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n} \end{cases}$

1. Montrons que

$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \le u_n < 1$ (démonstration par récurrence)

Pour $n=0$, on a $0 < \left(u_0 = \frac{1}{2}\right) < 1$, donc

la propriété est vraie pour $n=0$.

Supposons que la propriété est vraie pour n ($0 < u_n < 1$) et montrons que

$$0 < u_{n+1} < 1.$$

On a $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n} > 0$ $\left(\underline{\underline{\text{car } u_n > 0}}\right)$

$$u_{n+1} - 1 = \frac{3u_n}{1+2u_n} - 1 = \frac{3u_n - 2u_n - 1}{1+2u_n}$$

$$= \frac{u_n - 1}{1+2u_n} < 0 \quad (\text{car } u_n < 1)$$

$\Rightarrow \boxed{u_{n+1} < 1}$. Donc $0 < u_{n+1} < 1$.

Par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$: $\boxed{0 < u_n < 1}$.

2) Monotonie

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n}{1+2u_n} - u_n = \frac{3u_n - u_n - 2u_n^2}{1+2u_n}$$

$$= \frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n} > 0 \quad \left(\text{car } u_n > 0 \text{ et } u_n < 1 \; (\boxed{1-u_n > 0})\right)$$

alors u_n est strictement croissante.

3) Convergence et limite de (u_n) :

Comme u_n est $\nearrow$, majorée par 1, alors u_n converge vers $0 < \ell \leq 1$

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n} \Rightarrow \ell = \frac{3\ell}{1+2\ell} \Rightarrow$$

$(1+2\ell)\ell = 3\ell \Rightarrow \ell + 2\ell^2 - 3\ell = 0$

$\Rightarrow 2(\ell^2 - \ell) = 0 \Rightarrow 2\ell(\ell - 1) = 0$

$\Rightarrow \ell = 0$ ou $\ell = 1$.

Comme $u_n \nearrow$ et $u_0 = 1/2$, alors $l = 1$

u) $E = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$:

$u_n \nearrow$ avec la valeur $u_0 = 1/2$ (plus petite valeur)

alors $\operatorname{Inf}(E) = 1/2$

u_n majorée par 1 et $\left(\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1\right)$,

alors $\operatorname{Sup}(E) = 1$.

Exercice n°03 $\quad u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, $n \geq 1$;

$v_n = u_{2n}$, $w_n = u_{2n+1}$

1) Montrons que v_n et w_n sont adjacentes

a) $v_{n+1} - v_n = u_{2(n+1)} - u_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n}$

$$= \cancel{\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} - \cancel{\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}}$$

$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{\cancel{2n}+2-\cancel{2n}-1}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$$, alors v_n est croissante

b) $W_{n+1} - W_n = U_{2(n+1)+1} - U_{2n+1}$

$= U_{2n+3} - U_{2n+1}$

$= \cancel{\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+4}}{2n+3} - \cancel{\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}}$

$= \frac{-1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} = \frac{\cancel{-2n}-3+\cancel{2n}+2}{(2n+2)(2n+3)}$

$= \frac{-1}{(2n+2)(2n+3)} < 0$, alors W_n est décroissante.

c) $W_n - V_n = U_{2n+1} - U_{2n}$

$= \cancel{\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} - \cancel{\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}}$

$= \boxed{\frac{1}{2n+1}} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} W_n - V_n =$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$

a, b et c montrent que V_n et W_n sont adjacents

2) Comme $(u_{2n} = v_n)$ et $(u_{2n+1} = w_n)$ convergent vers la même limite ℓ alors u_n converge vers ℓ.

Exercice n° 04

$$n \geq 1 \quad \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1} - 1}{u_{n-1} + 3} \end{cases}, \quad v_n = \frac{1}{u_n + 1}$$

1) Montrons que (v_n) est une suite arithmétique.

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} + 1} = \frac{1}{\frac{u_n - 1}{u_n + 3} + 1}$$

$$= \frac{1}{\frac{u_n - 1 + u_n + 3}{u_n + 3}} = \frac{1}{\frac{2u_n + 2}{u_n + 3}}$$

$$= \frac{u_n + 3}{2u_n + 2} = \frac{u_n + 3}{2(u_n + 1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n + 3}{u_n + 1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{u_n + 1}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{u_n + 1} = \boxed{\frac{1}{2} + v_n}$$

$\Rightarrow \boxed{v_{n+1} = \frac{1}{2} + v_n}$, $n \geq 1 \Rightarrow v_n$ est une suite arithmétique de raison $1/2$

avec $\boxed{v_0 = \frac{1}{u_0 + 1} = 1}$

2) Convergence et limite de (U_n) :

$V_n + \frac{1}{2} = V_{n+1}$, alors

$V_1 = V_0 + 1/2$, $V_2 = V_1 + 1/2 = V_0 + 1/2 + 1/2$

$\ldots V_n = V_0 + \underbrace{1/2 + 1/2 \cdots + 1/2}_{n \text{ fois}} = V_0 + \frac{n}{2} =$

$\boxed{1 + \frac{n}{2}}$. Comme $V_n = \frac{1}{U_n + 1} \Rightarrow$

$(U_n + 1) = \frac{1}{V_n} \Rightarrow$

$U_n = \frac{1}{V_n} - 1 = \frac{1}{1 + \frac{n}{2}} - 1$

$= \frac{2}{2+n} - 1 = \frac{2-2-n}{2+n} = \boxed{\frac{-n}{2+n}}$

Donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = -1}$

Exercice n°05

$u_0 = 0$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{3} - 1/4$ et

$v_n = u_n + 3/8$.

1) $v_{n+1} = f(v_n)$:

On a $v_{n+1} = u_{n+1} + 3/8 = \left(\frac{u_n}{3} - 1/4\right) + 3/8$

$= \boxed{\frac{u_n}{3} + 1/8}$. Comme $v_n = u_n + 3/8$

alors $u_n = v_n - 3/8$, donc

$v_{n+1} = \frac{u_n}{3} + 1/8 = \frac{1}{3}\left(v_n - 3/8\right) + 1/8$

$= \frac{1}{3} v_n - 1/8 + 1/8 = 1/3\, v_n \Rightarrow$

$\boxed{v_{n+1} = 1/3\, v_n}$. Donc v_n est une suite géométrique de raison $1/3$

et $v_0 = u_0 + 3/8 = 0 + 3/8 = 3/8$

2) $v_n = f(n)$: $v_n = v_0 q^n = \frac{3}{8}\left(1/3\right)^n$

Comme $|1/3| < 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} v_n = 0$

3) $\lim_{n \to +\infty} u_n$: on a : $u_n = v_n - 3/8 \Rightarrow$

$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n - 3/8 = -3/8$.