5.5.1 Fonction inverse des fonctions trigonométriques

Fonction arc sinus

La fonction $f:\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\longrightarrow[-1,+1]$ définie par $f(x)=\sin x$ étant continue et strictement croissante sur $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ($f'(x)=\cos x>0\ \forall x\in\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$). Elle admet une fonction réciproque $f^{-1}:[-1,+1]\longrightarrow\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ appelée fonction **arc sinus** qui est continue et strictement croissante sur $[-1,+1]$. On la note $\arcsin$. Ainsi

$$\left\{\begin{array}{l} y=\arcsin x\\ x\in[-1,+1]\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\sin y\\ y\in\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\end{array}\right.$$

et

$$\begin{aligned}(\arcsin)'(x) &= \frac{1}{\cos y}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x|<1.\end{aligned}$$

Fonction arc cosinus

La fonction $f:[0,\pi]\longrightarrow[-1,+1]$ définie par $f(x)=\cos x$ étant continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$ ($f'(x)=-\sin x>0\ \forall x\in\left]0,\pi\right[$). Elle admet une fonction réciproque $f^{-1}:[-1,+1]\longrightarrow[0,\pi]$ appelée fonction **arc cosinus** qui est continue et strictement décroissante sur $[-1,+1]$. On la note $\arccos$. Ainsi

$$\left\{\begin{array}{l} y=\arccos x\\ x\in[-1,+1]\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\cos y\\ y\in[0,\pi]\end{array}\right.$$

et

$$\begin{aligned}(\arccos)'(x) &= \frac{1}{-\sin y}\\ &= \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}\\ &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x|<1.\end{aligned}$$

Fonction arc tangente

La fonction $f:\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\tan x$ étant continue et strictement croissante sur $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ ($f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}>0\ \forall x\in\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$). Elle admet une fonction réciproque $f^{-1}:\mathbb{R}\longrightarrow\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ appelée fonction **arc tangente** qui est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On la note $\arctan$. Ainsi

$$\left\{\begin{array}{l} y=\arctan x\\ x\in\mathbb{R}\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\tan y\\ y\in\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\end{array}\right.$$

et

$$(\arctan)'(x)=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2},\forall x\in\mathbb{R}.$$

Fonction arc cotangente

La fonction $f:\left]0,\pi\right[\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\cot x$ étant continue et strictement décroissante sur $\left]0,\pi\right[$ ($f'(x)=\frac{-1}{\sin^2 x}>0\ \forall x\in\left]0,\pi\right[$). Elle admet une fonction réciproque $f^{-1}:\mathbb{R}\longrightarrow\left]0,\pi\right[$ appelée fonction **arc cotangente** qui est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. On la note arccot. Ainsi

$$\left\{\begin{array}{l} y=\operatorname{arccot} x\\ x\in\mathbb{R}\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\cot y\\ y\in\left]0,\pi\right[\end{array}\right.$$

et

$$(\operatorname{arccot})'(x)=\frac{-1}{1+\cot^2 y}=\frac{-1}{1+x^2},\forall x\in\mathbb{R}.$$

$\forall x\in D_f, \sin(\arcsin x)=x;\ \cos(\arccos x)=x;\ \tan(\arctan x)=x;\ \cot(\operatorname{arccot} x)=x.$

Mais $\arcsin(\sin x)=x$ si $x\in\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et $\arccos(\cos x)=x$ si $x\in[0,\pi]$; etc...

1. $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$;
2. $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \dfrac{\pi}{2}$;
3. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$;
4. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$;
5. $\arctan(-x) = -\arctan x$;
6. $\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x$;
7. $\cos(\arcsin x) = \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$;
8. $\cos(\arctan x) = \sin(\operatorname{arccot} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
9. $\sin(\arctan x) = \cos(\operatorname{arccot} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;
10. $\tan(\arccos x) = \cot(\arcsin x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$;
11. $\arccos \frac{1}{x} + \arcsin \frac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$.

5.5.2 Fonctions hyperboliques et leurs inverses

Fonction sinus hyperbolique

La fonction **sinus hyperbolique** est définie par

$$\begin{array}{rccl} \sinh : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}. \end{array}$$

$\lim_{x\to\pm\infty} \sinh = \pm\infty$.

Fonction cosinus hyperbolique

La fonction **cosinus hyperbolique** est définie par

$$\begin{array}{rccl} \cosh : & \mathbb{R} & \longrightarrow & [1, +\infty[\\ & x & \longmapsto & \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{array}$$

cosh est une fonction paire, $(\cosh)'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
$\lim_{x\to-\infty} \cosh x = +\infty, \lim_{x\to+\infty} \cosh x = +\infty$, cosh est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

Fonction tangente hyperbolique

La fonction **tangente hyperbolique** est définie par

$$\begin{array}{rccl} \tanh : & \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1, +1[\\ & x & \longmapsto & \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \end{array}$$

$\tanh' : (x) = 1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}, \forall x \in \mathbb{R}; \lim_{x\to-\infty} \tanh x = -1,$
$\lim_{x\to+\infty} \tanh x = +1$.

Fonction cotangente hyperbolique

La fonction **cotangente hyperbolique** est définie par

$$\begin{array}{rccl} \coth : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow &]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\\ & x & \longmapsto & \coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{1}{\tanh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}. \end{array}$$

coth est une fonction impaire et est strictement décroissante et bijective de $\mathbb{R}^*$ dans $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. On a coth $\in$
$(\coth)'(x) = 1 - \coth^2 x = \dfrac{-1}{\sinh^2 x}, \forall x \in \mathbb{R}^*; \lim_{x\to-\infty} \coth x = -1, \lim_{x\to+\infty} \coth x = +1,$
$\lim_{x\to-1^-} \coth x = -\infty, \lim_{x\to 1^+} \coth x = +\infty$.

Propriétés des fonctions hyperboliques

$\cosh x + \sinh x = e^x$, $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$, $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$;
$\cosh(x+y) = \cosh x . \cosh y + \sinh x \sinh y$;
$\sinh(x+y) = \sinh x . \cosh y + \sinh y . \cosh x$;
$\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 - \tanh x . \tanh y}$;
$1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$; $\cosh(2x) = 2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x$.

Fonction argument sinus hyperbolique

La fonction sinh est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle admet une fonction réciproque $f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ appelée fonction **argument sinus hyperbolique**. On la note $\arg\sinh$. Ainsi

$$\begin{cases} y = \arg\sinh x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \sinh y \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Donc $\quad e^{2y} = \dfrac{1+x}{1-x}$

La fonction $\arg\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} (\arg\sinh)'(x) &= \frac{1}{\cosh y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

D'où $\arg\sinh \in C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\lim_{x\to-\infty} \arg\sinh x = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \arg\sinh x = +\infty$. On a

$$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1 \Longrightarrow \cosh y = \sqrt{1+\sinh^2 y} = \sqrt{1+x^2}.$$

Donc

$$\cosh y + \sinh y = e^y = x + \sqrt{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \arg\sinh x = y = \ln e^y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$$

Fonction argument cosinus hyperbolique

La fonction $f : [0,+\infty[\to [1,+\infty[$ définie par $f(x) = \cosh x$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Elle admet une fonction réciproque $f^{-1} : [1,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ continue et strictement croissante, appelée fonction **argument cosinus hyperbolique**. On la note $\arg\cosh$. Ainsi

$$\begin{cases} y = \arg\cosh x \\ x \in [1,+\infty[\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \cosh y \\ y \in [0,+\infty[. \end{cases}$$

La fonction $\arg\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} (\arg\cos)'(x) &= \frac{1}{\sinh y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \forall x \geq 1. \end{aligned}$$

$\lim_{x\to+\infty} \arg\cosh x = +\infty$. On a

$$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1 \Longrightarrow \sinh y = \sqrt{\cosh^2 y - 1} = \sqrt{x^2-1}.$$

Donc

$$\cosh y + \sinh y = e^y = x + \sqrt{x^2-1}$$

$$\Rightarrow \quad \arg\cosh x = y = \ln e^y = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \forall x \geq 1.$$

Fonction argument tangente hyperbolique

La fonction $f : \mathbb{R} \to]-1,+1[$ définie par $f(x) = \tanh x$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle admet une fonction réciproque $f^{-1} :]-1,+1[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement croissante, appelée fonction **argument tangente hyperbolique**. On la note $\arg\tanh$. Ainsi

$$\begin{cases} y = \arg\tanh x \\ x \in]-1,+1[\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On a pour $|x| < 1 \quad x = \dfrac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$. Donc $\quad e^{2y} = \dfrac{1+x}{1-x}$

$$\Rightarrow \quad \arg\tan x = y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

$(\arg\tan)'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$, $|x| < 1$ et $\lim_{x\to -1^+} \arg\tanh x = -\infty$, $\lim_{x\to +1^-} \arg\tanh x = +\infty$.
La fonction $\arg\tan \in C^\infty\left(]-1,+1[\,,\mathbb{R}\right)$.

Fonction argument cotangente hyperbolique

$$\begin{array}{rccl} \coth : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow &]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\\ & x & \longmapsto & \coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{1}{\tanh x} = \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} \end{array}$$

est bijective, donc elle admet une fonction réciproque dite **argument cotangente hyperbolique**. On la note $\arg\coth$.
Ainsi

$$\left\{\begin{array}{l} y = \arg\coth x \\ |x| > 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = \cot y \\ y \in \mathbb{R}^*. \end{array}\right.$$

On peut montrer que

$\arg\coth x = y = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$, $|x| > 1$.