

Limites de quelques fonctions trigonométriques

1 Limites fondamentales

1.1 Limite de référence

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (1)$$

1.2 Limites dérivées

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 \quad (4)$$

Remarque : Les limites 1,2 et 4 peuvent être obtenus par la règle de l'Hôpital ou bien en utilisant la définition de limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$. Par contre la limite 3 peut être calculée avec l'Hôpital ou bien en multipliant $\frac{1 - \cos x}{x^2}$ par $\frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}$.

2 Limites avec combinaisons linéaires

2.1 Type : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} = \frac{a}{b} \quad (5)$$

Exemples :

$$\begin{aligned} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} &= \frac{3}{5} \\ - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin x} &= 2 \end{aligned}$$

2.2 Type : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{bx}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{bx} = \frac{a}{b} \quad (6)$$

Exemples :

$$\begin{aligned} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x} &= \frac{5}{2} \\ - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} &= 3 \end{aligned}$$

2.3 Type : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{\tan(bx)}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{\tan(bx)} = \frac{a}{b} \quad (7)$$

Exemple :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x}{\tan 2x} = 2$$

2.4 Type : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\tan(bx)}$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\tan(bx)} = \frac{a}{b}} \quad (8)$$

Méthode :

$$\frac{\sin(ax)}{\tan(bx)} = \frac{\sin(ax) \cdot \cos(bx)}{\sin(bx)} \rightarrow \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$$

3 Limites avec cosinus

3.1 Forme avec $1 - \cos x$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} = \frac{a^2}{2}} \quad (9)$$

Exemples :

$$\begin{aligned} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} &= \frac{4}{2} = 2 \\ - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

3.2 Type : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{1 - \cos(bx)}$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{1 - \cos(bx)} = \frac{a^2}{b^2}} \quad (10)$$

Exemple :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{1 - \cos 2x} = \frac{9}{4}$$

4 Quotients combinés

4.1 Type : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin x + b \tan x}{cx}$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin x + b \tan x}{cx} = \frac{a + b}{c}} \quad (11)$$

Exemple :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x + 3 \tan x}{x} = 2 + 3 = 5$$

4.2 Type : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} = -\frac{1}{2}} \quad (12)$$

5 Limites en un point $x_0 \neq 0$

5.1 Limites directes (par continuité)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0 \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0 \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \tan x = \tan x_0 \quad (\text{si } x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi) \quad (15)$$

5.2 Formes $\frac{0}{0}$ en x_0 (dérivées)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \cos x_0 \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = -\sin x_0 \quad (17)$$

Exemples :

$$\begin{aligned} - \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin x - 1}{x - \pi/2} &= \cos(\pi/2) = 0 \\ - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} &= -\sin 0 = 0 \end{aligned}$$

6 Limites à l'infini

6.1 Cas où la Limite n'existent pas

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x \quad \text{n'existe pas (Compris entre -1 et 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x \quad \text{n'existe pas}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tan x \quad \text{n'existe pas}$$

6.2 Quotients avec polynômes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0 \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \quad (20)$$

Démonstration de la dernière :

Posons $u = \frac{1}{x}$, quand $x \rightarrow +\infty$, $u \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

6.3 Produits bornés

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0 \quad (21)$$

Méthode : Encadrement

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \implies -\frac{1}{x^2} \leq \frac{\sin x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

Par le théorème des gendarmes : limite = 0

7 Exemples

7.1 Exemple 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 2x + 4 \tan 3x}{5x}$$

Solution :

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 \sin 2x}{5x} + \frac{4 \tan 3x}{5x} \right) \\ &= \frac{3 \cdot 2}{5} + \frac{4 \cdot 3}{5} \\ &= \frac{6 + 12}{5} = \frac{18}{5} \end{aligned}$$

7.2 Exemple 2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x}$$

Solution avec formule de Simpson : (Cette méthode est donnée à titre d'information seulement)

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \sin \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

$$\sin 5x - \sin 3x = 2 \cos(4x) \sin(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(4x) \sin(x)}{x} = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$$

7.3 Exemple 4

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x}$$

Solution :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} \cdot x = 1 \cdot 0 = 0$$

7.4 Exemple 5

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x}$$

Solution :

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) = 1 + 0 = 1$$

8 Résumé

Limite	Résultat
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{bx}$	$\frac{a}{b}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{bx}$	$\frac{a}{b}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{x^2}$	$\frac{a^2}{2}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$	$\frac{a}{b}$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$	0
$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \left(\frac{1}{x} \right)$	1

9 Remarques

9.1 Méthodes de résolution

1. **Factorisation :** Utiliser les formules trigonométriques
2. **Règle de L'Hôpital :** En dernier recours

9.2 Formules trigonométriques

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \left(\frac{p + q}{2} \right) \sin \left(\frac{p - q}{2} \right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \left(\frac{p + q}{2} \right) \sin \left(\frac{p - q}{2} \right)$$