Limites-Continuité-Dérivabilité

Exercices

Exercice 1. Déterminer pour chaque fonction f ci-dessous le domaine de définition :

1) $f(x) = \ln(\sqrt{1-x^2})$, 2) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}}$,

3) $f(x) = (\dfrac{x}{x+1})^{x^2}$, 4) $f(x) = \sqrt{\cos(2x)}$,

5) $f(x) = \ln(\ln(1+x))$, 6) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & , \ x \geq 0 \\ 1 & , \ x < 0 \end{cases}$,

7) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2-x} & , \ x \geq 0 \\ x^3 + x & , \ x < -1 \end{cases}$ 8) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

Exercice 2. Calculer les limites suivantes, en utilisant si nécessaire les fonctions équivalentes (pas de règle de l'Hopital) :

1) $\underset{x \longrightarrow +\infty}{lim} \dfrac{-3x^2+5x-10}{2x^2+10}$ 2) $\underset{x \longrightarrow +\infty}{lim} x - \sqrt{1+x^2}$

3) $\underset{x \longrightarrow +\infty}{lim} x \ln \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ 4) $\underset{x \longrightarrow 0}{lim} x^2 \cos(\dfrac{1}{x})$

5) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \sin(x)\ln(x)$ 6) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{1-\cos^2(x)}{tg(2x)}$

7) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$ 8) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\ln(1+2x+x^2)}{x}$

9) $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{1-x}{\sqrt{5-x^2}-2}$ 10) $\lim\limits_{x\longrightarrow \frac{\pi}{4}} \dfrac{1-tg(x)}{\sin(x)-\cos(x)}$

11) $\lim\limits_{x\longrightarrow 2} \dfrac{x^4-16}{x-2}$ 12) $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}$

Exercice 3. Etudier la continuité des fonctions suivantes sur leurs domaines de définition et indiquer si elles peuvent être prolongées par continuité en certains points :

1) $f_1(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ 2) $f_2(x) = x^2\sin(\dfrac{1}{x^2})$

3) $f_3(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{x-1}$ 4) $f_4(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{|x-1|}$

5) $f_5(x) = \begin{cases} x^3-4x & \text{si } x \leq 0 \\ \vee & \\ \sin(3x) & \text{si } 0 < x \leq \pi \\ \vee & \\ -1+\cos(2x) & \text{si } x > \pi \end{cases}$

6) $f_6(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{\sin(2x)}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \vee & \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Exercice 4. Déterminer le réel a pour que la fonction f soit continue sur son domaine de définition :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2}-1}{\sin(2x^2)} & \text{si } -\pi < x < 0 \\ x-a+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 5.

1) Montrer que l'équation $xe^x = 1$ admet au moins une solution dans $]0, 1[$.

2) Montrer que l'équation $4x^3 - 3x + \dfrac{1}{2} = 0$ admet exactement

trois solutions dans $]-1, 1[$.

3) Montrer que l'équation $x^3 + 3x + 1 = 0$ admet au moins une solution entre -1 et 0. La solution est-elle unique ?

Exercice 6. Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes sur le domaine de définition et déterminer leurs dérivées :

1) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ \vee & \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{-1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ \vee & \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ \vee & \\ \cos^2\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) & \text{si } x > -1 \end{cases}$

Exercice 7 :
a) En utilisant la règle de l'Hopital, calculer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x - x\cos(x)}{x - \sin(x)}$ 2) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x - \frac{\pi}{2})}{\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}}$

3) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x - \sin(x)}{2x + \sin(x)}$ 4) $\displaystyle\lim_{x \to 4} (5 - x)^{\left(\frac{1}{x - 4}\right)}$

b) En utilisant le théorème des accroissements finis (TAF),

Montrer que :

1) Pour $0 < a < b$, $\dfrac{b-a}{b} < \ln(\dfrac{b}{a}) < \dfrac{b-a}{a}$.

2) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq x+1$

Exercice 8. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes, les limites aux bornes des intervalles et leurs fonctions dérivées :

1) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$	2) $f(x) = \arccos(\ln(x))$
3) $f(x) = \operatorname{argsh}\left(\dfrac{1}{x}\right)$	4) $f(x) = \operatorname{argch}(2x+1)$
5) $f(x) = \operatorname{argth}(e^x)$	6) $f(x) = \operatorname{argcoth}(2x+2)$

Solutions

Exercice 1. On détermine le domaine de définition, D_f des fonctions :

1. $f(x) = \ln(\sqrt{1-x^2})$.

   On a :

$$x \in D_f \iff \begin{cases} \sqrt{1-x^2} > 0 \\ 1-x^2 \geq 0 \end{cases}$$
$$\iff 1-x^2 > 0$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
signe de $1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Par suite $D_f =]-1, 1[$.

2. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2-x}}$.
On a :

$$x \in D_f \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ \wedge \\ 2 - x \geq 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
signe de x		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $(2-x)$		$+$		$+$	0	$-$	

Par suite $D_f = [0, 2]$.

3. $f(x) = (\dfrac{x}{x+1})^{x^2} = \mathrm{e}^{x^2 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}$.
On a :

$$\begin{aligned} x \in D_f &\iff \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} > 0 \\ \wedge \\ x + 1 \neq 0 \end{cases} \\ &\iff x(x+1) > 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
signe de $x(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par suite $D_f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.

4. $f(x) = \sqrt{\cos(2x)}$.

On a :

$$\begin{aligned} x \in D_f &\iff \cos(2x) \geq 0, \\ &\iff 2x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ &\iff x \in \left[\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]. \end{aligned}$$

Comme la fonction $x \longrightarrow \cos$ est périodique, de période $2.\pi$, alors

$$D_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{-\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right].$$

5. $f(x) = \ln(\ln(1+x))$.

   On a :

$$\begin{aligned} x \in D_f &\iff \begin{cases} 1 + x > 0 \\ \\ \ln(x+1) > 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + 1 > 0 \\ \\ x + 1 > 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 1 + x > 0 \\ \\ x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de x		$-$		$-$	0	$+$	

   Par suite $D_f =]0, +\infty[$.

6. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, & x \geq 0 \longrightarrow D_1 \\ 1, & x < 0 \longrightarrow D_2 \end{cases}.$

   On a,

$$D_f = D_1 \cup D_2.$$

   Pour $x \geq 0$, $\dfrac{1}{1-x}$ est défini si $x \neq 1$, donc,

$$D_1 = [0, 1[\, \cup \,]1, +\infty[\,.$$

   Pour $x < 0$, $f(x) = 1$ est défini, donc,

$$D_2 = \,]-\infty, 0[\,.$$

   Par suite,

$$D_f = \,]-\infty, 1[\, \cup \,]1, +\infty[\,.$$

7. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-x}, & x \geq 0 \longrightarrow D_1 \\ x^3 + x, & x < -1 \longrightarrow D_2 \end{cases}$

On a,

$$D_f = D_1 \cup D_2.$$

Pour $x \geq 0$, $\dfrac{1}{2-x}$est défini si $x \neq 2$, donc,

$$D_1 = [0, 2[\cup]2, +\infty[\,.$$

Pour $x < -1$, $x^3 + x$ est défini, donc,

$$D_2 =]-\infty, -1[\,.$$

Par suite,

$$D_f =]-\infty, -1[\cup [0, 2[\cup]2, +\infty[\,.$$

8. $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

On a

$$\begin{aligned} x \in D_f &\iff \frac{x-1}{x+1}\text{est définie} \\ &\iff x \neq -1 \end{aligned}$$

alors

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1\}\,.$$

Exercice 2. Calcul de limites

1. $\displaystyle \underset{x \longrightarrow +\infty}{lim} \frac{-3x^2 + 5x - 10}{2x^2 + 10} = \underset{x \longrightarrow +\infty}{lim} \frac{-3x^2}{2x^2} = \frac{-3}{2}.$

2. On a,

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow +\infty} x - \sqrt{1+x^2} &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{1+x^2})(x + \sqrt{1+x^2})}{x + \sqrt{1+x^2}}, \\ &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{x + \sqrt{1+x^2}}, \\ &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{-1}{x + \sqrt{1+x^2}}, \\ &= 0. \end{aligned}$$

3. On a,

$$\begin{aligned}
\underset{x\longrightarrow+\infty}{lim} x\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} &= \lim_{x\longrightarrow+\infty} x\ln\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}},\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{1}{2}x\ln\left(\frac{1}{\frac{x^2+1}{x^2}}\right),\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{1}{2}x\ln\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\right),\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}-\frac{1}{2}x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right),\\
&\simeq^{+\infty} \lim_{x\longrightarrow+\infty}-\frac{1}{2}x.\frac{1}{x^2},\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}-\frac{1}{2}.\frac{1}{x},\\
&= 0.
\end{aligned}$$

4. $\lim_{x\longrightarrow0} x^2\cos(\frac{1}{x}) = 0$ car $\begin{cases}\lim_{x\longrightarrow0} x^2 = 0\\ \cos(\frac{1}{x}) \text{ est bornée}\end{cases}$

5. $\lim_{x\longrightarrow0}\sin(x)\ln(x) = \lim_{x\longrightarrow0}\frac{\sin(x)}{x}.x\ln(x) = 0$ car $\begin{cases}\lim_{x\longrightarrow0}\frac{\sin(x)}{x} = 1\\ \lim_{x\longrightarrow0} x\ln(x) = 0\end{cases}$

6. On a,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow0}\frac{1-\cos^2(x)}{tg(2x)} &= \lim_{x\longrightarrow0}\frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{tg(2x)},\\
&\simeq^{0} \lim_{x\longrightarrow0}\frac{(\frac{x^2}{2})(1+\cos(x))}{2x},\\
&= \lim_{x\longrightarrow0}\frac{(x(1+\cos(x))}{4},\\
&= 0
\end{aligned}$$

7. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} \simeq^0 = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} x = 0$

8. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\ln(1+2x+x^2)}{x} \simeq^0 \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{2x+x^2)}{x} = \simeq^0 \lim\limits_{x\longrightarrow 0} 2+x = 2$

9. On a,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{1-x}{\sqrt{5-x^2}-2} &= \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{(1-x)(\sqrt{5-x^2}+2)}{(\sqrt{5-x^2}-2)(\sqrt{5-x^2}+2)}, \\
&= \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{(1-x)(\sqrt{5-x^2}+2)}{1-x^2}, \\
&= \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x^2}+2}{1+x}, \\
\&= 2.
\end{aligned}$$

10. On a,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan(x)}{\sin(x)-\cos(x)} &= \lim_{x\longrightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1-\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}}{\sin(x)-\cos(x)}, \\
&= \lim_{x\longrightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\dfrac{\cos(x)-\sin(x)}{\cos(x)}}{\sin(x)-\cos(x)}, \\
&= \lim_{x\longrightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-(\sin(x)-\cos(x))}{\cos(x)(\sin(x)-\cos(x))}, \\
&= \lim_{x\longrightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\cos(x)}, (\text{car} \sin(x)-\cos(x) \neq 0) \\
&= -\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

11. On a,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 2}\frac{x^4-16}{x-2} &= \lim_{x\longrightarrow 2}\frac{(x^2-4)(x^2+4)}{x-2},\\
&= \lim_{x\longrightarrow 2}\frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{x-2},\\
&= \lim_{x\longrightarrow 2}(x+2)(x^2+4),\\
&= 32.
\end{aligned}$$

12. On a,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1} &= \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1},\\
&= \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{|x-1|}{x-1}
\end{aligned}$$

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
signe de $x-1$	$-$ 0 $+$

alors on obtient,

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{> \\ x\longrightarrow 1}}\frac{|x-1|}{x-1} &= \lim_{\substack{> \\ x\longrightarrow 1}}\frac{x-1}{x-1} = 1,\\
\lim_{\substack{< \\ x\longrightarrow 1}}\frac{|x-1|}{x-1} &= \lim_{\substack{< \\ x\longrightarrow 1}}\frac{-(x-1)}{x-1} = -1.
\end{aligned}$$

Exercice 3.

1. $f_1(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$.

   - **Domaine de définition** :

   $$D_{f_1} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\,.$$

   - **Continuité sur D_{f_1}** :

La fonction f_1 est le rapport des fonctions

$$x \longrightarrow 1-\cos(x),\ x \longrightarrow x^2$$

qui sont continues sur $\mathbb{R}$, en particulier sur chacun des intervalles de $\mathbb{R}^*$, par conséquent f_1 est continue sur D_{f_1}.

- **Prolongement par continuité** :

  La fonctionf_1 n'est pas définie en 0, on peut alors étudier son prolongement par continuité en 0.

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \simeq^0 \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} < \infty.$$

  On déduit alors que f_1 admet un prolongement par continuité en 0, noté par $\tilde{f}_1$ et défini par :

$$\tilde{f}_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}, & x \in \mathbb{R}^* \\ \dfrac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

2. $f_2(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

- **Domaine de définition** :
  Il est clair que :

$$D_{f_2} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[.$$

- **Continuité sur D_{f_2}** :

  La fonction f_2 est le produit et la composée des fonctions

$$x \longrightarrow x^2,\ x \longrightarrow \sin(x),\ x \longrightarrow \frac{1}{x}$$

  qui sont continues sur chacun des intervalles de $\mathbb{R}^*$, par conséquent f_2 est continue en tout point de D_{f_2}.

- **Prolongement par continuité** :

  La fonctionf_2 n'est pas définie en 0, on peut alors étudier son prolongement par continuité en 0.

$$\lim_{x\longrightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0 < \infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 0} x^2 = 0, \\ \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ est borné} \end{cases}$$

  On déduit alors que f_2 admet un prolongement par continuité en 0, noté par $\tilde{f_2}$ et défini par :

$$\tilde{f_2}(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \in \mathbb{R}^* \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

3. $f_3(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{x-1}$

- **Domaine de définition** : Il est clair que :

$$D_{f_3} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[.$$

- **Continuité sur D_{f_3}** :

  La fonction f_3 est le rapport et la composée des fonctions

$$x \longrightarrow \pi x,\ x \longrightarrow \sin(x),\ x \longrightarrow x-1$$

  qui sont continues sur chacun des intervalles de $\mathbb{R} - \{1\}$, par conséquent f_3 est continue en tout point de D_{f_3}.

- **Prolongement par continuité** :

  La fonctionf_3 n'est pas définie en 1, on peut alors étudier son prolongement par continuité en 1.

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1} = ?$$

Si on pose $g(x) = \sin(\pi x),\ g(1) = \sin(\pi) = 0$, alors

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1} = \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} = g'(1),$$

or $g'(x) = \pi \cos(\pi x)$, donc $g'(1) = \pi \cos(\pi x) = -\pi$.
Ainsi

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1} = -\pi < \infty.$$

On déduit alors que f_3 admet un prolongement par continuité en 1, noté par $\tilde{f_3}$ et défini par :

$$\tilde{f_3}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi x)}{x-1}, & x \in \mathbb{R} - \{1\} \\ -\pi, & x = 1 \end{cases}$$

4. $f_4(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{|x-1|}$

- **Domaine de définition** :
  Il est clair que :

  $$D_{f_4} = \,]-\infty, 1[\, \cup \,]1, +\infty[\,.$$

- **Continuité sur D_{f_4}** :

  La fonction f_4 est le rapport et la composée des fonctions

  $$x \longrightarrow \pi x,\ x \longrightarrow \sin(x),\ x \longrightarrow x-1,\ x \longrightarrow |x|$$

  qui sont continues sur chacun des intervalles de $\mathbb{R} - \{1\}$, par conséquent f_4 est continue en tout point de D_{f_4}.

- **Prolongement par continuité** :

  La fonctionf_4 n'est pas définie en 1, on peut alors étudier son prolongement par continuité en 1.

$\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{\sin(\pi x)}{x-1} = ?$

On a, $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 1} \dfrac{\sin(\pi x)}{x-1} = -\pi, \ \lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} 1} \dfrac{\sin(\pi x)}{x-1} = \pi$

Ainsi

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1} = \nexists.$$

On déduit alors que f_4 n'admet pas un prolongement par continuité au point 1.

5. $f_5(x) = \begin{cases} x^3 - 4x, & x \leq 0 \\ \vee & \\ \sin(3x), & 0 < x \leq \pi \\ \vee & \\ -1 + \cos(2x), & x > \pi \end{cases}$

- **Domaine de définition** :
  Il est clair que

$$\begin{aligned} \forall x \in \left]-\infty, 0\right], \ f_5(x) &= x^3 - 4x \text{ est définie,} \\ \forall x \in \left]0, \pi\right], \ f_5(x) &= \sin(3x) \text{ est définie,} \\ \forall x \in \left]\pi, +\infty\right[, \ f_5(x) &= -1 + \cos(2x) \text{ est définie,} \end{aligned}$$

  par suite,

$$D_{f_5} = \left]-\infty, 0\right] \cup \left]0, \pi\right] \cup \left]\pi, +\infty\right[= \mathbb{R}$$

- **Continuité sur D_{f_5}** :
  Il est clair que

$$\begin{aligned} \forall x \in \left]-\infty, 0\right[, \ \ f_5(x) &= x^3 - 4x \text{ est continue,} \\ \forall x \in \left]0, \pi\right[, \ \ f_5(x) &= \sin(3x) \text{ est continue,} \\ \forall x \in \left]\pi, +\infty\right[, \ \ f_5(x) &= -1 + \cos(2x) \text{ est continue,} \end{aligned}$$

  alors, f_5 est continue en tout point de $\mathbb{R} - \{0, \pi\}$.

- On étudie la continuité en 0 :

On a $f_5(0) = 0^2 + 0 = 0$.
$\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} f_5(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} \sin(3x) = 0 = f_5(0) \implies f_5$ est continue à droite de 0.
$\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} 0} f_5(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} 0} x^3 - 4x = 0 = f_5(0) \implies f_5$ est continue à gauche de 0.
On déduit que f_5 est contionue en 0.

- On étudie la continuité en π :

On a $f_5(\pi) = \sin(3\pi) = 0$.
$\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} \pi} f_5(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} -1 + \cos(2x) = 0 = f_5(\pi) \implies$
f_5 est continue à droite de π.
$\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} 0} f_5(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} 0} \sin(3x) = 0 = f_5(\pi) \implies f_5$ est continue à gauche de π.
On déduit que f_5 est continue en π.

Ainsi, la fonction f_5 est continue en tout point de D_{f_5}.

6. $f_6(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\sin(2x)} - 1}{x}, & x \neq 0 \\ \vee & \\ 2, & x = 0 \end{cases}$

- **Domaine de définition** :
  Il est clair que
  $$D_{f_6} = \mathbb{R}$$
- **Continuité sur D_{f_6}** :
  - Sur $\mathbb{R}^*$, $f_6(x) = \dfrac{e^{\sin(2x)} - 1}{x}$ est le rapport, la composée et la somme des fonctions

  $$x \longrightarrow 2x,\ x \longrightarrow \sin(x),\ x \longrightarrow e^x,\ x \longrightarrow x, x \longrightarrow -1$$

qui sont continues sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $\mathbb{R}^*$, alors, f_6 est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$.

- On étudie la continuité en 0 :

$$\lim_{x\longrightarrow 0} f_6(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^{\sin(2x)} - 1}{x} = ?$$

Pour calculer cette limite, on distingue deux méthodes :
Méthode 1 :
Si on pose $g(x) = e^{\sin(2x)},\ g(0) = e^{\sin(2.0)} = 1$, alors

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^{\sin(2x)} - 1}{x} = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0),$$

or $g'(x) = 2\cos(2x)e^{\sin(2x)}$, donc $g'(0) = 2$.

Ainsi

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^{\sin(2x)} - 1}{x} = 2 = f_6(0).$$

Méthode 2 :
On a $\lim_{x\longrightarrow 0} \sin(2x) = 0$, alors $e^{\sin(2x)} - 1 \sim^0 \sin(2x) \sim^0 2x$, d'où

$$\lim_{x\longrightarrow 0} f_6(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2 = f_6(0)$$

On déduit que f_6 est continue en 0.

Ainsi, la fonction f_6 est continue en tout point de D_{f_6}.

Exercice 4. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2} - 1}{\sin(2x^2)} & , -\pi < x < 0 \\ x - a + 1 & , x \geq 0 \end{cases}$$

- **Domaine de définition** :

  Il est clair que

  $$\forall x \in \left]-\pi, 0\right[,\ f(x) = \frac{e^{x^2}-1}{\sin(2x^2)} \text{ est définie car } \sin(2x^2) \neq 0,$$
  $$\forall x \in \left[0, \infty\right[,\ f(x) = x - a + 1 \text{ est définie car c'est un polynôme,}$$

  par suite,
  $$D_f = \left]-\pi, +\infty\right[.$$

- **Continuité sur D_f**

  - Sur $\left]-\pi, 0\right[$, $f(x) = \dfrac{e^{x^2}-1}{\sin(2x^2)}$ est le rapport, la composée est la somme des fonctions

  $$x \longrightarrow x^2,\ x \longrightarrow \sin(x),\ x \longrightarrow e^x,\ x \longrightarrow 2x,\ x \longrightarrow -1$$

  qui sont continues sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $]-\pi, 0[$, alors f est continue en tout point de $]-\pi, 0[$.

  - Sur $\left]0, +\infty\right[$, $f(x) = x - a + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $]0, +\infty[$ car c'est un polynôme, alors f est continue en tout point de $]0, +\infty[$.

  - On étudie la continuité en 0 :

  $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = ?$

  On a : $f(0) = -a + 1$,

  $$\lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} 0} \frac{e^{x^2}-1}{\sin(2x^2)} \simeq^0 \lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2},$$

  et,

  $$\lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} x - a + 1 = -a + 1.$$

Pour que f soit continue au point 0, il faut et il suffit que $\lim\limits_{\substack{< \\ x \longrightarrow 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \longrightarrow 0}} f(x) = f(0)$, donc $-a+1 = \dfrac{1}{2}$, ce qui donne $a = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, f est continue sur D_f si et seulement si $a = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 5.

1. l'équation $xe^x = 1 \iff xe^x - 1 = 0$.

   On considère la fonction $f(x) = xe^x - 1$ définie sur l'intervalle $[0,1]$.

   La fonction f est continue sur $[0,1]$ car c'est la somme et le produit des fonctions $x \longrightarrow x, x \longrightarrow e^x$ et $x \longrightarrow -1$ qui sont continues sur $[0,1]$.

   De plus, on a $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = e - 1 > 0$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires il existe au moins $\boldsymbol{c \in]0,1[}$ tel que $\boldsymbol{f(c) = 0}$.

   On déduit alors que l'équation $\boldsymbol{xe^x = 1}$ admet au moins une solution $\boldsymbol{c \in]0,1[}$.

2. On considère la fonction f définie par $f(x) = 4x^3 - 3x + \frac{1}{2}$ sur $[-1,1]$.

   La fonction f est continue sur $[-1,1]$ car c'est un polynôme. $f(-1) = \dfrac{-1}{2} < 0$ et $f(1) = \dfrac{3}{2} > 0$, alors par le théorème des des valeurs intermédiaires il existe au moins $\boldsymbol{c \in]-1,1[}$ tel que $\boldsymbol{f(c) = 0}$.

   Pour montrer l'existence de trois solutions exactement, on étudie la monotonie de f sur $[-1,1]$.

   $\forall x \in [-1,1]\,, f'(x) = 12x^2 - 3 = 3(2x-1)(2x+1)$.

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+1$
signe de f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$

- Sur $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$, la fonction f est continue, strictement croissante et $f(-1).f(-\frac{1}{2}) < 0$ alors il existe une valeur unique $c_1 \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right[$ telle que $f(c_1) = 0$.
- Sur $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$, la fonction f est continue, strictement décroissante et $f(-\frac{1}{2}).f(\frac{1}{2}) < 0$ alors il existe une valeur unique $c_2 \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ telle que $f(c_2) = 0$.
- Sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, on suit le même raisonnement, il existe une valeur unique $c_3 \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ telle que $f(c_3) = 0$.

On déduit alors que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions comprises entre -1 et 1.

3. On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 + 3x + 1$ sur $[-1, 0]$.

   - La fonction f est continue sur $[-1, 0]$ car c'est un polynôme.
     $f(0) = 1 > 0$ et $f(-1) = -3 < 0$, alors par le théorème des des valeurs intermédiaires il existe au moins

$\boldsymbol{c \in \,]-1, 0[}$ tel que $\boldsymbol{f(c) = 0}$.

- La solution $\boldsymbol{c}$, est-elle unique ?
  on étudie la monotonie de f sur $[-1, 0]$.

  $\forall x \in [-1, 0]\,, f'(x) = 3x^2 + 3 > 0.$

x	-1 $\qquad$ 0
signe de f'	$+$
variations de f	-3 $\nearrow$ 1

La fonction f est strictement croissante sur $[-1, 0]$ alors il existe une valeur unique $c \in \,]-1, 0[$ telle que $f(c) = 0$.

On déduit alors que léquation $x^3 + 3x + 1 = 0$ admet une solution unique comprise entre -1 et 0.

Exercice 6.

1. $$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ \vee & \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

- **Domaine de définition** : Il est clair que

$$D_f = \mathbb{R}.$$

- **Dérivabilité sur** $\mathbb{R}^*$:
  Pour tout $x \neq 0$, $f(x) = x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$; la fonction f est le produit et la composée des fonctions élémentaires suivantes :

$$x \longrightarrow x^2,\ x \longrightarrow \frac{1}{x},\ x \longrightarrow \cos(x),$$

qui sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. En utilisant les règles de dérivation d'un produit et d'une composition de fonctions, on obtient que

$$f'(x) = 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

- **Dérivabilité au point 0** :

$$\lim_{x\longleftrightarrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\longleftrightarrow 0}\frac{x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\longrightarrow 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 < \infty,$$

car $\begin{cases} x \longrightarrow 0, \\ \cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ est bornée,} \end{cases}$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Par conséquent, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ \vee & \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

2. $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ \vee & \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

- **Domaine de définition** : Il est clair que

$$D_f = \mathbb{R}.$$

- **Dérivabilité sur $\mathbb{R}^*$** :
  Pour tout $x \neq 0$, $f(x) = e^{\frac{-1}{x^2}}$; la fonction f est la composée des fonctions élémentaires suivantes :

$$x \longrightarrow x^2,\ x \longrightarrow -\frac{1}{x},\ x \longrightarrow e^x,$$

qui sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. En utilisant les règles de dérivation d'une composition de fonctions, on obtient que

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{\frac{-1}{x^2}}.$$

- **Dérivabilité au point 0** :

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\longleftrightarrow 0} \frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\longrightarrow 0} (-x) \left(\frac{-1}{x^2} \right) e^{\frac{-1}{x^2}} = 0 < \infty,$$

car $\begin{cases} -x \longrightarrow 0, \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \frac{-1}{x^2} e^{\frac{-1}{x^2}} = \lim\limits_{u\longrightarrow -\infty} ue^u = 0, \text{avec } u = \frac{-1}{x^2}, \end{cases}$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Par conséquent, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} e^{\frac{-1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ \vee & \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

3. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq -1 \\ \vee & \\ \cos^2 \left(\dfrac{\pi x}{2} \right), & x > -1 \end{cases}$

- **Domaine de définition** :
  Pour $x \leq -1$, $f(x) = x + 1$ est bien définie.
  Pour $x > -1$, $f(x) = \cos^2 \left(\dfrac{\pi x}{2} \right)$ est bien définie.
  Alors,
  $$D_f =]-\infty, -1] \cup]-1, +\infty[= \mathbb{R}.$$

- **Dérivabilité sur $]-\infty, -1[$** :
  Pour $x < -1$, f est dérivable car $f(x) = x + 1$ est un polynôme et on a
  $$f'(x) = 1.$$

- **Dérivabilité sur $]-1,+\infty[$** :
  Pour $x>-1$, $f(x)=\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$; la fonction f est le produit et la composée des fonctions élémentaires suivantes ;
  $$x \longrightarrow \frac{\pi x}{2},\ x \longrightarrow \cos(x),$$
  qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $]-1,+\infty[$, alors f est dérivable. En utilisant les règles de dérivation d'un produit et d'une composition de fonctions, on obtient que
  $$f'(x)=2\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin(\pi x).$$
- **Dérivabilité au point -1** :
  Ona :
  $f(-1)=-1+1=0$.
  $$\lim_{\substack{x\longrightarrow -1\\ <}}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{\substack{x\longrightarrow -1\\ <}}\frac{x+1}{x+1}=1<\infty,$$
  donc f est dérivable à gauche de -1 et $f'_g(-1)=1$.
  $$\lim_{\substack{x\longrightarrow -1\\ >}}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{\substack{x\longrightarrow -1\\ <}}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x+1}=?$$
  On pose $u(x)=\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, $u(-1)=\cos^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$,
  alors,
  $$\lim_{\substack{x\longrightarrow -1\\ <}}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x+1}=\lim_{\substack{x\longrightarrow -1\\ <}}\frac{u(x)-u(-1)}{x+1}=u'(-1).$$
  On a $u'(x)=\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin(\pi x)$, alors $u'(-1)=0$,
  d'où
  $$\lim_{\substack{x\longrightarrow -1\\ >}}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=0,$$

donc f est dérivable à droite de -1 et $f'_d(-1) = 0$.
Comme

$$f'_g(-1) \neq f'_d(-1),$$

On déduit que f n'est pas dérivable au point -1

Par conséquent, f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ et sa dérivée est donnée par

$$f'(x) = \left(-\frac{\pi}{2}\right) \sin(\pi x).$$

Exercice 7.

***a*)** Calcul de limites par la règle de l'Hopital :

1. $\lim_{x \to 0} \frac{x - x\cos(x)}{x - \sin(x)}$ F.I $\left(\frac{0}{0}\right)$
   Les fonctions $x \longrightarrow x - x\cos(x)$ et $x \longrightarrow x - \sin(x)$ sont dérivables. On a

   $$\lim_{x \to 0} \frac{(x - x\cos(x))'}{(x - \sin(x))'} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x) + x\sin(x)}{1 - \cos(x)} \text{ F.I } \left(\frac{0}{0}\right)$$

   Les fonctions $x \longrightarrow 1 - \cos(x) + x\sin(x)$ et $x \longrightarrow 1 - \cos(x)$ sont dérivables. On a

   $$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos(x) + x\sin(x))'}{(1 - \cos(x))'} &= \lim_{x \to 0} \frac{2\sin(x) + x\cos(x)}{\sin(x)}, \\ &= \lim_{x \to 0} 2 + \frac{x}{\sin(x)}\cos(x), (\text{car } \sin(x) \neq 0) \\ &= 2 + 1 = 3, \end{aligned}$$

   puisque $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \to 0} \cos(x) = 1$. Par conséquent, en appliquant la règle de l'Hopital deux fois, on en déduit que

   $$\lim_{x \to 0} \frac{x - x\cos(x)}{x - \sin(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{(x - x\cos(x))'}{(x - \sin(x))'} = \lim_{x \to 0} \frac{(x - x\cos(x))''}{(x - \sin(x))''} = 3.$$

2. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin(2x - \dfrac{\pi}{2})}{\cos(x) - \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ F.I $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

Les fonctions $x \longrightarrow \sin(2x - \dfrac{\pi}{2})$ et $x \longrightarrow \cos(x) - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sont dérivables. On a

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left(\sin(2x - \dfrac{\pi}{2})\right)'}{\left(\cos(x) - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)'} = \lim_{x \to 0} \frac{2\cos(2x - \dfrac{\pi}{2})}{-\sin(x)} = -\frac{4}{\sqrt{2}}.$$

Par conséquent, en appliquant la règle de l'Hopital une fois, on en déduit que

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x - \dfrac{\pi}{2})}{\cos(x) - \dfrac{\sqrt{2}}{2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sin(2x - \dfrac{\pi}{2})\right)'}{\left(\cos(x) - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)'} = -\frac{4}{\sqrt{2}}.$$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - \sin(x)}{2x + \sin(x)}$ F.I $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

Les fonctions $x \longrightarrow x - \sin(x)$ et $x \longrightarrow 2x + \sin(x)$ sont dérivables. On a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x - \sin(x))'}{(2x + \sin(x))'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \cos(x)}{2 + \cos(x)} \nexists.$$

Les fonctions $x \longrightarrow 1 - \cos(x)$ et $x \longrightarrow 2 + \cos(x)$ sont dérivables. On a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(1 - \cos(x)(x))'}{(2 + \cos(x))'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{-\sin(x)} \nexists \text{ car } \sin(x) \text{peut être nul,}$$

donc la règle de l'Hopital ne peut être appliquée.

On détermine cette limite autrement :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sin(x)}{2x+\sin(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(1-\dfrac{\sin(x)}{x})}{x(2+\dfrac{\sin(x)}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\dfrac{\sin(x)}{x}}{2+\dfrac{\sin(x)}{x}}=\frac{1}{2}$$

puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin(x)}{x}=0$.

4. $\lim\limits_{x\to4}(5-x)^{\left(\dfrac{1}{x-4}\right)}=\lim\limits_{x\to4}e^{\dfrac{\ln(5-x)}{x-4}}$.

   On a $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\ln(5-x)}{x-4}$F.I $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

   Les fonctions $x\longrightarrow\ln(5-x)$ et $x\longrightarrow x-4$ sont dérivables et

$$\lim_{x\to4}\frac{(\ln(5-x))'}{(x-4)'}=\lim_{x\to4}\frac{-1}{5-x}=-1.$$

   En appliquant la règle de l'Hopital une fois, on en déduit que

$$\lim_{x\to4}\frac{\ln(5-x)}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{(\ln(5-x))'}{(x-4)'}=-1,$$

   Par conséquent,

$$\lim_{x\to4}(5-x)^{\left(\dfrac{1}{x-4}\right)}=\lim_{x\to4}e^{\dfrac{\ln(5-x)}{x-4}}=e^{-1}$$

***b*)** Applications du théorème des accroissements finis :

1. On montre que :

$$\textbf{Pour } \boldsymbol{0<a<b,\ \frac{b-a}{b}<\ln\left(\frac{b}{a}\right)<\frac{b-a}{a}}.$$

   Soit f la fonction définie dans $]0,+\infty[$ par $f(x)=\ln(x)$. Pour tous réels a et b tels que $0<a<b$, la fonction f est

continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$; par le théorème des accroissements finis, on a

$$\exists c \quad]a, b[\,, f(b) - f(a) = f'(c)(b - a),$$

ce qui s'écrit

$$\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{b-a}{c}.$$

Or

$$\begin{aligned} 0 < a < c < b &\iff 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a} \\ &\implies \frac{b-a}{b} < \frac{b-a}{c} < \frac{b-a}{a} \text{ (car } b - a > 0) \\ &\implies \frac{b-a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a} \end{aligned}$$

2. On montre que : $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{e^x \geq x + 1}$.
   Soit f la fonction définie dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$. On distingue trois cas :
   - Pour $\boldsymbol{x > 0}$, la fonction f est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$; par le théorème des accroissements finis, on a

     $$\exists c \quad]0, x[\,, f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0),$$

     ce qui s'écrit

     $$e^x - 1 = xe^c.$$

     Or

     $$\begin{aligned} 0 < c < x &\iff e^0 < e^c < e^x \\ &\iff x < xe^c < xe^x \text{ (car } x > 0) \\ &\implies x < e^x - 1 \\ &\implies e^x > x + 1 \end{aligned}$$

   - Pour $\boldsymbol{x < 0}$, la fonction f est continue sur $[x, 0]$ et dérivable sur $]x, 0[$; par le théorème des accroissements finis, on a

     $$\exists c \quad]x, 0[\,, f(0) - f(x) = f'(c)(0 - x),$$

ce qui s'écrit

$$1 - e^x = -xe^c.$$

Or

$$\begin{aligned} x < c < 0 &\iff e^x < e^c < e^0 \\ &\iff -xe^x < -xe^c < -x \text{ (car } -x > 0) \\ &\implies 1 - e^x < -x \\ &\implies e^x > x + 1 \end{aligned}$$

- Pour $\boldsymbol{x = 0}$, on a $e^0 = 1 \geq 0 + 1$ donc l'iégalité est vérifiée pour $x = 0$.

Par conséquent, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq x + 1.$$

Exercice 8.

1. $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

- **Domaine de définition** :

  On a

$$\begin{aligned} x \in D_f &\iff \begin{cases} -1 \leq \dfrac{x+1}{x-1} \leq 1 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -1 \leq \dfrac{x+1}{x-1} \\ \dfrac{x+1}{x-1} \leq 1 \\ x \neq 1 \end{cases} \end{aligned} \tag{3.1}$$

  On a

$$-1 \leq \frac{x+1}{x-1} \iff \frac{x+1}{x-1} + 1 \geq 0 \iff \frac{2x}{x-1} \geq 0$$

  L'ensemble des solutions est $S_1 =]-\infty,\ 0] \cup]1,\ +\infty[$

De même
$$\frac{x+1}{x-1} \leq 1 \iff \frac{2}{x-1} \leq 0$$
L'ensemble des solutions est $S_2 =]-\infty,\ 1[$

Ainsi
$$D_f = S_1 \cap S_2 =]-\infty,\ 0]\,.$$

- **Calcul de Limites**

On sait que

$\forall y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ \forall x \in [-1,1]\,,\ y = \arcsin(x) \iff x = \sin(y)$

- $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \arcsin\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{\pi}{2}$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1 \\ \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$
- $f(0) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ car $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$.

- **Dérivée**

On sait que : Pour tout $x \in D_f$ tel que $u(x) \neq \pm 1$
$$(\arcsin(u(x)))' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$$

alors, $\forall x \in \left]-\infty, 0\right[$,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)'}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2}} \\
&= \frac{\dfrac{-2}{(x-1)^2}}{\sqrt{\dfrac{-4x}{(x-1)^2}}} \\
&= \frac{-2}{(x-1)^2} \times \frac{|x-1|}{2\sqrt{-x}} \\
&= \frac{-2}{(x-1)^2} \times \frac{-(x-1)}{2\sqrt{-x}} \\
&= \frac{1}{(x-1)\sqrt{-x}}
\end{aligned}
$$

2. $f(x) = \arccos(\ln(x))$

- **Domaine de définition** :
  On a

$$
\begin{aligned}
x \in D_f &\iff \begin{cases} -1 \leq \ln(x) \leq 1 \\ x > 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} e^{-1} \leq x \leq e \\ x > 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

  Ainsi

$$D_f = \left[\frac{1}{e}, e\right].$$

- **Calcul de Limites**

  On sait que

  $\forall y \in [0, \pi]$, $\forall x \in [-1, 1]$, $y = \arccos(x) \iff x = \cos(y)$

$$f(\frac{1}{e}) = \arccos(\ln(\frac{1}{e})) = \arccos(-1) = \pi \text{ car } \cos(\pi) = -1$$

$$f(e) = \arccos(\ln(e)) = \arccos(1) = 0 \text{ car } \cos(0) = 1$$

- **Dérivée**

  On sait que : Pour tout $x \in D_f$ tel que $u(x) \neq \pm 1$

  $$(\arccos(u(x)))' = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$$

  alors, $\forall x \in \left]\frac{1}{e}, e\right[$,

  $$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{(\ln(x))'}{\sqrt{1-(\ln(x))^2}} \\ &= -\frac{1}{x\sqrt{1-(\ln(x))^2}} \end{aligned}$$

3. $f(x) = \operatorname{argsh}\left(\frac{1}{x}\right)$

- **Domaine de définition** :
  On a
  $$x \in D_f \iff x \neq 0$$
  Ainsi
  $$D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\,.$$

- **Calcul de Limites**

  On sait que

  $\forall y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y = \operatorname{argsh}(x) \iff x = \operatorname{sh}(y)$

  - $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \operatorname{argsh}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \operatorname{argsh}(0) = 0 \end{cases}$

  - $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \operatorname{argsh}\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \operatorname{argsh}(x) = -\infty \end{cases}$

  - $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \operatorname{argsh}\left(\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \operatorname{argsh}(x) = +\infty \end{cases}$

  - $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \operatorname{argsh}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \operatorname{argsh}(0) = 0 \end{cases}$

- **Dérivée**

  On sait que :

  $\forall x \in D_f,\ (\operatorname{argsh}(u(x)))' = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1 + (u(x))^2}}$

  alors, $\forall x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \frac{\left(\dfrac{1}{x}\right)'}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{1}{x}\right)^2}} = \frac{\dfrac{-1}{x^2}}{\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2}}} = \frac{-|x|}{x^2\sqrt{x^2+1}}$$

4. $f(x) = \operatorname{argch}(2x + 1)$

- **Domaine de définition** :
  On a
  $$\begin{aligned} x \in D_f &\iff 2x+1 \geq 1 \neq 0 \\ &\iff x \geq 0 \end{aligned}$$
  Ainsi
  $$D_f = [0, +\infty[\,.$$
- **Calcul de Limites**
  On sait que
  $$\forall x \geq 1, \forall y \geq 0,\ y = \operatorname{argch}(x) \iff x = \operatorname{ch}(y)$$
  - $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \operatorname{argch}(2x+1) = +\infty$ car $\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} 2x+1 = +\infty \\ \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \operatorname{argch}(x) = +\infty \end{array} \right.$
  - $f(0) = \operatorname{argch}(1) = 0$ car $\operatorname{ch}(0) = 1$
- **Dérivée**
  On sait que :
  $\forall x \in D_f$, tel que $u(x) \neq 1,\ (\operatorname{argch}(u(x)))' = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{(u(x))^2 - 1}}$
  alors, $\forall x \in \,]0, +\infty[$,
  $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+1)'}{\sqrt{(2x+1)^2 - 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} \end{aligned}$$

5. $f(x) = \operatorname{argth}(e^x)$

- **Domaine de définition** :
  On a
  $$\begin{aligned} x \in D_f &\iff -1 < e^x < 1 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{c} -1 < e^x \\ e^x < 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

On a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -1 < e^x$$

L'ensemble des solutions est $S_1 = \mathbb{R}$

et,

$$e^x < 1 \iff x < 0$$

L'ensemble des solutions est $S_2 =]-\infty,\ 0[$

Ainsi

$$D_f = S_1 \cap S_2 =]-\infty,\ 0[\,.$$

- **Calcul de Limites**

  On sait que

  $$\forall y \in \mathbb{R},\ \forall x \in]-1, 1[\,,\ y = \operatorname{argth}(x) \iff x = \operatorname{th}(y)$$

  - $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \operatorname{argth}(e^x) = 0$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \operatorname{argth}(0) = 0 \end{cases}$

  - $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \operatorname{argth}(e^x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} e^x = 1^- \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} \operatorname{argth}(x) = +\infty \end{cases}$

- **Dérivée**

  On sait que : Pour tout $x \in D_f$

  $$(\operatorname{argth}(u(x)))' = \frac{u'(x)}{1 - (u(x))^2}$$

  alors, $\forall x \in]-\infty, 0[$,

  $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^x)'}{1 - (e^x)^2} \\ &= \frac{e^x}{1 - e^{2x}} \end{aligned}$$

6. $f(x) = \operatorname{argcoth}(2x + 2)$

- **Domaine de définition** :
  On a
  $$x \in D_f \iff (2x+2<-1) \vee (2x+2>1)$$
  On a
  $$2x+2<-1 \iff x<-\frac{3}{2}$$
  L'ensemble des solutions est $S_1 = \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[$

  et,
  $$2x+2>1 \iff x>-\frac{1}{2}$$
  L'ensemble des solutions est $S_2 = \left]-\frac{1}{2},\ +\infty\right[$

  Ainsi
  $$D_f = S_1 \cup S_2 = \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2},\ +\infty\right[.$$

- **Calcul de Limites**

  On sait que

  $\forall y \in \mathbb{R}^*,\ \forall x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[,\ y = \operatorname{argcoth}(x) \iff x = \coth(y)$

  - $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \operatorname{argcoth}(2x+2) = 0^-$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} 2x+2 = -\infty \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \operatorname{argcoth}(x) = 0^- \end{cases}$

  - $\lim\limits_{x \longrightarrow -\frac{3}{2}} \operatorname{argcoth}(2x+2) = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -\frac{3}{2}} 2x+2 = -1 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1} \operatorname{argcoth}(x) = -\infty \end{cases}$

  - $\lim\limits_{x \longrightarrow -\frac{1}{2}} \operatorname{argcoth}(2x+2) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -\frac{1}{2}} 2x+2 = 1 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1} \operatorname{argcoth}(x) = +\infty \end{cases}$

- $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \operatorname{argcoth}(2x+2) = 0^+$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} 2x+2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \operatorname{argcoth}(x) = 0^+ \end{cases}$

- **Dérivée**

  On sait que : Pour tout $x \in D_f$

$$(\operatorname{argth}(u(x)))' = \frac{u'(x)}{1-(u(x))^2}$$

alors, $\forall x \in \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2},\ +\infty\right[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+2)'}{1-(2x+2)^2} \\ &= \frac{2}{-4x^2-8x-3} \end{aligned}$$