

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A.MIRA-BEJAIA



Faculté de Technologie

Département d'Hydraulique

POLYCOPIE DE COURS

Module

Mathématiques 1

Licence 1 Hydraulique

Rédigé par: DJEMA Amar



Faculté de Technologie
Département d'Hydraulique

Mathématiques 1 : Analyse et Algèbre

Première édition

DJEMA Amar
amar.djema@univ-bejaia.dz

Année Universitaire : 2025 - 2026

PRÉFACE

Ce polycopié d'Analyse et d'Algèbre s'adresse aux étudiants de première année hydraulique. Il couvre l'intégralité du programme officiel du module *Mathématiques I*. Son contenu s'appuie à la fois sur des manuels de référence et sur l'expérience acquise au cours de quatre années d'enseignement (2021–2025) au Département d'Hydraulique de la Faculté de Technologie. Chaque chapitre est illustré par de nombreux exemples concrets et des exercices clés, afin de faciliter la compréhension.

Ce support pédagogique a pour objectif d'aider l'étudiant à maîtriser les notions fondamentales d'analyse et d'algèbre, véritables piliers des mathématiques universitaires.

Nous accueillerons avec reconnaissance toute critique ou suggestion que le lecteur voudra bien nous faire parvenir à l'adresse suivante : amar.djema@univ-bejaia.dz.

TABLE DES MATIÈRES

Préface	3
Introduction	3
Table des matières	5
Table des figures	7
Liste des tableaux	9
1 Méthodes du raisonnement mathématique	11
1 Notions de logique	11
2 Propositions particulières	14
3 Quantificateurs	15
4 Méthodes de raisonnement	16
5 Exercices	18
2 Les ensembles, les relations et les applications	21
1 Les ensembles	21
1.1 Notation et terminologie	21
1.2 Opérations fondamentales sur les ensembles	23
2 Relations	28
2.1 Définitions, exemples et classes	28
2.2 Relations dans un ensemble	28
2.3 Maximum, minimum, borne supérieure et borne inférieure	33
3 Applications	34
4 Exercices	40
3 Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles	43
1 Limites et continuité	43
1.1 Limites	44
1.2 Fonctions continues	48
1.3 Équivalents et notations de Landau	53
2 Fonctions dérivables	56
2.1 Dérivée d'une fonction en un point	56

2.2	Dérivée sur un intervalle et dérivée d'ordre supérieur	59
2.3	Opérations sur les fonctions dérivables	60
2.4	Théorème de Rolle	62
3	Exercices	65
4	Fonctions élémentaires	67
1	Fonctions logarithmes et exponentielles	68
2	Fonctions puissance $x^a = e^{a \ln x}$	71
3	Fonctions hyperboliques et trigonométriques	72
4	Fonctions réciproques	74
5	Exercices	78
5	Formule de Taylor et développements limités	81
1	Formule de Taylor	81
2	Développements limités	85
3	Opérations sur les développements limités	89
4	Quelques applications des développements limités	93
4.1	Solutions approchées des équations	93
4.2	Calcul des limites	93
4.3	Position d'une courbe par rapport à sa tangente	94
4.4	Étude des branches infinies	95
4.5	Minima et maxima locaux	96
5	Exercices	98
6	Algèbre Linéaire	101
1	Structures algébriques de base : Loi de composition interne, groupe, anneau et corps	101
1.1	Loi de composition interne	101
1.2	Groupes	103
1.3	Anneaux et corps	104
2	Espace vectoriel ($\mathbb{K}$ -ev)	104
2.1	Espace vectoriel (e.v.) et sous espace vectoriel (s-e.v.)	104
2.2	Opérations sur les sous-espaces vectoriels	108
2.3	Familles génératrices, familles libres et bases	109
2.4	Espace vectoriel de dimension finie	110
3	Applications linéaires	111
3.1	Définitions et propriétés	111
3.2	Image et noyau d'une application linéaire	113
3.3	Rang d'une application linéaire	118
4	Exercices	119
	Références	121
	Index	122

TABLE DES FIGURES

2.1	Graphe de la relation dans l'exemple 2.1	28
2.2	Graphe de la relation dans l'Exemple 2.2	29
3.1	Le graphe de la fonction f de l'exemple 1.2	53
3.2	Le graphe des fonctions : a) g b) h de l'exemple 1.2	53
3.3		58
4.1		69
4.2	Graphes des fonctions : $\cos$, $\sin$, $\tan$, $\cosh$, $\sinh$ et $\tanh$	73
4.3	Fonctions : $\arccos$ et $\arcsin$	75
4.4	Graphe de fonctions : $\operatorname{argcosh}$, $\operatorname{argsinh}$ et $\operatorname{argtanh}$	77

LISTE DES TABLEAUX

1.1	Tableau de vérité de la négation	12
1.2	Tableau de vérité	12
4.1	Résumé des propriétés des fonctions usuelles	78

CHAPITRE 1

MÉTHODES DU RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE

Ce chapitre établit les fondations du raisonnement mathématique. Nous y définirons les notions de proposition logique et de connecteur, avant d'explorer les quantificateurs et les principales méthodes de démonstration (directe, contraposition, absurde, récurrence).

1 Notions de logique

Définition 1.1

Une *proposition* (ou assertion) est un énoncé mathématique qui a une et une seule valeur : vrai (V) ou faux (F).

Exemple :

1. L'énoncé "1 est supérieur à 2" est une proposition fausse (F).
2. L'énoncé "L'aire d'un disque de rayon r est égale à : πr^2 " est une proposition vraie (V).
3. L'énoncé "Le nombre a est pair" n'est pas une proposition puisqu'il est impossible de décider si elle est vraie ou fausse tant que l'on ne connaît pas a .

P	$\text{non } P$
V	F
F	V

TABLE 1.1 – Tableau de vérité de la négation

P	Q	$\text{non } P$	$\text{non } Q$	$P \text{ ou } Q$	$P \text{ et } Q$	$P \Rightarrow Q$	$\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	F	F
F	V	V	F	V	F	V	V	F
F	F	V	V	F	F	V	V	V

TABLE 1.2 – Tableau de vérité

Définition 1.2

Soit P et Q deux propositions

- La *négation* "(Le contraire)" de la proposition P , notée ($\text{non } P$ ou $\bar{P}$), est vraie si et seulement si P est *fausse*.
- La *disjonction* de P et Q , notée ($P \text{ ou } Q$), est vraie si l'une au moins des propositions P et Q est vraie.
- La *conjonction* de P et Q , notée ($P \text{ et } Q$), est vraie si P et Q sont toutes les deux vraies.
- On dit que P *implique* Q , noté ($P \Rightarrow Q$), est vraie si et seulement si la proposition ($\bar{P}$ ou Q) est vraie.
- On dit que P est *équivalente* à Q , noté ($P \Leftrightarrow Q$), lorsque l'on a à la fois ($P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$) qui sont vraies.
- La *contra-posée* de l'implication ($P \Rightarrow Q$) est la proposition ($\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$). Les deux propositions sont équivalentes.

Remarque.

Une proposition vraie n'implique pas une proposition fausse. C'est-à-dire, l'implication $P \Rightarrow Q$ est fausse *uniquement* dans le cas où P est vraie et Q est fausse.

Remarque.

Les propositions suivantes ont la même signification : Soit n un entier relatif.

1. **Si** n est impair, **alors** n^2 est impair.
2. n est impair **implique** n^2 est impair.
3. Pour que n^2 soit impair **il suffit** que n soit impair.
4. Pour que n soit impair **il faut** que n^2 soit impair.

Exercice 1.3:

Déterminer les valeurs de vérité des propositions suivantes

1. (5 est un nombre impair) et (8 est un nombre premier)
2. (5 est un nombre impair) ou (8 est un nombre premier)
3. (5 est un nombre impair) $\Rightarrow$ (8 est un nombre premier)
4. (2 est positif) et (5 divise 35)
5. (2 est positif) ou (5 divise 35)
6. (2 est positif) $\Rightarrow$ (5 divise 35)

Proposition 1.4

On a les équivalences suivantes

1. $(\text{non}(\text{non } P)) \Leftrightarrow (P)$
2. $(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ et } P)$
3. $(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ ou } P)$
4. $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow P)$
5. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \Rightarrow P)$
6. $\text{non}(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)$
7. $\text{non}(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)$
8. $P \text{ et } (Q \text{ ou } R) \Leftrightarrow (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$
9. $P \text{ ou } (Q \text{ et } R) \Leftrightarrow (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)$
10. $\text{non}(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \text{ et } \text{non } Q)$
11. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P)$

Preuve de la Proposition.

1.

P	$\text{non } P$	$\text{non}(\text{non } P)$
V	F	V
F	V	F

2. évident

3. évident

4. évident

5.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

	P	Q	$\text{non } P$	$\text{non } Q$	$(P \text{ ou } Q)$	$\text{non } (P \text{ ou } Q)$	$(\text{non } P \text{ et non } Q)$
	V	V	F	F	V	F	F
6.	V	F	F	V	V	F	F
	F	V	V	F	V	F	F
	F	F	V	V	F	V	V

7. de la même manière que 2.

	P	Q	R	$(P \text{ et } Q)$	$(P \text{ et } R)$	$(Q \text{ ou } R)$	$P \text{ et } (Q \text{ ou } R)$	$(P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$
	V	V	V	V	V	V	V	V
	V	V	F	V	F	V	V	V
	V	F	V	F	V	V	V	V
8.	V	F	F	F	F	F	F	F
	F	V	V	F	F	V	F	F
	F	V	F	F	F	V	F	F
	F	F	V	F	F	V	F	F
	F	F	F	F	F	F	F	F

9. de la même manière que 4.

10. On a $\text{non}(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \text{non}(\text{non } P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (P \text{ et non } Q)$

11. On a $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{non } P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ ou non } P) \Leftrightarrow (\text{non}(\text{non } Q) \text{ ou non } P) \Leftrightarrow (\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P)$

2 Propositions particulières

Définition 2.1

Un *axiome* est une proposition supposée vraie sans démonstration.

Exemple :

En géométrie euclidienne, l'énoncé "Par deux points distincts passe une et une seule droite" est un axiome.

Définition 2.2

Un *théorème* est une proposition dont il faut établir la véracité. Un théorème est donc vrai s'il se déduit logiquement d'axiomes.

Exemple :

Le Théorème de Pythagore : "Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés."

Définition 2.3

Un *corollaire* est une conséquence directe d'un théorème.

Exemple :

Corollaire du Théorème de Pythagore² : La diagonale d d'un carré de côté s mesure $d = \sqrt{2}s$. ■

Définition 2.4

Un *lemme* est un théorème préparatoire à l'établissement d'un théorème de plus grande importance.

Exemple :

Le Lemme d'Euclide ("Si un nombre premier p divise le produit ab , alors p divise a ou p divise b ") est souvent utilisé comme lemme pour prouver le Théorème fondamental de l'arithmétique (unicité de la décomposition en facteurs premiers). ■

Définition 2.5

Une *conjecture* est une proposition que l'on suppose vraie sans parvenir à la démontrer. C'est une hypothèse plausible au vu de quelques exemples.

Exemple :

La Conjecture de Goldbach : "Tout nombre entier pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers." (Par exemple, $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $10 = 3 + 7 = 5 + 5$, etc.) ■

3 Quantificateurs

Dans un raisonnement logique, les expressions "quel que soit" et "il existe" sont transcrites par $\forall$ et $\exists$ appelés respectivement quantificateurs universel et existentiel. Une proposition P qui dépend de l'élément x d'un ensemble E s'écrit $P(x)$. On écrit $\exists x \in E, P(x)$ pour exprimer que la proposition $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de E , et $\forall x \in E, P(x)$ si $P(x)$ est vérifiée pour tous les éléments x de E .

Proposition 3.1

$$\begin{aligned} \text{non}(\exists x P(x)) &\Leftrightarrow \forall x \text{ non}P \\ \text{non}(\forall x P(x)) &\Leftrightarrow \exists x \text{ non}P \end{aligned}$$

Exemple :

$\exists x, x \in \mathbb{R}$ et $x^2 + 1 = 0$ est fausse. Par contre $\exists x, x \in \mathbb{C}$ et $x^2 + 1 = 0$ est vraie. ■

Exemple :

La négation de : $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 = 0$ est $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \neq 0$ ■

Propriété 3.2

On peut permuter les quantificateurs s'ils sont de même nature

$$\forall x \in E, \forall y \in E, P(x, y) \Leftrightarrow \forall y \in E, \forall x \in E, P(x, y)$$

$$\exists x \in E, \exists y \in E, P(x, y) \Leftrightarrow \exists y \in E, \exists x \in E, P(x, y)$$

On ne peut pas permuter les quantificateurs s'ils sont de nature différentes,

$$\forall x \in E, \exists y \in E, P(x, y) \not\Leftrightarrow \exists y \in E, \forall x \in E, P(x, y)$$

$$\exists x \in E, \forall y \in E, P(x, y) \not\Leftrightarrow \forall y \in E, \exists x \in E, P(x, y)$$

Exemple :

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y > x$ est une proposition vraie. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y > x$ est une proposition fausse. ■

Exercice 3.3:

Étudier la vérité des propositions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$
2. $\forall (a, b) \in \mathbb{Q}^{*2}, a\sqrt{2} + b \neq 0$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n+1}{n} \notin \mathbb{N}$

Exercice 3.4:

Étudier la vérité des propositions suivantes :

1. $\exists x \in \mathbb{R}, |x^2 - 2x| + x = 0$
2. $\exists x > 0, x^2 + 2x = 0$

Exercice 3.5:

Étudier la vérité des propositions suivantes :

1. $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}, 2x + 3y - 1 = 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}, 2x + 3y - 1 = 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}, 2x + 3y - 1 = 0$
4. $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}, 2x + 3y - 1 = 0$

4 Méthodes de raisonnement

On considère maintenant une proposition de la forme :

$$P \Rightarrow Q \tag{1.1}$$

Lorsque $P \Rightarrow Q$, on dit que P est une condition suffisante à Q , et que Q est une condition nécessaire à P .

Pour montrer que l'implication (1.1) est vraie, on peut utiliser un raisonnement mathématique tel que :

- Dans le *raisonnement direct* on suppose que la proposition P est vraie et on montre que la proposition Q est vraie.

Exemple :

Soit n un entier relatif. Démontrons que si n est impair, alors n^2 est impair. (Par un raisonnement direct on suppose que la proposition " n impair" est vraie montrons que la proposition " n^2 impair" est vraie). Si n est impair, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$. On a $n^2 = (2k + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$ qui est bien impair du fait que $k' = 2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$. ■

- Le *raisonnement contra-position* est un raisonnement direct pour le problème équivalent c'est-à-dire $\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P$. (voir la propriété 1)

Exemple :

Soit n un entier relatif. Démontrons que si n^2 est pair, alors n est pair. On pose que $P = "n^2 \text{ est pair}"$ et $Q = "n \text{ est pair}"$. On souhaite trouver que $P \Rightarrow Q$.

On a $\text{non } P = "n^2 \text{ est impair}"$ et $\text{non } Q = "n \text{ est impair}"$.

Il suffit (par un raisonnement par contra-posée) de prouver que

$$\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$$

c'est-à-dire que si n est impair, alors n^2 est impair, dont la démonstration est donnée dans l'exemple 4. ■

On peut citer d'autres raisonnements mathématiques par exemple :

- *Raisonnement par absurde* : Pour montrer qu'une proposition est vraie, on suppose que sa négation est vraie et on cherche une contradiction.

Exemple :

$\sqrt{2}$ est irrationnel. En effet, soit P l'énoncé : " $\sqrt{2}$ est irrationnel." Supposons que P est faux ; alors $\overline{P}$ est vrai, c'est-à-dire que $\sqrt{2}$ est rationnel. Il existe alors deux entiers a et b ($b \neq 0$) n'ayant aucun facteur commun tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. On a donc

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2 \text{ est pair} \Rightarrow a \text{ est pair.}$$

Il existe donc un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k$. En substituant, on obtient :

$$2k^2 = b^2 \Rightarrow b^2 \text{ est pair} \Rightarrow b \text{ est pair.}$$

Cela implique que a et b ont un facteur commun égal à 2 (donc différent de 1), ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle ils sont premiers entre eux. Ainsi, $\overline{P}$ est faux, et donc P est vrai. ■

- Le *Raisonnement par contre exemple* : Pour montrer qu'une proposition $(\forall x \in E P(x))$ est fausse, il suffit de trouver un contre exemple c'est-à-dire $\exists x_0 \in E$ tel que $\text{non}P(x_0)$ est vraie.

Exemple :

Soit $P : \forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 1 > 0$. Pour $x = 1$ la proposition P est fausse, alors P est fausse. ■

- *Raisonnement par récurrence* : Le raisonnement par récurrence est utilisé pour démontrer des propriétés qui dépendent d'un entier n .

Théorème 4.1: Pour montrer qu'une proposition $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$ est vraie, il suffit de vérifier qu'elle est vraie pour un entier n_0 fixé, et montrer que la proposition $\forall n \geq n_0, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie.

Exemple :

Démontrons par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathcal{P}(n) : 2^n \geq n + 1$.

On a $2^0 = 1 = 0 + 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, donc

$$2^n \geq n + 1$$

donc

$$2^{n+1} \geq 2(n + 1)$$

Mais

$$2(n + 1) - n + 2 = n \geq 0.$$

Ainsi, on a démontré que $2^{n+1} \geq (n + 2)$, c'est-à-dire $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie. ■

Exemple :

Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^n - 1$ est pair. Soit $\mathcal{P}(n) : n \in \mathbb{N}, 3^n - 1$ est pair.

1. On peut vérifier facilement que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n = 0$, $3^0 - 1 = 0 = 0 \times 2$ et pour $n = 1$, $3^1 - 1 = 2 = 1 \times 2$. C'est-à-dire $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.
2. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie (C'est-à-dire $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $3^n - 1 = 2k$) et montrons que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $3^{n+1} - 1 = 3^n \times 3 - 3 + 2 = 3 \times (3^n - 1) + 2 = 3 \times (2k) + 2 = 2 \times (3k + 1)$ donc pair. Cependant $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^{n+1} - 1$ est pair. ■

5 Exercices

Exercice 5.1:

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Donner leurs négations.

$$a) \left(((-1)^2 = 1) \text{ et } (\sqrt{1} = -1) \right) ; \quad b) \left(((-1)^2 = 1) \text{ ou } (\sqrt{1} = -1) \right); \quad (1.2)$$

$$c) \exists x \in \mathbb{R}, x^5 = -1 \quad ; \quad d) \forall x \in \mathbb{R}, x(x-1) = 0; \quad (1.3)$$

$$e) \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x > y \quad ; \quad f) \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x > y \quad (1.4)$$

Exercice 5.2:

Soit $P(x) : "x \in \mathbb{R}; 2x^2 + x - 1 = 0"$

1. Donner une valeur a qui vérifie $P(a)$ est fausse.
2. Donner une valeur b qui vérifie $P(b)$ est vraie.
3. Que pouvez-vous dire de la proposition $Q : "\forall x \in \mathbb{R}$ (pour tout x dans $\mathbb{R}$) on a ; $2x^2 + x - 1 = 0"$
4. Que pouvez-vous dire de la proposition $R : "\exists x \in \mathbb{R}$ (il existe au moins x dans $\mathbb{R}$) on a ; $2x^2 + x - 1 = 0"$

Exercice 5.3:

Étudier les propositions suivantes :

1. $"\exists x \in \mathbb{R}, |2x^2 + x| - 2x = 0"$
2. $"\exists x > 0, x^2 + x = 0"$

Exercice 5.4:

Soit P et Q deux proposition. Montrer que

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}) \quad (1.5)$$

$$(\overline{P \Rightarrow Q}) \Leftrightarrow (P \text{ et } \overline{Q}). \quad (1.6)$$

Exercice 5.5:

Monter par récurrence les propositions suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, 3 \text{ divise } 3^n + 4^n - 1.$

CHAPITRE 2

LES ENSEMBLES, LES RELATIONS ET LES APPLICATIONS

Ce chapitre introduit les concepts fondamentaux d'ensembles, de relations et d'applications, outils essentiels du langage mathématique.

1 Les ensembles

1.1 Notation et terminologie

Un *ensemble* est une collection d'objets tous distincts, rassemblés d'après une propriété commune. Ces objets sont appelés *éléments* de l'ensemble et sont souvent appelés *membres* de l'ensemble.

Exemple :

L'ensemble dont les éléments sont les quatre premières lettres de l'alphabet s'écrit

$$\{a, b, c, d\}$$

Exemple :

L'ensemble dont les éléments sont les entiers impairs compris entre 2 et 10 s'écrit

$$\{3, 5, 7, 9\}$$

Exemple :

Les ensembles de nombres usuels $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

Par commodité, nous désignons généralement les ensembles par les lettres majuscules de l'alphabet A, B, C , etc. Nous utilisons des lettres minuscules de l'alphabet pour représenter les éléments d'un ensemble.

Pour un ensemble E , nous écrivons $x \in E$ si x est un membre de E ou appartient à E . Nous écrivons $x \notin E$ pour signifie que x n'est pas un membre de E ou n'appartient pas

à E .

Exemple :

Si E représente l'ensemble des entiers impairs, alors $1 \in E$ mais $2 \notin E$. ■

Définition 1.1

Un ensemble *vide* est un ensemble qui ne contient aucun élément. Un ensemble vide est désigné par $\emptyset$.

Exemple :

Soit $E = \{x \in \mathbb{R}; x^2 < 0\}$. Il est clair que E n'a pas d'éléments puisque le carré de tout nombre réel est non négatif. Alors E est un ensemble vide. ■

Définition 1.2

On dit que A est une *partie* (un *sous-ensemble*) de E , ou bien A est contenu dans E , et on note $A \subset E$, si tout élément de A appartient aussi à E .

Proposition 1.3

1. $A \subset E \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in E)$.
2. La négation : $\text{non}(A \subset E) \Leftrightarrow A \not\subset E \Leftrightarrow (\exists x, x \in A \text{ et } x \notin E)$.

Définition 1.4

Deux ensembles E et F sont dits *égaux* si et seulement s'ils contiennent exactement les mêmes éléments, et on écrit $E = F$.

Proposition 1.5

Soient E et F deux ensembles.

$$E = F \Leftrightarrow (F \subset E \text{ et } E \subset F).$$

Remarque.

Notons que ni l'ordre ni la répétition n'ont d'importance pour un ensemble en général. Par conséquent, nous trouvons par exemple que $\{1, 2\} = \{2, 1\} = \{1, 2, 1\}$.

Exemple :

Les ensembles suivants, bien que décrits différemment, sont égaux.

1. L'ensemble de tous les nombres réels tels que $x(x-1)(x-2) = 0$.
 2. L'ensemble de tous les entiers x tels que $0 \leq x \leq 2$.
 3. L'ensemble contenant exactement les entiers naturels 0, 1 et 2.
-

Définition 1.6

On appelle *sous-ensemble propre* d'un ensemble E tout sous-ensemble A de E distinct de E , on note $A \subsetneq E$.

Exemple :

$A = \{1, 2\}$ est un sous-ensemble propre de $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, car $A \subset E$ et $A \neq E$ (ou bien $A \subsetneq E$) ■

Définition 1.7

Le nombre d'éléments d'un ensemble E est appelé le cardinal de E , et est noté $\text{card}(E)$ ou $|E|$.

Exemple :

1. $\text{card}(\emptyset) = 0$.
2. Un ensemble E avec un seul élément ($\text{card}(E) = 1$) est appelé ensemble singleton. ■

Remarque.

Notons que le cardinal d'un ensemble est un entier naturel ou infini.

Un ensemble E est dit fini si $\text{card}(E) < +\infty$. Un ensemble E est dit infini si $\text{card}(E) = +\infty$.

Exemple :

$\text{card}(\{0, 1, 2, 3, 4\}) = 5$, $\text{card}(\{a, b, c, d, e, f, g\}) = 7$, $\text{card}(\mathbb{N}) = +\infty$. ■

1.2 Opérations fondamentales sur les ensembles**Définition 1.8**

Si A est un sous-ensemble de E , son *complémentaire* dans E , écrit $\complement_E A$, est défini comme

$$\complement_E A = E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

On le note parfois lorsque qu'il n'y a pas d'ambiguïté, $\bar{A}$.

Exemple :

Soit $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $A = \{2, 4\}$. Il est clair que $\complement_E A = \{0, 1, 3, 5, 6\}$. ■

Exemple :

Les éléments du complémentaire $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont appelés *nombres irrationnels*. Par exemple $\sqrt{2}$. ■

Définition 1.9

L'*intersection* de deux sous-ensembles A et B de E , notée $A \cap B$, est définie comme

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

La *réunion* de deux sous-ensembles A et B de E , notée $A \cup B$, est

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Si $A_1, \dots, A_i, \dots, A_N$ sont des sous-ensembles d'un ensemble E , leur intersection, notée par $\bigcap_{i=1}^N A_i$, est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à tous les A_i et leurs réunion, notée par $\bigcup_{i=1}^N A_i$, est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à au moins un A_i .

$$\bigcap_{i=1}^N A_i = \{x \in E \mid \forall i = 1 \dots N; x \in A_i\}, \quad \bigcup_{i=1}^N A_i = \{x \in E \mid \exists i = 1 \dots N; x \in A_i\}.$$

Exemple :

1. Si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{a, b, c\}$, alors $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \{1, 2, 3, a, b, c\}$.
2. Si $A = [0, 1[$ et $B = \{0, 1, 2\}$, alors $A \cap B = \{0\}$, $A \cup B = [0, 1] \cup \{2\}$.

Propriété 1.10

Il résulte des propriétés des opérations logiques un grand nombre de règles dont voici quelques unes. Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E .

1. $\overline{(A \subset B)} \Leftrightarrow (A \cap \complement_E B \neq \emptyset)$.
2. $(A \subset B) \Leftrightarrow (\complement_E B \subset \complement_E A)$.
3. $\complement_E(A \cup B) \Leftrightarrow (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$.
4. $\complement_E(A \cap B) \Leftrightarrow (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$.

Preuve de la propriété.

1. On a

$$\begin{aligned} \overline{(A \subset B)} &\Leftrightarrow \overline{(\forall x \in E, x \in A \Rightarrow x \in B)} \Leftrightarrow (\exists x \in E, x \in A \text{ et } \overline{x \in B}) \\ &\Leftrightarrow (\exists x \in E, x \in A \text{ et } x \notin B) \Leftrightarrow (\exists x \in E, x \in A \text{ et } x \in \complement_E B) \Leftrightarrow (\exists x \in E, x \in A \cap \complement_E B) \\ &\Leftrightarrow (A \cap \complement_E B \neq \emptyset) \end{aligned}$$

2. En effet :

$$\begin{aligned}(A \subset B) &\Leftrightarrow (\forall x \in E, x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow (\forall x \in E, x \notin B \Rightarrow x \notin A) \Leftrightarrow (\forall x \in E, x \in \complement_E B \\ &\Leftrightarrow (\complement_E B \subset \complement_E A)\end{aligned}$$

3. En effet : Soit

$$\begin{aligned}x \in \complement_E(A \cup B) &\Leftrightarrow x \in E, x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \in E, \overline{x \in A \cup B} \Leftrightarrow x \in E, \overline{x \in A \text{ ou } x \in B} \\ &\Leftrightarrow x \in E, (x \notin A \text{ et } x \notin B) \Leftrightarrow (x \in E, x \notin A) \text{ et } (x \in E, x \notin B) \\ &\Leftrightarrow x \in \complement_E A \text{ et } x \in \complement_E B \Leftrightarrow x \in \complement_E A \cap \complement_E B\end{aligned}$$

4. En effet : Soit

$$\begin{aligned}x \in \complement_E(A \cap B) &\Leftrightarrow x \in E, x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \in E, \overline{x \in A \cap B} \Leftrightarrow x \in E, \overline{x \in A \text{ et } x \in B} \\ &\Leftrightarrow x \in E, (x \notin A \text{ ou } x \notin B) \Leftrightarrow (x \in E, x \notin A) \text{ ou } (x \in E, x \notin B) \\ &\Leftrightarrow x \in \complement_E A \text{ ou } x \in \complement_E B \Leftrightarrow x \in \complement_E A \cup \complement_E B.\end{aligned}$$

Définition 1.11

Deux ensembles A et B sont dits *disjoints* s'ils n'ont aucun élément en commun. Autrement dit, $A \cap B = \emptyset$.

Définition 1.12

Soit A et B des ensembles. La *différence* d'ensembles ou le complément relatif de A par rapport à B , noté $A \setminus B$ (ou $A - B$) est définie comme suit

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

Exemple :

Si $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ et $B = \{3, 4, 7, 8, 9\}$, alors $A \setminus B = \{0, 1, 2, 5\}$ et $B \setminus A = \{7, 8, 9\}$.

Définition 1.13

Soient A et B des ensembles. La différence symétrique de A et B , notée $A \Delta B$ est définie comme

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Exemple :

Si $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ et $B = \{3, 4, 7, 8, 9\}$, alors $A \Delta B = \{0, 1, 2, 5, 7, 8, 9\}$.

Proposition 1.14

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (B \cap A).$$

Définition 1.15

Soient A et B des ensembles. Le *produit cartésien* de A et B , noté $A \times B$ est l'ensemble défini par

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ et } b \in B\}$$

En généralisant, le produit cartésien de n ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n$ est défini par

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in A_i \text{ } i = 1, \dots, n\}$$

Soit $(a_1, \dots, a_n)$ un élément du produit $A_1 \times \dots \times A_n$. On appelle a_j sa j -ème *coordonnée*, ou sa j -ème *composante*, ou sa *projection sur le j -ème facteur*.

Exemple :

Si $A = \{0, 1, 2\}$ et $B = \{a, b\}$, alors $A \times B = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$, $B \times A = \{(a, 0), (a, 1), (a, 2), (b, 0), (b, 1), (b, 2)\}$, $A \times A = A^2 = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}$. ■

Exemple :

Soit $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. Alors :

- Le produit Cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$ ou le plan cartésien à 2 dimensions ou le plan xy .
- Le produit Cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$ est l'espace ordinaire de la géométrie élémentaire ou l'espace euclidien à trois dimensions.

En général, le produit $\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^n$ qui est l'ensemble des n -uplet de nombres réels, est appelé l'espace euclidien à n dimensions. ■

Définition 1.16

Soit E un ensemble. On appelle ensemble des parties de E , l'ensemble noté $\mathcal{P}(E)$ constitué de tous les sous ensembles de E .

$$\mathcal{P}(E) = \{A | A \subset E\}$$

Exemple :

Soit $E = \{0, 1, 2\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, E\}$. ■

Exercice 1.17:

Soit E un ensemble de $\text{card}(E) = n \geq 0$. Montrer que $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

Solution de l'exercice. Pour tout $0 \leq k \leq n$, il existe $\binom{n}{k}$ (ou C_n^k) sous-ensembles

de cardinal k . Supposons que E ait n éléments. En comptant les sous-ensembles de E selon le nombre k d'éléments dans un ensemble, on a l'identité combinatoire

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k = 2^n.$$

Définition 1.18

Soit E_i une famille d'ensembles. On dit que des ensembles E_i sont *deux à deux disjoints* si $\forall i, \forall j, i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \emptyset$.

Remarque.

Ne pas confondre distincts et disjoints. Et ne pas confondre une famille $\{E_i\}$ deux à deux disjoints avec $\bigcap_i E_i = \emptyset$.

Définition 1.19

Une *partition* d'un ensemble E est un ensemble de parties non vides de E deux à deux disjointes et dont l'union est E .

Remarque.

On dit que la famille $\{E_i\}_{i=1, \dots, n}$ de sous ensembles de E constitue une partition de E , si et seulement si

1. $\forall i = 1, \dots, E_i \neq \emptyset$,
2. $\bigcup_{i=1}^{i=n} E_i = E$,
3. $\forall i, j = 1, \dots, n, i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \emptyset$.

Exemple :

Si $E = \{1, 2, 3\}$, alors

Les partitions de E sont $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \{\{1\}, \{2, 3\}\}, \{\{1, 3\}, \{2\}\}, \{\{1, 2, 3\}\}$.

$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ n'est pas une partition de E parce qu'elle contient l'ensemble vide $\emptyset$.

$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$ n'est pas une partition de E parce que l'union des éléments est différent de E .

$\{\emptyset, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ n'est pas une partition parce que $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\} \neq \emptyset$. ■

Remarque.

Le nombre de partitions d'un ensemble fini.

Soit E un ensemble à n élément (ensemble fini) alors le nombre de partition de E est appelé nombre de Bell^(a) B_n . Les premiers nombres de Bell sont $B_1 = 1, B_2 = 2, B_3 = 5, B_4 = 15, B_5 = 52, B_6 = 203 \dots$

a. Eric Temple Bell (1883-1960) : Mathématicien et écrivain écossais.

2 Relations

2.1 Définitions, exemples et classes

Définition 2.1

Soient E et F deux ensembles. Tout sous ensemble du produit $E \times F$ est appelé *relation binaire* de E vers F . Tout sous ensemble de $E \times E$ est appelé relation binaire dans E . Si $(x, y) \in \mathcal{R} \subset E \times F$, on dira que x et y sont liés par la relation $\mathcal{R}$.

Exemple :

Soit $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{a, b, c\}$. Alors $\mathcal{R} = \{(1, a), (1, c), (2, b), (3, a), (3, b)\}$ est une relation de E vers F . ■

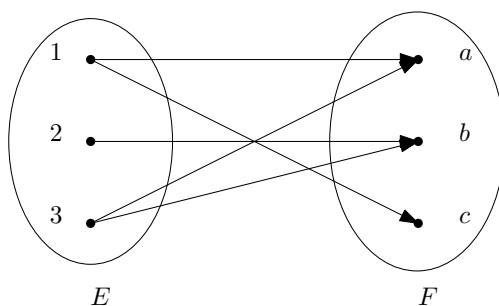


FIGURE 2.1 – Graphe de la relation dans l'exemple 2.1

Exemple :

Soit $E = \{0, 1, 2, 3\}$. Voici quelques-unes des relations de E vers lui même.

$$\emptyset; \{(1, 0)\}; \{(0, 0), (1, 3), (2, 1), (3, 0), (3, 2)\}; \dots$$

2.2 Relations dans un ensemble

Définition 2.2

Une *relation dans l'ensemble* E est une relation de E vers E .

Exemple :

Soit $E = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Déterminons les éléments de la relation $\mathcal{R} = \{(x, y) \in E^2 : x \text{ divise } y\}$. En effet

$$\mathcal{R} = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}.$$

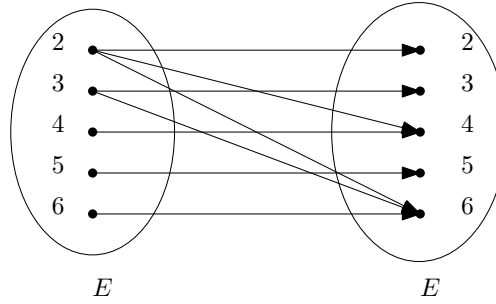


FIGURE 2.2 – Graphe de la relation dans l'Exemple 2.2

Exemple :

Dans $\mathbb{Z}$, on définit la relation suivante

$$\mathcal{R} = \{(p, q) \in \mathbb{Z}^2 \mid p \equiv q \pmod{n}\}$$

Définition 2.3

Une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est dite relation *réflexive* si

$$\forall x \in E, x\mathcal{R}x \quad (\text{ou } \forall x \in E, (x, x) \in \mathcal{R})$$

Négation : $\exists x \in E, (x, x) \notin \mathcal{R}$.

Exemple :

Soit $E = \{0, 1, 2\}$.

$\mathcal{R}_1 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\} \subset E^2$ est réflexive car $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2)\} \subset \mathcal{R}_1$.

$\mathcal{R}_2 = \{(0, 0), (1, 1)\} \subset E^2$ n'est pas réflexive puisque $2 \in E$ mais $(2, 2) \notin \mathcal{R}_2$.

Exemple :**Définition 2.4**

Une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est dite *symétrique* si

$$\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x \quad (\text{ou } \forall x, y \in E, (x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{R})$$

Négation : $\exists x, y \in E, (x, y) \in \mathcal{R}$ et $(y, x) \notin \mathcal{R}$.

Exemple :

Soit $E = \{0, 1, 2\}$. On a

$\mathcal{R}_1 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (0, 2), (2, 2)\} \subset E^2$ est symétrique.

$\mathcal{R}_2 = \{(0, 0), (1, 2), (1, 1)\} \subset E^2$ n'est pas symétrique puisque $(1, 2) \in E^2$ et $(2, 1) \notin \mathcal{R}_2$.

Exemple :

Dans $\mathbb{Z}$, la relation $\mathcal{R}$ définie pour tout $p, q \in \mathbb{Z} : p\mathcal{R}q \Leftrightarrow p \equiv q \pmod{3}$, est une relation symétrique. En effet, soit $p, q \in \mathbb{Z}$

$$p\mathcal{R}q \Leftrightarrow p \equiv q \pmod{3} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid p - q = 3k \Leftrightarrow \exists k' = -k \in \mathbb{Z} \mid q - p = 3k' \Leftrightarrow q\mathcal{R}p.$$

Définition 2.5

Une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est dite *antisymétrique* si

$$\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y \quad (\text{ou } \forall x, y \in E, (x, y) \in \mathcal{R} \text{ et } (y, x) \in \mathcal{R} \Rightarrow x = y)$$

Négation : $\exists x, y \in E, ((x, y) \in \mathcal{R} \text{ et } (y, x) \in \mathcal{R}) \text{ et } x \neq y$

Exemple :

La relation "divise" dans $\mathbb{N}^*$ n'est pas symétrique puisque, par exemple 1 divise 2, mais 2 ne divise pas 1. Elle est antisymétrique, en effet, soit $p, q \in \mathbb{N}^*$

$$\left\{ \begin{array}{l} p \text{ divise } q \\ \text{et} \\ q \text{ divise } p \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists k_1 \in \mathbb{N} \mid q = k_1 p \\ \text{et} \\ \exists k_2 \in \mathbb{N} \mid p = k_2 q \end{array} \right\} \Rightarrow k_1 k_2 = 1 \Rightarrow k_1 = k_2 = 1 \Rightarrow p = q.$$

Exemple :

La relation " $\leq$ " dans $\mathbb{R}$ n'est pas une relation symétrique car, par exemple $1 \leq 2$ but $2 \not\leq 1$. Elle est par contre antisymétrique. En effet, soit $x, y \in \mathbb{R}$

$$(x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y.$$

Exemple :

La relation "inclusion $\subset$ " dans $\mathcal{P}(E)$ est antisymétrique.

Définition 2.6

Une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est dite *transitive* si

$$\forall x, y, z \in E, x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z \quad (\text{ou } \forall x, y, z \in E, (x, y) \in \mathcal{R} \text{ et } (y, z) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{R}).$$

Négation : $\exists x, y, z \in E, ((x, y) \in \mathcal{R} \text{ et } (y, z) \in \mathcal{R}) \text{ et } (x, z) \notin \mathcal{R}$

Exemple :

Soit $E = \{0, 1, 2\}$. On a

$\mathcal{R}_1 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 2), (1, 1), (0, 2), (2, 2)\} \subset E^2$ est transitive.

$\mathcal{R}_2 = \{(0, 0), (1, 2), (1, 1), (2, 0)\} \subset E^2$ n'est pas transitive puisque $(1, 2) \in \mathcal{R}_2$ et $(2, 0) \in \mathcal{R}_2$ mais $(1, 0) \notin \mathcal{R}_2$. ■

Exemple :

La relation "divise" dans $\mathbb{N}$ est transitive. En effet, soit $p, q, n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} p \text{ divise } q \\ \text{et} \\ q \text{ divise } n \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists k_1 \in \mathbb{N} \mid q = k_1 p \\ \text{et} \\ \exists k_2 \in \mathbb{N} \mid n = k_2 q \end{array} \right\} \Rightarrow \exists k = k_1 k_2 \text{ tel que } n = kp \Rightarrow p \text{ divise } n.$$

Définition 2.7

Une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est dite *relation d'équivalence* si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exemple :

Soi $E = \{0, 1, 2\}$. On a

$\mathcal{R}_1 = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\} \subset E^2$ est relation d'équivalence.

La relation $\mathcal{R}_2 = \{(0, 0), (1, 2), (1, 1), (2, 0)\} \subset E^2$ n'est pas une relation d'équivalence car $(2, 2) \notin \mathcal{R}_2$ donc $\mathcal{R}_2$ n'est pas réflexive alors pas d'équivalence. ■

Exemple :

Dans $\mathbb{Z}$, la relation $\mathcal{R}$ est définie par $p\mathcal{R}q \Leftrightarrow p - q \pmod{3}$ est une relation d'équivalence. ■

Définition 2.8

Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. On appelle classe d'équivalence une partie de E formée de tous les éléments équivalents à l'un d'entre eux,

$$x = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}$$

Nous désignons par $E/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence et nous disons " E modulo $\mathcal{R}$ "

Proposition 2.9

Deux classes d'équivalence sont disjointes ou confondues.

Remarque.

Si une relation d'équivalence est donnée sur l'ensemble E , alors l'ensemble de toutes les classes d'équivalence forme une partition de E . Inversement, si une partition P de E est donnée, alors nous pouvons définir une relation d'équivalence sur E notée $\mathcal{R}$, par $x\mathcal{R}y$ si et seulement s'il existe une partie de P qui contient à la fois x et y . Les notions de relation d'équivalence et de partition sont donc fondamentalement équivalentes.

Exemple :

Dans $\mathbb{Z}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$p\mathcal{R}q \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } p - q = 3k.$$

1. La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. En effet

- Réflexivité : On a $p - p = 0 = 0 \times 3$ donc $\exists k = 0 \in \mathbb{Z}$ tel que $p - q = 3k$ donc $p\mathcal{R}p$.
- Symétrie : $p\mathcal{R}q \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $p - q = 3k \Leftrightarrow \exists k' = -k \in \mathbb{Z}$ tel que $q - p = 3k' \Rightarrow q\mathcal{R}p$.
- Transitivité : $p\mathcal{R}q$ et $q\mathcal{R}r$ alors $\exists k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que $p - q = 3k$ et $q - r = 3k'$ donc $p - r = (p - q) + (q - r) = 3k + 3k' = 3(k + k')$. D'où $p\mathcal{R}r$.

D'où $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Soit p un entier, on note par $\dot{p}$ la classe d'équivalence représenté par p . On a

$$\begin{aligned} \dot{0} &= \{p \in \mathbb{Z}/p\mathcal{R}0\} = \{p \in \mathbb{Z}/p = 3k, k \in \mathbb{Z}\} = \{3k, k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots - 3, 0, 3, \dots\} \\ \dot{1} &= \{p \in \mathbb{Z}/p\mathcal{R}1\} = \{p \in \mathbb{Z}/p - 1 = 3k, k \in \mathbb{Z}\} = \{3k + 1, k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots - 2, 1, 4, \dots\} \\ \dot{2} &= \{p \in \mathbb{Z}/p\mathcal{R}2\} = \{p \in \mathbb{Z}/p - 2 = 3k, k \in \mathbb{Z}\} = \{3k + 2, k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots - 1, 2, 5, \dots\} \end{aligned}$$

On remarque que $\dot{0} = \dot{3} = \dot{6} = \dots$, $\dot{1} = \dot{4} = \dot{7} = \dots$, $\dot{2} = \dot{5} = \dot{8} = \dots$, donc l'espace des classes d'équivalence est donné par $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}\}$.

3. L'ensemble quotient $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}\}$ forme une partition de l'ensemble $\mathbb{Z}$. En effet.

$$\begin{aligned} \dot{0} \cup \dot{1} \cup \dot{2} &= \mathbb{Z} \\ \dot{0} \cap \dot{1} &= \emptyset, \dot{0} \cap \dot{2} = \emptyset \text{ et } \dot{1} \cap \dot{2} = \emptyset. \end{aligned}$$

Définition 2.10

Une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est dite relation d'ordre ou d'ordre partielle si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Exemple :

1. Dans $\mathbb{R}$ la relation défini par $x\mathcal{R}y$ si $x \leq y$ est une relation d'ordre.

2. Soit E un ensemble. Sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$, la relation inclusion $\subset$ est une relation d'ordre.

Définition 2.11

Un ordre $\mathcal{R}$ sur E est total si pour tous $x, y \in E$, on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$.

Exemple :

Soit E un ensemble. L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est partiellement ordonné par l'inclusion. Par exemple, si $E = \{0, 1, 2\}$ alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, E\}$. On a $\{0\} \not\subset \{1\}$ et $\{1\} \not\subset \{0\}$.

2.3 Maximum, minimum, borne supérieure et borne inférieure

Définition 2.12

Soit E un ensemble totalement ordonné par la relation $\prec$. Soit A une partie de E . On définit le *maximum* de A comme étant le plus grand de tous les éléments de A et le *minimum* comme étant le plus petit des éléments de A . On les notera respectivement $\max(A)$ et $\min(A)$

$$M = \max(A) \Leftrightarrow \forall x \in A, x \prec M \text{ et } m = \min(A) \Leftrightarrow \forall x \in A, m \prec x$$

exm Soit l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ muni de la relation d'ordre total $\leq$ (inférieur ou égale) et soit $A = \{1, 3, 4, 5\}$. On a

$$M = \max(A) \Leftrightarrow \forall x \in A, x \leq M \text{ et } m = \min(A) \Leftrightarrow \forall x \in A, m \leq x$$

1. $\min(\mathbb{N}) = 0$ par contre le $\max(\mathbb{N})$ n'existe pas. En effet : par absurde, on suppose que $\max(\mathbb{N}) = M$, alors $\exists x = M + 1$ tel que $x \not\leq M$.
2. $\max(A) = 5$ et $\min(A) = 1$.

Définition 2.13

Soit E un ensemble, $\prec$ relation d'ordre total sur E et A une partie de E .

On dit qu'un élément x de E est un *majorant* de A si pour tout $y \in A$ on a $y \prec x$.

On dit alors que A est une partie majorée (par x) de E .

On dit d'un élément x de E est un *minorant* de A si pour tout $y \in A$ on a $x \prec y$.

On dit alors que A est une partie minorée (par x) de E .

On dit que la partie A est bornée si à la fois majorée et minorée.

Exemple :

Pour la relation d'ordre inférieur ou égale ($\leq$) sur $\mathbb{Q}$, la partie $A = \{x \in \mathbb{Q}, 0 < x \leq 1\}$ est majorée par 1 et minorée par 0. De plus, tout nombre rationnel négatif est un minorant de A et tout nombre rationnel plus grand que 1 est un majorant de A . on remarquera que 0, le minorant de A n'appartient pas à A mais le majorant 1 oui.

Définition 2.14

Soit E un ensemble ordonné par $\prec$ et A une partie de E . On appelle *borne supérieure* de A le plus petit des majorants de A . Autrement dit, $x \in E$ est une *borne supérieure* de A si pour tout $y \in A$ on a $y \prec x$ et si pour tout majorant x' de A on a $x \prec x'$. On appelle *borne inférieure* de A le plus grand des minorants de A . Autrement dit, $x \in E$ est une borne inférieure de A si pour tout $y \in A$ on a $x \prec y$ et si pour tout minorant x' de A on a $x' \prec x$.

Notation : On notera, $\sup(A)$ la borne supérieure de A et $\inf(A)$ la borne inférieure de A .

Exemple :

Soit $A = \{x \in \mathbb{Q}, 0 < x \leq 1\}$. Alors $\inf(A) = 0$ et $\sup(A) = 1$. ■

Remarque.

La borne supérieure ou inférieure d'une partie A (même si elle existe dans E) n'appartient pas nécessairement à A . Elles peuvent aussi ne pas exister dans E (par exemple, une partie non majorée n'a pas de sup, ou dans $\mathbb{Q}$, $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ n'a pas de sup dans $\mathbb{Q}$).

Exemple :

Soit $I =]0, 1[$ un intervalle dans $\mathbb{R}$. Ses bornes inférieure et supérieure, respectivement, 0 et 1 n'appartiennent pas à I , bien qu'elles appartiennent à $\mathbb{R}$. ■

3 Applications

Soit E et F deux ensembles. Une *application* de E (l'ensemble de départ ou de définition) dans F (l'ensemble d'arrivée), notée $f : E \rightarrow F$, est une relation binaire de E vers F telle que pour tout élément $x \in E$, il existe un unique élément $y \in F$ tel que $y = f(x)$.

Le **graphe** d'une application $f : E \rightarrow F$ est le sous-ensemble $Gr(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$ du produit $E \times F$.

Exemple :

L'application *identique* $id_E : E \rightarrow E$, définie par $id_E(x) = x$.

La *fonction caractéristique* ou *fonction indicatrice* $c_A : E \rightarrow \{0, 1\}$ d'un sous-ensemble A de E , définie par $c_A(x) = 1$ si $x \in A$, $c_A(x) = 0$ sinon. ■

Définition 3.1

Soit $f : E \rightarrow F$ une application entre ensembles et $A \subset E$ une partie de E . La *restriction* de f à A est l'application $f|_A : A \rightarrow F$ définie par $f|_A(x) = f(x)$ pour $x \in A$.

Exemple :

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une application définie par $f(x) = |x|$, et $A = [0, +\infty[$, la restriction $x \in A \mapsto f|_A(x) = x$ est injective. ■

Définition 3.2

Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : E' \rightarrow F'$ deux applications avec $E \subset E'$ et $F \subset F'$. Si pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$ alors on dit que g est un *prolongement* de f .

Exemple :

Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. On peut construire un prolongement g continu sur $\mathbb{R}$ de f ceci en prenant $g(0) = 1$. ■

Définition 3.3

Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont deux applications, on définit l'*application composée* $g \circ f : E \rightarrow G$ par $g \circ f(x) = g(f(x))$, pour $x \in E$.

Exemple :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(y) = \sin y$. Alors $g \circ f(x) = \sin(e^x)$. ■

Définition 3.4

Si $f : E \rightarrow F$ est une application et $A \subset E$ un sous-ensemble de E , son *image* (aussi appelée *image directe*) est

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A; y = f(x)\}.$$

Définition 3.5

Si $f : E \rightarrow F$ est une application et $B \subset F$ un sous-ensemble de F , son *image réciproque* est

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Exercice 3.6:

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$.

1. Déterminer les images directes suivantes

$$f(\{-1, 2\}), f([-4, -1]), f([-4, 1]).$$

2. Déterminer les images réciproques suivantes

$$f^{-1}(\{2\}), f^{-1}(\{-3\}), f^{-1}([-3, 2]).$$

En effet, on a $f(x) = |x|$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les images directes suivantes

$$f(\{-1, 2\}) = \{f(-1), f(2)\} = \{1, 2\}, \quad f([-4, -1]) = [1, 4], \quad f([-4, 1]) = [0, 4].$$

2. Déterminer les images réciproques suivantes

$$f^{-1}(\{2\}) = \{-2, 2\}, \quad f^{-1}(\{-3\}) = \emptyset, \quad f^{-1}([-3, 2]) = [-2, 2].$$

Proposition 3.7

Soit $f : E \rightarrow F$ et $A, B \subset E$, alors

$$\begin{aligned} A \subset B &\Rightarrow f(A) \subset f(B) \\ f(A \cup B) &= f(A) \cup f(B) \\ f(A \cap B) &\subset f(A) \cap f(B) \end{aligned}$$

Preuve de la Proposition.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

1. Soit $A, B \subset E$, tel que $A \subset B$ montrons que $f(A) \subset f(B)$.

Soit $y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A$ tel que $y = f(x) \Rightarrow \exists x \in B$ tel que $y = f(x)$, car $A \subset B \Rightarrow y \in f(B)$.

2. Soit $A, B \subset E$, montrons que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

Soit $y \in f(A \cup B)$. Cela signifie qu'il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$.

Donc, $x \in A$ ou $x \in B$.

Si $x \in A$, alors $y = f(x) \in f(A)$. Si $x \in B$, alors $y = f(x) \in f(B)$.

Ainsi, $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$, ce qui signifie $y \in f(A) \cup f(B)$.

Donc $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$.

Si $y \in f(A) \cup f(B)$, alors $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$.

— Si $y \in f(A)$, alors il existe $x_A \in A$ tel que $y = f(x_A)$. Comme $A \subseteq A \cup B$, on a $x_A \in A \cup B$, donc $y = f(x_A) \in f(A \cup B)$.

— Si $y \in f(B)$, alors il existe $x_B \in B$ tel que $y = f(x_B)$. Comme $B \subseteq A \cup B$, on a $x_B \in A \cup B$, donc $y = f(x_B) \in f(A \cup B)$.

Dans les deux cas, $y \in f(A \cup B)$. Ainsi, $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$.

Ayant déjà montré l'inclusion $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$, et maintenant $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$, nous concluons à l'égalité : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

3. Soit $A, B \subset E$, montrons que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Soit $y \in f(A \cap B)$. Par définition de l'image directe, cela signifie qu'il existe un élément $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$.

Puisque $x \in A \cap B$, on a $x \in A$ et $x \in B$.

— Comme $x \in A$ et $y = f(x)$, on a $y \in f(A)$.

— Comme $x \in B$ et $y = f(x)$, on a $y \in f(B)$.

Puisque $y \in f(A)$ et $y \in f(B)$, on en déduit que $y \in f(A) \cap f(B)$.

Ainsi, tout élément de $f(A \cap B)$ est également un élément de $f(A) \cap f(B)$, ce qui prouve l'inclusion :

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

Exercice 3.8:

Montrer que $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$. En effet, pour montrer que $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$, il suffit de chercher un contre exemple à l'inclusion inverse : Soit $f(x) = x^2$ avec $x \in \mathbb{R}$, on prend $A = [-1, 0]$ et $B = [0, 1]$, on a d'une part $f(A \cap B) = f(\{0\}) = \{0\}$ et d'autre part on a $f(A) \cap f(B) = [0, 1] \cap [0, 1] = [0, 1]$. Donc $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

Proposition 3.9

Soit $f : E \rightarrow F$ et $A, B \subset F$, alors

$$\begin{aligned} A \subset B &\Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B) \\ f^{-1}(A \cup B) &= f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \\ f^{-1}(A \cap B) &= f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \\ f^{-1}(\mathbb{C}_F A) &= \mathbb{C}_E f^{-1}(A) \end{aligned}$$

Preuve de la Proposition.

Si $A, B \subset F$,

1. Montrons que, si $A \subset B$ alors $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.

$$\text{Soit } x \in f^{-1}(A) \Rightarrow f(x) \in A \Rightarrow f(x) \in B \text{ car } A \subset B \Rightarrow x \in f^{-1}(B)$$

2. Montrons que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in f^{-1}(A \cup B) &\Leftrightarrow f(x) \in A \cup B \Leftrightarrow f(x) \in A \text{ ou } f(x) \in B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \text{ ou } x \in f^{-1}(B) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B). \end{aligned}$$

3. Montrons que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in f^{-1}(A \cap B) &\Leftrightarrow f(x) \in A \cap B \Leftrightarrow f(x) \in A \text{ et } f(x) \in B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \text{ et } x \in f^{-1}(B) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B). \end{aligned}$$

4. Montrons que $f^{-1}(\mathbb{C}_F A) = \mathbb{C}_E f^{-1}(A)$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in f^{-1}(\mathbb{C}_F A) &\Leftrightarrow f(x) \in \mathbb{C}_F A \Leftrightarrow f(x) \in F \text{ et } f(x) \notin A \Leftrightarrow x \in E \text{ et } x \notin f^{-1}(A) \\ &\Leftrightarrow x \in \mathbb{C}_E f^{-1}(A). \end{aligned}$$

Définition 3.10

On dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est *injective* si, pour tous $x, x' \in E$,

$$x \neq x' \Leftrightarrow f(x) \neq f(x').$$

ou

$$f(x) = f(x') \Leftrightarrow x = x'.$$

Exemple :

L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$ n'est pas injective. En effet pour $x = 1$ et $x' = -1$ on a $x \neq x'$ et $f(x) = f(x') = 1$.

Mais si f est définie de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, alors elle serait injective. ■

Définition 3.11

On dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est *surjective* si, pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Autrement dit, f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

Exemple :

L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$ n'est pas surjective. En effet : $\exists y = -1$, tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = |x| \neq -1$.

Si l'ensemble d'arrivé est $\mathbb{R}_+$ alors elle serait surjective. ■

Définition 3.12

On dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est *bijjective* si, pour tout $y \in F$, il existe un et un seul $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Autrement dit, f est bijective si et seulement si f est à la fois injective et surjective.

Exemple :

L'application $f : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ telle que $f(x) = x^2 - 1$ est bijective. En effet

1. $f(x) = f(x') \Rightarrow x^2 - 1 = x'^2 - 1 \Rightarrow x^2 = x'^2 \Rightarrow x = x'$, car $x, x' \geq 0$. D'où f est injective.
2. Soit $y \in [0, \infty[$ tel que $y = f(x) = x^2 - 1$. Comme $y \geq 0$, alors $y + 1 \geq 1$, donc $\sqrt{y+1} \geq 1$. On a $x^2 = y + 1 \geq 1$ donc il existe $x = \sqrt{y+1} \in [1, +\infty[$ tel que $y = f(x)$. D'où f est surjective.

f est injective et surjective donc elle est bijective. ■

Remarque.

Si E et F sont des ensembles finis et s'il existe une application bijective de E dans F , alors E a autant d'éléments que F .

Définition 3.13

Soit $f : E \rightarrow F$ une application bijective. Sa réciproque, notée par $f^{-1} : F \rightarrow E$, est définie par l'assertion

$$(f(x) = y) \Leftrightarrow (x = f^{-1}(y)).$$

et l'on a

$$\forall x \in E : f^{-1} \circ f(x) = x \text{ et } \forall y \in F : f \circ f^{-1}(y) = y.$$

$f^{-1} \circ f$ est donc l'application identique dans E et $f \circ f^{-1}$ est l'application identique dans F .

Proposition 3.14

Si f est bijective, son application réciproque f^{-1} est unique et elle est aussi bijective.

Proposition 3.15

Notons que si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont des applications bijectives, alors

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Proposition 3.16

Soient A, B, C et D quatre ensembles et des applications $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ et $h : C \rightarrow D$. Alors

$$g \circ f \text{ injective} \Rightarrow f \text{ injective} \quad (2.1)$$

$$g \circ f \text{ surjective} \Rightarrow g \text{ surjective} \quad (2.2)$$

$$g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives} \Leftrightarrow f, g \text{ et } h \text{ sont bijectives} \quad (2.3)$$

Preuve de la Proposition.

1. Supposons que $g \circ f$ est injective, c'est-à-dire pour tout $x, x' \in A$ si $g \circ f(x) = g \circ f(x')$ alors $x = x'$.
Soient $x, x' \in A$ avec $f(x) = f(x')$ donc $g \circ f(x) = g \circ f(x')$ comme $g \circ f$ est injective donc $x = x'$. D'où f est injective.
2. Supposons que $g \circ f$ est surjective, c'est-à-dire pour tout $y \in C$, $\exists x \in A$ tel que $y = g \circ f(x)$.
Soit $y \in C$, comme $g \circ f$ est surjective donc $\exists x \in A$ tel que $y = g \circ f(x)$. Donc $\exists z \in B$ avec $z = f(x)$, tel que $y = g(z)$. D'où g est surjective.
3. ($\Leftarrow$) Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective. De même pour $h \circ g$.
($\Rightarrow$) Si $g \circ f$ est bijective donc surjective alors d'après (2.2) g est surjective. Si $h \circ g$ est bijective donc injective, alors d'après (2.1) g est injective. Par conséquent g est à la fois injective et surjective donc bijective.
On a $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ est composée d'applications bijectives donc bijective. De

même pour h . On a $h = (h \circ g) \circ g^{-1}$ est composée d'applications bijectives donc bijective.

4 Exercices

Exercice 4.1:

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer les sous ensembles suivants

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \setminus B, \quad B \setminus A, \quad C_E^A, \quad C_E^B, \quad A \Delta B.$$

1. $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4, 6\}$.
2. $E = \mathbb{R}$, $A = [1, 4]$, $B =]2, 6] \cup \{1\}$.
3. $E = \mathbb{R}$, $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 6 \geq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Exercice 4.2:

Soit A, B, C trois sous-ensembles de E . Montrer que :

$$A \subset \mathcal{C}_E B \Leftrightarrow B \subset \mathcal{C}_E A.$$

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C); \quad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Exercice 4.3:

Soit A, B deux sous-ensemble de E , montrer

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (C_E^B \subset C_E^A); \quad C_E^{(A \cup B)} = C_E^A \cap C_E^B; \quad C_E^{(A \cap B)} = C_E^A \cup C_E^B.$$

Exercice 4.4:

Écrire les ensembles suivants comme réunion d'ensembles soit de la 1^{re} forme ou de la 2^{me} forme

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2; y \leq x\}; \quad D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1; y \geq -2x + 1\}$$

Exercice 4.5:

Soient A et B deux sous ensembles de E . Montrer que

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C); \quad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Exercice 4.6:

Soit $f : E \rightarrow F$ une application

1. Si $A, B \subset E$, montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, et que $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.
2. Si $C, D \subset F$, montrer que $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Exercice 4.7:

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2 - 4$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Soit $g : [2, +\infty[\rightarrow [0, \infty[$ telle que $g(x) = f(x)$. Montrer que la fonction g est bijective et donner sa réciproque.

Exercice 4.8:

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Soit $g : [-1, 1] \rightarrow [-1/2, 1/2]$ telle que $g(x) = f(x)$. Montrer que la fonction g est bijective et donner sa réciproque.

CHAPITRE 3

FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE À VALEURS RÉELLES

Ce chapitre explore les propriétés fondamentales des fonctions réelles d'une variable réelle, en commençant par les notions de limite et de continuité, puis en abordant la dérivation et ses applications majeures.

1 Limites et continuité

Définition 1.1

On appelle fonction réelle d'une variable réelle toute application f de $D_f \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'ensemble D_f est le domaine de définition de la fonction f .

Définition 1.2

Le graphe d'une fonction $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ou la représentation graphique de f , est une partie de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$Gr(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = f(x), x \in D_f\}.$$

On dit la courbe d'équation $y = f(x)$.

Définition 1.3

1. Une fonction f définie sur un intervalle I (symétrique par rapport à 0) est dite impaire si et seulement si $\forall x \in I : f(x) = -f(-x)$
2. Une fonction f définie sur un intervalle I (symétrique par rapport à 0) est dite paire si et seulement si $\forall x \in I : f(x) = f(-x)$
3. Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite périodique s'il existe $p > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} : f(x + p) = f(x)$.
4. f est majorée sur I si l'ensemble $f(I)$ est majoré, c'est-à-dire $\exists M \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in I, f(x) \leq M$.
5. f est minorée sur I si l'ensemble $f(I)$ est minoré, c'est-à-dire $\exists m \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in I, f(x) \geq m$.
6. f est bornée sur I si l'ensemble $f(I)$ est borné, c'est-à-dire $\exists M > 0$ telle que $\forall x \in I, |f(x)| \leq M$.

1.1 Limites**Définition 1.4**

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que la fonction f admet l comme *limite* quand x tend vers x_0 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Et on note

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

Exemple :

Montrons que $\lim_{x \rightarrow 0} 1 + x^2 = 1$. En effet, soit $\varepsilon > 0$. On a

$$|(1 + x^2) - 1| = |x^2| = |x|^2 \leq \delta^2 < \varepsilon$$

Il suffit de prendre $\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$. ■

Exemple :

Montrons que $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1) = 7$.

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $\delta > 0$ tel que si $0 < |x - 2| < \delta$, alors $|(3x + 1) - 7| < \varepsilon$. On a :

$$|(3x + 1) - 7| = |3x - 6| = 3|x - 2|.$$

Nous voulons $3|x - 2| < \varepsilon$, ce qui est équivalent à $|x - 2| < \varepsilon/3$. Il suffit donc de choisir $\delta = \varepsilon/3$. ■

Théorème 1.5

Si f admet une limite au point x_0 , alors elle est unique.

Preuve du Théorème.

Soient l_1 et l_2 deux limites de la fonction f quand x tend vers x_0 , donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 : \forall x : |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \varepsilon/2$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 : \forall x : |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - l_2| < \varepsilon/2$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour x tel que $|x - x_0| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$. On a $|l_1 - l_2| = |l_1 - f(x) + f(x) - l_2| \leq |f(x) - l_1| + |f(x) - l_2| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, donc $l_1 = l_2$. ■

Définition 1.6

On dit que f admet l comme limite à droite au point x_0 , notée $l = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, si et

seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x : x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

On dit que f admet l comme limite à gauche au point x_0 , notée $l = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, si et

seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x : x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

Proposition 1.7

Nous avons $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$.

Exemple :

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, avec f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{\sin x}{x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$

On a $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. ■

Exemple :

Considérons la fonction signe, définie par

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Calculons les limites à droite et à gauche en $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn}(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn}(x)$, la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(x)$ n'existe pas. La fonction n'est donc pas continue en 0. ■

Proposition 1.8

Soient $f, g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $x_0 \in I$. Si on a

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$,

2. g est bornée au voisinage de x_0 c-à-d $\exists \delta > 0$ et $\exists M > 0$ telle que $\forall x \in I$ vérifiant $0 < |x - x_0| < \delta$, on a $|g(x)| \leq M$,

alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$

Exemple :

Soit $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, d'après la proposition précédente $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. En effet, on a $x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et $|\sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$. ■

Proposition 1.9

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admet une limite finie en x_0 , alors f est bornée au voisinage de x_0 .

Proposition 1.10

Pour que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admette une limite l en x_0 , il faut et il suffit : pour toute suite $\{u_n\}$ ($u_n \neq x_0$) dans I telle que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$, alors $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$.

Théorème 1.11: Théorème d'encadrement ou des gendarmes

Soient I un intervalle borné de $\mathbb{R}$, $x_0 \in \bar{I}$, $f, g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$. Si f et h admettent l comme limite en x_0 et si au voisinage de x_0 , $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, alors g admet l pour limite en x_0 .

Exemple :

Montrons que $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0$.

Pour tout $x \neq 0$, on a $-1 \leq \sin(1/x) \leq 1$. En multipliant par $|x|$, on obtient :

$$-|x| \leq |x| \sin(1/x) \leq |x|.$$

Puisque la fonction $f(x) = x \sin(1/x)$ vérifie $-|x| \leq x \sin(1/x) \leq |x|$, et que $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$, par le théorème d'encadrement, on conclut que $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0$. ■

Proposition 1.12

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. Si f admet y_0 pour limite en x_0 et g admet l pour limite en y_0 , alors $g \circ f$ admet l pour limite en x_0 .

Proposition 1.13

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ et admettant respectivement des limites finies l et l' au point x_0 et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les fonctions $f + g$, λf , fg , $|f|$ et f/g (si $l' \neq 0$) admettent respectivement quand x tend vers x_0 les limites $l + l'$, λl , ll' , $|l|$ et l/l' ($l' \neq 0$).

Définition 1.14

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l &\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists A > 0 : \forall x > A : |f(x) - l| < \epsilon. \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l &\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists A > 0 : \forall x < -A : |f(x) - l| < \epsilon. \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty &\Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A. \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty &\Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -A. \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty &\Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0 : x > B \Rightarrow f(x) > A. \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty &\Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0 : x > B \Rightarrow f(x) < -A. \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty &\Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0 : x < -B \Rightarrow f(x) > A. \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty &\Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0 : x < -B \Rightarrow f(x) < -A. \end{aligned}$$

Remarque.

Formes indéterminées. Lorsque les limites ne sont pas finies, les résultats précédents demeurent vrais à chaque fois que les opérations sur les limites ont un sens.

Dans le cas où, on ne peut pas conclure, on dit qu'on a une forme indéterminée. Celle-ci se présente sous l'une des formes suivantes

$$\infty - \infty, 0 \cdot \infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

Lever l'indétermination c'est chercher la limite dans les conditions considérées. Ceci se fait parfois par des transformations élémentaires ou par des méthodes plus générales comme les dérivées, les fonctions équivalentes ou les développements limités.

Exemple :

Calculons $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Lorsque $x \rightarrow 1$, le numérateur tend vers $1^2 - 1 = 0$ et le dénominateur tend vers $1 - 1 = 0$. Nous sommes en présence d'une forme indéterminée du type $0/0$. Pour $x \neq 1$, on peut simplifier l'expression :

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2.$$

1.2 Fonctions continues

Définition 1.15

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on dit que f est *continue* au point $x_0 \in I$ si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

c'est à dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in I : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

On dit que f est continue à droite de x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

On dit que f est continue à gauche de x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

On dit que f est continue en x_0 si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Définition 1.16

On dit que f est continue sur l'intervalle I si elle est continue en tout point de I . L'ensemble des fonctions continues sur I se note $C^0(I)$.

Exemple :

Considérons la fonction partie entière $f(x) = E[x]$ au point $x_0 = 1$. Nous avons $f(1) = E[1] = 1$. La limite à droite en 1 est :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} E[x] = 1 \quad (\text{car pour } 1 \leq x < 2, E[x] = 1).$$

La limite à gauche en 1 est :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} E[x] = 0 \quad (\text{car pour } 0 \leq x < 1, E[x] = 0).$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 \neq f(1) = 1$, la fonction f n'est pas continue à gauche en 1, et donc n'est pas continue en 1.

Théorème 1.17

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $l \in [a, b]$. Soit (u_n) est suite de $[a, b]$ qui converge vers l , alors $(f(u_n))$ converge vers $f(l)$.

Définition 1.18

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on dit que f est uniformément continue sur I si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, y \in I : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Remarque.

Dans la continuité uniforme, le nombre δ associé à ϵ ne dépend que de ϵ alors que pour la continuité en x_0 , δ dépend de ϵ et de x_0 .

Proposition 1.19

Si f est uniformément continue alors elle est continue.

Définition 1.20

On dit que f est Lipschitzienne ou vérifie la condition de Lipschitz s'il existe une constante $k \geq 0$ telle que

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Proposition 1.21

Si f est lipschitzienne sur I alors f est uniformément continue sur I .

Propriété 1.22

Soit f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et continues au point $x_0 \in I$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors les fonctions $f + g$, λf , $f \cdot g$, $|f|$, $\frac{f}{g}$ (si $g(x_0) \neq 0$) sont continues au point x_0 .

Proposition 1.23

Soient $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow J \subset \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est continue en $x_0 \in I$ et g est continue en $f(x_0)$ alors la fonction composée $g \circ f$ est continue en x_0 .

Théorème 1.24

Une fonction continue sur un intervalle fermé borné $I = [a, b]$ est uniformément continue sur $[a, b]$.

Théorème 1.25

Toute fonction $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue est bornée.

Preuve du Théorème.

Soit $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

On suppose que f n'est pas majorée. Donc $\forall A > 0, \exists x \in [a, b]$ tel que $f(x) > A$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in [a, b]$ tel que $f(x_n) > n$. Donc la suite $(f(x_n))$ tend vers $+\infty$.

D'autre part, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass ??, il existe $l \in [a, b]$ et $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\phi(n)})$ converge vers l . Puisque f est continue en l donc en vertu du théorème 1.2, la suite $(f(x_{\phi(n)}))$ converge vers $f(l)$.

Mais $(f(x_{\phi(n)}))$ est une sous suite de $(f(x_n))$. Ainsi $(f(x_{\phi(n)}))$ tend vers $+\infty$. Contradiction. De même pour montrer qu'elle est minorée. ■

Théorème 1.26: Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et I est un intervalle quelconque. Soient $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$ alors pour toute valeur c comprise entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$, il existe $x_0 \in]x_1, x_2[$ tel que $f(x_0) = c$.

Preuve du Théorème.

Supposons que $f(x_1) < c < f(x_2)$ (le cas contraire s'obtient en considérant $-f$).

Soit $A = \{x \in [x_1, x_2] \mid f(x) \leq c\}$. L'ensemble A est non vide car $x_1 \in A$ (car $f(x_1) < c$), et A est majoré par x_2 .

Par le théorème A admet une borne supérieure, qu'on note $x_0 = \sup A$ telle que $x_0 \in [x_1, x_2]$.

Nous allons montrer que $f(x_0) = c$.

- Si $f(x_0) < c$, alors par continuité de f en x_0 , il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [x_1, x_2]$ avec $|x - x_0| < \delta$, on a $f(x) < c$, donc $x \in A$, ce qui contredit le fait que x_0 est la borne supérieure de A .
- Si $f(x_0) > c$, alors de même, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [x_1, x_2]$ avec $x_0 - \delta < x < x_0$, on a $f(x) > c$, donc aucun de ces x n'appartient à A , ce qui contredit le fait que x_0 est la borne supérieure de A .

Ainsi, $f(x_0) = c$.

De plus, $x_0 \notin \{x_1, x_2\}$ car $f(x_1) < c < f(x_2)$, donc $x_0 \in]x_1, x_2[$. ■

Corollaire 1.27

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Si $(f(a) \cdot f(b) < 0)$, alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Exemple :

Soit f une fonction définie sur par $f(x) = x^5 + x + 1$, on a $f(-1) = -1$, $f(0) = 1$, comme la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[-1, 0]$ alors d'après le théorème 1.2, il existe au moins une solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $] -1, 0[$. ■

Exemple :

Montrons que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0, 1]$.

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$. La fonction f est une fonction polynomiale, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$, et en particulier sur $[0, 1]$. évaluons f aux bornes de l'intervalle :

$$f(0) = 0^3 - 3(0) + 1 = 1.$$

$$f(1) = 1^3 - 3(1) + 1 = 1 - 3 + 1 = -1.$$

Puisque $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = -1 < 0$, et que 0 est une valeur comprise entre $f(1)$ et $f(0)$, d'après le Théorème des Valeurs Intermédiaires, il existe au moins un réel $c \in]0, 1[$ tel que $f(c) = 0$. ■

Définition 1.28: Prolongement par continuité.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , sauf peut-être en $x_0 \in I$. Supposons que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ existe et finie. Soit $\tilde{f}$ une fonction définie sur I telle que $\tilde{f}(x) = f(x)$, $\forall x \in I - \{x_0\}$ et $\tilde{f}(x_0) = l$. On dit que $\tilde{f}$ est déduite de f par *prolongement par continuité* au point x_0 .

Exemple :

Soit $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. On a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, alors la fonction $\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est un prolongement par continuité de f sur $\mathbb{R}$. ■

Théorème 1.29: Version du théorème du point fixe de Brouwer^(a)

a. L. E. J. Brouwer (1881-1966) : Mathématicien néerlandais.

Soit $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ une fonction continue. Alors il existe au moins un point $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = x_0$. On dit que x_0 est un point fixe de f .

Définition 1.30

Soit $f : I \rightarrow I$. La fonction f est dite contractante s'il existe une constante $0 \leq k < 1$ tel que

$$\forall x, y \in I : |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Remarque.

■ toute fonction contractante est lipschitzienne donc uniformément continue.

Théorème 1.31: Théorème du point fixe de Banach^(b)

a. S. Banach (1892-1945) : Mathématicien polonais.

Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction contractante. Alors f admet un point fixe unique.

Exemple : Point fixe par itération - Théorème de Banach

Considérons la fonction $f(x) = \frac{1}{2} \cos(x)$. On peut montrer que f est contractante sur $\mathbb{R}$. En effet, d'après le théorème des accroissements finis, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, il existe c entre x et y tel que $|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y|$. Or $f'(x) = -\frac{1}{2} \sin(x)$, donc $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. Ainsi, $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$, avec $k = 1/2 < 1$. De plus, $f(\mathbb{R}) = [-1/2, 1/2]$. Si on restreint f à $I = [-1/2, 1/2]$, alors $f : I \rightarrow I$ est contractante. D'après le théorème du point fixe de Banach, f admet un unique point fixe dans I . On peut approcher ce point fixe par la suite (x_n) définie par $x_0 \in I$ (par exemple $x_0 = 0$) et $x_{n+1} = f(x_n)$.

- $x_0 = 0$
- $x_1 = f(x_0) = \frac{1}{2} \cos(0) = 0.5$
- $x_2 = f(x_1) = \frac{1}{2} \cos(0.5) \approx \frac{1}{2}(0.8776) \approx 0.4388$
- $x_3 = f(x_2) = \frac{1}{2} \cos(0.4388) \approx \frac{1}{2}(0.9053) \approx 0.4526$

La suite (x_n) converge vers l'unique point fixe de f . ■

Définition 1.32

On dit qu'une fonction f définie sur $[a, b]$ est *continue par morceaux* sur $[a, b]$ si et seulement s'il existe $a_1, \dots, a_n \in [a, b]$ ($n \in \mathbb{N}$) tels que

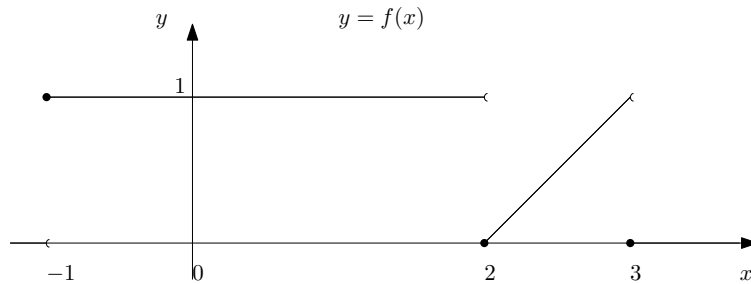
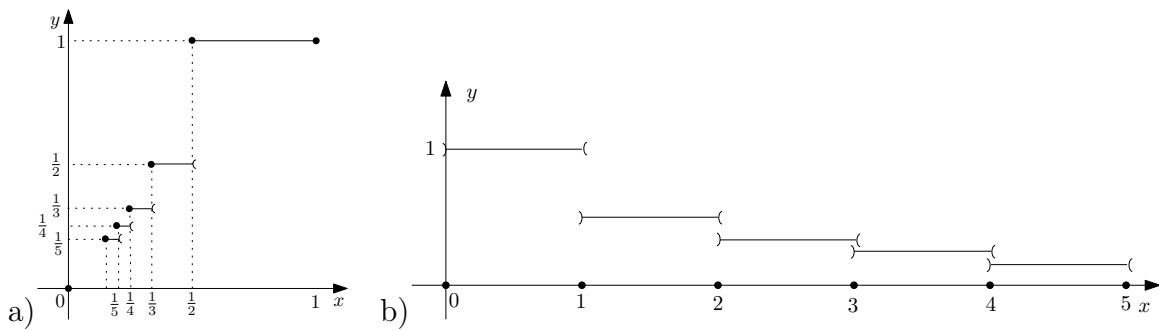
- $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n < a_{n+1} = b$
- Pour tout $i = 0, \dots, n$, la restriction de f à $]a_i, a_{i+1}[$ est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$ et admet une limite finie en a_i à droite et une limite finie en a_{i+1} à gauche.

Définition 1.33

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I . On dit que f est continue par morceaux sur I si et seulement, pour tout $a, b \in I$ tel que $a < b$, la restriction $f_{[a, b]}$ est continue par morceaux sur $[a, b]$.

Exemple :

1. L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :
$$\begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ x-2 & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$
 est continue par morceaux.
2. L'application $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :
$$\begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{n+1} & \text{s'il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \frac{1}{n+2} \leq x < \frac{1}{n+1} \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$
 est continue par morceaux sur $]0, 1[$ mais n'est pas continue par morceaux sur $[0, 1]$.
3. L'application $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :
$$\begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{n+1} & \text{s'il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n < x < n+1 \end{cases}$$
 est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

**FIGURE 3.1** – Le graphe de la fonction f de l'exemple 1.2**FIGURE 3.2** – Le graphe des fonctions : a) g b) h de l'exemple 1.2

1.3 Équivalents et notations de Landau

Soient f et g deux fonctions non nulles définies dans un voisinage du point x_0 , sauf peut être en x_0 .

Définition 1.34

On dit que f est *négligeable* devant g lorsque x tend vers x_0 et l'on écrit $f = o(g)$ si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|.$$

Définition 1.35

On dit que f est *dominée* par g lorsque x tend vers x_0 et l'on écrit $f = O(g)$, si $\frac{f}{g}$ est borné dans un voisinage de x_0 privé du point x_0 . C'est à dire

$$\exists k > 0, \exists \delta > 0, \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq k |g(x)|.$$

les symboles o, O s'appelle notations de Landau^(a).

a. Edmund Georg Hermann Landau (1877-1938) : Mathématicien allemand

Exemple :

pour $x \rightarrow 0$, on a $x^2 = o(x)$, $x \sin(x) = O(x)$, $\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Propriété 1.36

$$f = o(g) \Rightarrow f = O(g), \quad O(g) + O(g) = O(g), \quad o(g) + o(g) = o(g).$$

Définition 1.37

On dit que f est *équivalente* à g lorsque x tend vers x_0 et l'on note $f \sim g$ (ou $f \underset{x_0}{\sim} g$)

si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ ou bien $f - g = o(f)$ en x_0 .

Exemple :

On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ donc $\sin(x) \sim x$ au voisinage de 0.

De même on peut versifier facilement que $\cos(x) \sim 1 - \frac{x^2}{2}$; $\tan(x) \sim x$; $\exp(x) \sim 1 + x$ en 0.

Remarque.

1. La définition 1.3 reste valable quand $x \rightarrow \pm\infty$.
2. La définition 1.3 interdit le fait qu'une fonction soit équivalente à la fonction nulle quand x tend vers x_0 .

Proposition 1.38

1. Si f est continue au point x_0 et si $f(x_0) \neq 0$ alors $f(x) \sim_{x_0} f(x_0)$.
2. Si f est dérivable au point x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$ alors $f(x) - f(x_0) \sim_{x_0} (x - x_0)f'(x_0)$.

Exemple :

1. $e^x \sim_0 1$, $\cos x \sim_0 1$.
2. $e^x - e^0 = e^x - 1 \sim_0 x$, $\sin x \sim_0 x$.

Propriété 1.39

1. Si $f \sim_{x_0} g$ et $g \sim_{x_0} h$ alors $f \sim_{x_0} h$.
2. Si $f \sim_{x_0} g$ et $h \sim_{x_0} l$ alors $f \cdot g \sim_{x_0} h \cdot l$.
3. Si $f \sim_{x_0} g$ et si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in [-\infty, +\infty]$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$.

Remarque.

Si $f \sim_{x_0} g$ et $h \sim_{x_0} l \nRightarrow f + g \sim_{x_0} h + l$ ou $f - h \sim_{x_0} g - l$. Par exemple $x + x^2 \sim_0 x + x^3$ et $x \sim_{x_0} x$ mais $x^2 \not\sim_0 x^3$

Exemple :

1. Comparons les fonctions $\ln(x)$, $\sqrt{x}$ et x au voisinage de $+\infty$.
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$ (par croissance comparée ou règle de L'Hôpital). Donc $\ln(x) = o_{+\infty}(\sqrt{x})$.
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$. Donc $\sqrt{x} = o_{+\infty}(x)$.
 On a ainsi une hiérarchie : $\ln(x) \ll \sqrt{x} \ll x$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.
2. Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)(e^x - 1)}{x \tan(2x)}$ en utilisant les équivalents. Au voisinage de 0, nous avons :
 - $\sin(x) \sim_0 x$
 - $e^x - 1 \sim_0 x$
 - $\tan(u) \sim_0 u$, donc $\tan(2x) \sim_0 2x$

Par conséquent,

$$\frac{\sin(x)(e^x - 1)}{x \tan(2x)} \sim_0 \frac{x \cdot x}{x \cdot (2x)} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

La limite est donc $\frac{1}{2}$.

2 Fonctions dérivables

2.1 Dérivée d'une fonction en un point

Définition 2.1

Soient $x_0 \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est *dérivable* au point x_0 si et seulement si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe et est finie.

Cette limite est appelé dérivée de f au point x_0 et est notée $f'(x_0)$.

Remarque.

La définition (2.1) nous permet d'écrire

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h).$$

et qui représente une forme d'approximation en un polynôme d'ordre un (Développement limité) de la fonction f au voisinage de x_0 . Géométriquement, cela exprime que la tangente $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (l'équation de la tangente) est la meilleure approximation affine de f au voisinage de x_0 .

Exemple :

1. On considère la fonction constante $x \mapsto f(x) = a$.

$$\text{Soit } x_0 \in \mathbb{R}, \text{ on a } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a - a}{x - x_0} = 0.$$

2. On considère la fonction $x \mapsto f(x) = x$.

$$\text{Soit } x_0 \in \mathbb{R}, \text{ on a } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

3. On considère la fonction $x \mapsto f(x) = x^2$.

$$\text{Soit } x_0 \in \mathbb{R}, \text{ on a } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = 2x_0.$$

Définition 2.2

On dit que la fonction f est différentiable en x_0 s'il existe une application linéaire $u_{x_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - u_{x_0}(h)}{h} = 0. \quad (3.1)$$

L'application linéaire est donnée par $u_{x_0}(h) = f'(x_0)h$ et est appelée application différentielle de la fonction f au point x_0 .

Théorème 2.3

Une fonction est différentiable en x_0 si et seulement si elle est dérivable en x_0 .

Preuve du Théorème.

voir remarque 2.1.

Définition 2.4

1. Si le rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite à droite au point x_0 , cette limite est appelé dérivée à droite au point x_0 et on note $f'(x_0^+)$ (ou $f'_d(x_0)$).
2. Si le rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite à gauche au point x_0 , cette limite est appelé dérivée à gauche au point x_0 et on note $f'(x_0^-)$ (ou $f'_g(x_0)$).
3. la fonction f est dérivable en $x_0 \Leftrightarrow f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$.

Exemple :

1. La fonction $f : x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.
En effet

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \neq f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

2. La fonction $g : x \mapsto g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0. \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ n'est pas dérivable en 0.

En effet le rapport $\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \sin \frac{1}{x}$ n'admet pas de limite lorsque x tend vers 0.

Proposition 2.5

Si une fonction est dérivable en un point alors elle est continue en ce point.

Preuve de la Proposition.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in I$. D'après la remarque 2.1, pour $x = x_0 + h$, on a

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

nous avons donc établi que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, et donc f est continue en x_0 . ■

Remarque.

La réciproque de la proposition 2.1 est en générale fausse. Une fonction peut être définie continue en un point sans être dérivable en ce point.

Exemple :

1. $|\cdot| : x \mapsto |x|$ est définie et continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.
2. La fonction $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0. \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est continue en 0 mais non dérivable en 0.

Remarque.

Interprétation géométrique. Soit f une fonction dérivable au point x_0 . La droite d'équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ s'appelle tangente au graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$. ainsi la dérivée de f en x_0 est égale à la pente au point d'abscisse x_0 .

Les dérivées à gauche et à droite s'interprètent également en considérant les demi-tangentes à gauche (dtg) et à droite (dtd) du point d'abscisse x_0 , si elles existent et ne sont pas égales, le graphe de f présente alors un point anguleux.

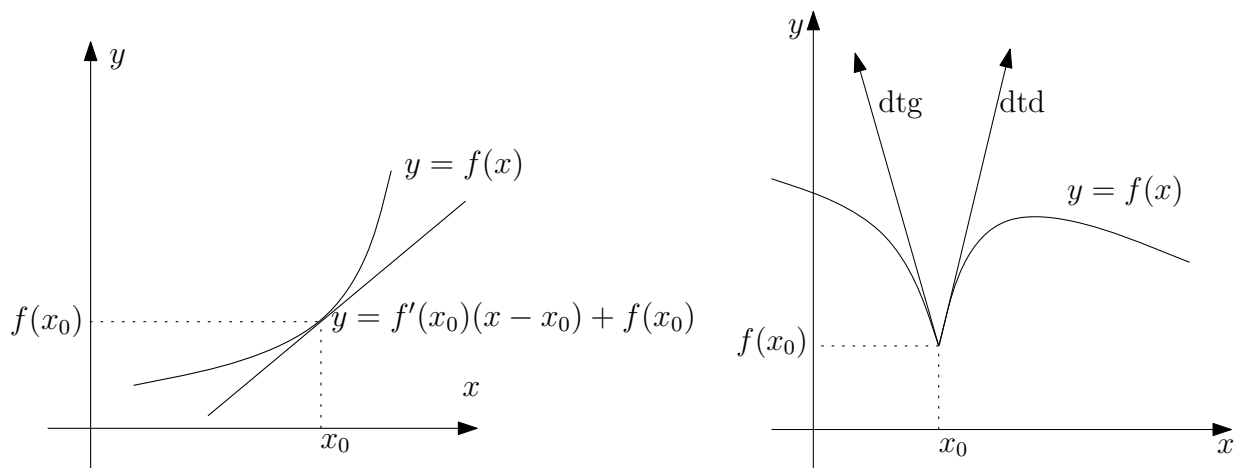


FIGURE 3.3

Remarque.

1. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, le graphe de f admet tangente parallèle à l'axe des ordonnées.
2. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$, le graphe de f admet tangente parallèle à l'axe des abscisses.

2.2 Dérivée sur un intervalle et dérivée d'ordre supérieur**Définition 2.6**

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. La fonction f est dite dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I . L'application $x \mapsto f'(x)$ de I dans $\mathbb{R}$ est appelée dérivée de la fonction f et est notée f' (ou Df , $\frac{df}{dx}$, y' si $y = f(x)$).

Si la fonction f' admet elle aussi une fonction dérivée celle-ci est dite dérivée seconde ou dérivée d'ordre 2 et est notée f'' .

On définit par récurrence les dérivées successives de f , la dérivée $n^{\text{ième}}$ ou dérivée d'ordre n de f , c'est à dire $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$; $f^{(0)} = f$ par convention.

Exemple :

On vérifie par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N} : (\sin(x))^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), (\cos(x))^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Définition 2.7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction

- de classe C^0 si elle est continue sur I ;
- de classe C^1 si elle est continue sur I et si sa dérivée f' est continue sur I ;
- de classe C^n (où $n \in \mathbb{N}^*$) si elle est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I ;
- de classe C^∞ si f est de classe C^n sur I pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemple :

Soit $f : x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. On a montré que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$. Pour $x \neq 0$,

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

La fonction f' est continue en 0 car

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0 = f'(0)$$

(le terme $2x \sin(1/x) \rightarrow 0$ et on utilise le fait que $\cos(1/x)$ est borné pour la continuité de f en 0 si on n'avait pas calculé $f'(0)$ directement). Ainsi f est C^1 . Cependant, f' n'est pas dérivable en 0 car le terme $\cos(1/x)$ n'a pas de limite en 0. Donc f n'est pas C^2 .

Exercice 2.8:

Soit $f : x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Déterminer α pour que la fonction f soit de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

2.3 Opérations sur les fonctions dérivables

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Si f et g sont deux fonctions définies sur un même ensemble $I \subset \mathbb{R}$ et dérivables au point $x_0 \in I$ alors ;

les fonctions $f + g$, λf , $f.g$, $\frac{f}{g}$ (si $g(x_0) \neq 0$) sont dérivables en x_0 . On a

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), (\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0),$$

$$(f.g)'(x_0) = f'(x_0).g(x_0) + f(x_0).g'(x_0), \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0).g(x_0) - f(x_0).g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Exemple :

Soient f, g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 + 1, g(x) = \sin(x).$$

On a

$$(f.g)'(x) = 2x \sin(x) + (x^2 + 1) \cos(x), \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{2x \sin(x) - (x^2 + 1) \cos(x)}{(\sin(x))^2}.$$

Théorème 2.9: Formule de Leibniz.

Si f et g admettent des dérivées $n^{\text{ième}}$ au point x_0 alors $f.g$ admet une dérivée $n^{\text{ième}}$ au point x_0 , et on a en ce point

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)} = f^{(n)}.g + C_n^1 f^{(n-1)}.g' + \dots + C_n^k f^{(n-k)}.g^{(k)} + \dots + C_n^{n-1} f'.g^{(n-1)} + f.g^{(n)},$$

$$\text{avec } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Exemple :

Calculer $((1+x^2)\sin x)'''$. On pose $f(x) = 1+x^2$, $g(x) = \sin(x)$. On a

$$\begin{aligned} ((1+x^2)\sin x)''' &= (f(x)g(x))''' = f'''(x)g(x) + C_3^1 f''(x)g'(x) + C_3^2 f'(x)g''(x) + f(x)g'''(x) \\ &= (5-x^2)\cos x - 6x\sin x \end{aligned}$$

Définition 2.10: Dérivée d'une fonction composée.

Soit $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$. Soit $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0 et si g est dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et l'on a

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0).$$

Exemple :

Soit $f(x) = (x^2 + x + 1)^3$. On pose $g(x) = x^3$ et $h(x) = x^2 + x + 1$. On a $g'(x) = 3x^2$ et $h'(x) = 2x + 1$, donc $f'(x) = (g \circ h)'(x) = g'[h(x)] \cdot h'(x) = 3(2x+1)(x^2+x+1)^2$.

Exemple :

$y = f(x) = x^3$, on a $D_f =]-\infty, +\infty[$, la fonction est bijective donc f^{-1} existe et $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ par exemple $f'(2) = 12$ alors $(f^{-1}(f(2)))' = (f^{-1})'(8) = \frac{1}{12}$

Théorème 2.11: Théorème d'inversion locale

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Si f est de classe $C^1(I)$ et sa dérivée ne s'annule pas sur I , alors $f : I \rightarrow f(I)$ est bijective, que son inverse f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ avec la formule :

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Remarque.

Le théorème d'inversion locale est puissant du fait il garantit non seulement l'existence d'une réciproque localement, mais aussi sa dérivabilité. L'hypothèse $f'(x_0) \neq 0$ est cruciale ; elle signifie que la fonction *ne s'aplatit pas* localement, permettant ainsi *d'inverser* la direction.

Corollaire 2.12

Soit f une application bijective et continue d'un intervalle I sur un intervalle J , dérivable en $x_0 \in I$ et telle que $f'(x_0) \neq 0$. Alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable au point $f(x_0)$ et admet pour dérivée

$$(f^{-1})'[f(x_0)] = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Remarque.

On a $f^{-1} \circ f(x) = I_d(x) = x$ donc $(f^{-1} \circ f)'(x) = (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$

Exemple :

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^2$, sa fonction inverse est donnée par $g = f^{-1} : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto g(x) = \sqrt{x} \in \mathbb{R}_+$. On pose $y = g(x)$, donc $x = f(y) = y^2$, on a alors

$$(\sqrt{x})' = g'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{(y^2)'} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2g(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2.4 Théorème de Rolle

Théorème 2.13: Théorème de Rolle^(a)

a. Michel Rolle (21/04/1652-08/11/1719) : Mathématicien français.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = 0.$$

Preuve du Théorème.

Puisque f est continue sur un fermé borné (compact), donc elle est bornée et il existe $m = \inf_{[a,b]} f$, $M = \sup_{[a,b]} f \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in [a, b], f(x) \in [m, M]$.

Si $m = M$, f est constante et f' est identiquement nulle sur $]a, b[$.

Supposons alors $m < M$. On peut vérifier facilement que : $m < f(a)$ ou $f(a) < M$.

- Si $m < f(a)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = m$.

$$\begin{aligned} \forall x \in [a, c], \quad f(x) \geq f(c) &\Rightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \Rightarrow f'_g(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \\ \forall x \in [c, b], \quad f(x) \geq f(c) &\Rightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \Rightarrow f'_d(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \end{aligned}$$

Comme f est dérivable en c , donc $f'_g(c) = f'_d(c) = f'(c) = 0$.

Si $f(a) < M$, un raisonnement analogue donne : $\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0$.

Remarque.

1. Le théorème garantit l'existence d'au moins un tel c , mais ne donne ni sa valeur, ni son unicité.
2. f continue sur $[a, b]$ est une condition nécessaire. Par exemple $x \in [0, 1] \mapsto f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. On a $f(0) = f(1) = 1$ mais $f'(x) = 1 \neq 0 \forall x \in]0, 1[$.
3. f dérivable sur $]a, b[$ est une condition nécessaire. Par exemple $x \in [-1, 1] \mapsto f(x) = |x|$. On a f continue sur $[-1, 1]$ et $f(-1) = f(1) = 1$ mais f n'est pas dérivable en $x = 0$. On a $f'(x) = \frac{|x|}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f'(0)$ n'existe pas, alors $\forall x \in]-1, 1[, f'(x) \neq 0$.
4. f n'a pas besoin d'être dérivable à droite de a ou à gauche de b . Par exemple : $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ sur $[-1, 1]$. On a $f(-1) = f(1) = 0$ et $f'(0) = 0$, mais aussi $\lim_{x \rightarrow \pm 1} f'(x) = +\infty$.

Le théorème de Rolle permet d'établir le théorème des accroissements finis, et à ce titre il est à la base des relations liant la croissance d'une fonction et le signe de sa dérivée.

Théorème 2.14: Théorème des accroissements finis

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Preuve du Théorème.

Posons $\phi(x) = f(x) - f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. La fonction ϕ est continue dans $[a, b]$, dérivable dans $]a, b[$ et $\phi(a) = \phi(b) = 0$. Le théorème de Rolle implique l'existence de $c \in]a, b[$ tel que

$$\phi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

D'où $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$. ■

Exemple :

Montrer que pour tout $x > 0$, $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$. En effet, soit $f(t) = \ln(1+t)$ pour $t \geq 0$. f est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$ avec $f'(t) = \frac{1}{1+t}$. D'après le TAF, il existe $c \in]0, x[$ tel que $f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0)$, soit $\ln(1+x) = \frac{1}{1+c}x$. Comme $0 < c < x$, on a $1 < 1+c < 1+x$. Donc $\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c} < 1$. En multipliant par $x > 0$, on obtient $\frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+c} < x$, d'où le résultat. ■

Théorème 2.15: Inégalité des accroissements finis

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. S'il existe $k > 0$ tel que $|f'(x)| < k$ pour tout $x \in]a, b[$, alors

$$|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|.$$

Preuve du Théorème.

D'après le théorème des accroissements finis, $\exists c \in]a, b[\mid f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \Rightarrow \exists c \in]a, b[\mid |f(b) - f(a)| = |f'(c)| |b - a| \Rightarrow |f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$. ■

Théorème 2.16: Théorème des accroissements finis généralisés

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Si g' ne s'annule pas sur $]a, b[$, alors il existe un point $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Preuve du Théorème.

On a $\forall x \in]a, b[, g'(x) \neq 0$ implique $g(a) \neq g(b)$. Posons $\phi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g(x)$.

On a $\phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(x)$ et $\phi(a) = \phi(b)$.

Le théorème de Rolle implique qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\phi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c) = 0.$$

D'où le résultat. ■

Corollaire 2.17

Règle de l'Hôpital^(a)

Soit $f, g :]a, b[$ sont deux fonctions dérivables telles que g' ne s'annule pas dans un voisinage de a (sauf peut-être en a).

- si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ et si $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ admet une limite l au point a , alors $\frac{f(x)}{g(x)}$ admet la même limite en ce point.
- si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ et si $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ admet une limite l au point a , alors $\frac{f(x)}{g(x)}$ admet la même limite en ce point.

a. Guillaume François Antoine de L'Hôpital (1661-1704), mathématicien français.

Remarque.

■ Ce résultat s'applique aux formes indéterminées $0/0$.

Exemple :

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos(x) - \cos(x_0)}{\sin(x) - \sin(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x_0).$
2. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2+x-2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{2x+1} = -\frac{1}{3}.$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$

3 Exercices

Exercice 3.1:

1. Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x + 1}{x}; \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3|x|}{x}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3|x|}{x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2}}{x}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}.$$

2. Étudier

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^\alpha - 1} (\alpha > 0); \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x^\alpha} - \sqrt{1-x^\alpha}}{x^\beta} (\alpha, \beta \geq 0).$$

Exercice 3.2:

1. Déterminer un équivalent simple

(a) au voisinage de 0 : $f(x) = 1 - \cos(x)$; $g(x) = \sin(x) - \tan(x)$; $h(x) = x^a(1-x)^b$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

(b) au voisinage de $+\infty$: $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}$; $g(x) = x^{\frac{1}{x}} - (x+1)^{\frac{1}{x+1}}$.

2. En utilisant les équivalents, déterminer

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan^2 x}; \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x}}{x\sqrt{\tan x}}.$$

Exercice 3.3:

Soit une fonction définie par

$$f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}.$$

1. Donner son domaine de définition. La fonction f est-elle continue ? dérivable ?
2. Calculer f' et donner le tableau de variation de f .
3. Montrer que l'équation $f(x) = 1/2$ a trois solutions dans $\mathbb{R}$.
4. Tracer le graphe de f .

Exercice 3.4:

Soit pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f(x) = \begin{cases} xe^x & \text{si } x \leq 1, \\ ax + b & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Déterminer a, b pour que f soit dérivable en 1.

Exercice 3.5:

Soit pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?
3. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3.6:

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue. Montrer qu'il $\exists c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$ (c est un point fixe)

Exercice 3.7:

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que l'équation $f(x + 1/2) = f(x)$ possède au moins une solution.

CHAPITRE 4

FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES

Ce chapitre présente les fonctions élémentaires : fonctions usuelles (affines, polynômiales, rationnelles), fonctions transcendantes (logarithme, exponentielle), puissances généralisées, trigonométriques et hyperboliques, ainsi que leurs réciproques. On étudiera leurs propriétés, domaines, dérivées et liens entre elles.

Définition 0.1

1. Une fonction en *escalier* est une fonction constante sur une subdivision finie d'intervalles de son domaine.
2. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) est appelée *fonction affine*. Dont le réel a est le coefficient directeur de cette droite et le réel b est l'ordonnée à l'origine.
3. Les fonctions *polynômiales* sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

4. Les fonctions *rationnelles* sont de la forme

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

définies sur $\{x \in \mathbb{R} \mid Q_n(x) \neq 0\}$ où P_m et Q_n deux polynômes de degré m et n respectivement.

Proposition 0.2

Les fonctions affines, polynômiales, rationnelles sont indéfiniment dérivable, intégrables sur leurs domaine de définition.

1. Si $f(x) = ax + b$, alors sa dérivée est $f'(x) = a$ et sa primitive est $F(x) = \frac{a}{2}x^2 + bx + F(0)$.
2. Si $f(x) = p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, alors sa dérivée est : $f'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}$ et sa primitive est $F(x) = F(0) + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$.

3. Si $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, alors sa dérivée est : $f'(x) = \frac{P'_m(x)Q_n(x) - P_m(x)Q'_n(x)}{Q_n^2(x)}$ et sa primitive est donnée en détail dans la section ??
4. En particulier, si $f(x) = \frac{1}{1-x}$ alors $DL_n(0)(f) : f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} x^k + o(x^n)$. Et le développement en série entière de f au voisinage de 0 est : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

1 Fonctions logarithmes et exponentielles

Considérons la fraction rationnelle $f(x) = \frac{1}{x}$ définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. On peut démontrer facilement qu'aucune fonction rationnelle dont la dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$ (ou $\mathbb{R}_-^*$) soit $1/x$.

Définition 1.1

La fonction *logarithme* népérien, notée $\ln$, est l'unique fonction (non rationnelle) définie sur $]0, +\infty[$ dont sa dérivée sur $]0, +\infty[$ nous donne $x \mapsto 1/x$ et qui s'annule en $x = 1$:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \text{ et } \ln 1 = 0$$

On peut aussi définir la fonction $\ln x$ sur $]0, +\infty[$ par :

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Proposition 1.2

La fonction $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est indéfiniment dérivable, strictement croissante.

Preuve de la Proposition.

La fonction $\ln$ est indéfiniment dérivable car $x \mapsto 1/x$ l'est. De plus comme $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$ donc elle est strictement croissante. ■

Proposition 1.3

Soit x et y deux réels strictement positifs et n est un entier naturel, alors :

$$(1) \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y), (2) \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y), (3) \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x), (4) \ln(x^n) = n \ln(x), (5) \ln$$

1. Soit $g(x) = \ln(xy)$. Alors $g'(x) = (\ln xy)' = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}$. Ainsi, $\ln(xy)$ et $\ln(x)$ ont la même dérivée par rapport à x . Donc $\ln xy = \ln x + C$. Pour $x = 1$, $C = \ln y$. D'où $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

2. Soit $x, y > 0$, on a $\ln(x) = \ln\left(y \frac{x}{y}\right) = \ln(y) + \ln\left(\frac{x}{y}\right)$, d'où $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.
3. En faisant $x = 1$ dans (2).
4. Pour $x > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\ln(x^n) = \ln(\overbrace{x \times x \times \dots \times x}^{n \text{ fois}}) \stackrel{(1)}{=} \overbrace{\ln(x) + \ln(x) + \dots + \ln(x)}^{n \text{ fois}} = n \ln(x)$.
5. Pour $x > 0$, on pose $y = \sqrt[n]{x}$, donc $x = y^n$ et on a $\ln(x) = \ln(y^n) = n \ln(y) = n \ln(\sqrt[n]{x})$.

Exemple :

- $\ln\left(\frac{16}{27}\right) = \ln(16) - \ln(27) = \ln(2^4) - \ln(3^3) = 4 \ln(2) - 3 \ln(3)$.
- $\ln(\sqrt{30}) = \frac{1}{2} \ln(30) = \frac{1}{2} \ln(2 \times 3 \times 5) = \frac{1}{2} [\ln(2) + \ln(3) + \ln(5)]$.
- Pour $x \in]\frac{1}{2}, +\infty[$, $\ln(x+1) + \ln(2x-1) = \ln[(x+1)(2x-1)] = \ln(2x^2 + x - 1)$.

• **Graphes de la fonction $\ln$.**

Proposition 1.4

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

Remarque.

1. On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, donc la droite $x = 0$ est donc asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction $\ln$.
2. En $x_0 = 1$, $\ln(1) = 0$, $\ln'(1) = 1$, donc la droite $y = x - 1$ est une droite tangente de la fonction $\ln$ au point $x = 1$.

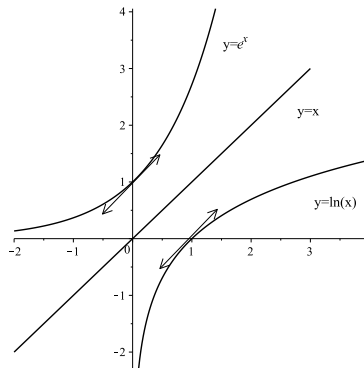


FIGURE 4.1

Proposition 1.5

$$DL_n(0)(\ln(1+x)) : \ln(1+x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

Remarque.

La fonction $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est bijective, donc elle admet une fonction réciproque nommée fonction exponentielle.

Définition 1.6

La fonction *exponentielle*, notée $x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(x)$, est la réciproque de la fonction logarithme népérien.

$$y = \exp(x) \Leftrightarrow x = \ln y; \quad \ln(\exp(x)) = x; \quad e^{\ln y} = y; \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}_+^*.$$

Son développement limité jusqu'à l'ordre infini est donné par :

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots,$$

$$e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \approx 2.718281828 \text{ étant un nombre réel positif.}$$

Remarque.

On peut aussi noter $\exp(x)$ par e^x .

Proposition 1.7

La fonction exponentielle est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(e^x)' = e^x.$$

En effet, on a $y = e^x$, alors

$$(e^x)' = \frac{1}{(\ln y)'} = y = e^x.$$

Remarque.

$\exp(x) = e^x > 0$.

Proposition 1.8

Soient x et y deux réels et n est un entier relatif, alors :

$$e^x \times e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad \frac{1}{e^x} = e^{-x}, \quad (e^x)^n = e^{nx}.$$

Proposition 1.9

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

Remarque.

La droite d'équation $y = 0$ est donc une asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction $\exp$.

Remarque.

Graphiquement, les courbes de la fonction exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$).

Théorème 1.10

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

2 Fonctions puissance $x^a = e^{a \ln x}$ **Définition 2.1**

Soit a un nombre réel, la *fonction puissance* (d'exposant) a , notée f_a est la fonction qui, à tout nombre $x \in \mathbb{R}_+^*$ associe

$$f_a(x) = x^a = e^{a \ln x}$$

Exemple :

Dans le cas où $\alpha = \frac{1}{2}$, on a $f_{\frac{1}{2}}(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} = e^{\frac{1}{2} \ln x}$. ■

Proposition 2.2

Pour tout a , la fonction f_a est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $f'_a(x) = ax^{a-1}$.

Dans le cas où $a = 0$, la fonction $f_0(x) = x^0 = 1$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Dans le cas où $a \neq 0$, $f'_a(x) = ax^{a-1}$ est du signe de a sur $\mathbb{R}_+^*$.
Comme $a > 0$, f_a est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$. On montre alors que $f_a^{-1} = f_{1/a}$, si $a \neq 0$.

Exemple :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$ pour $a > 0$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \ln x = 0$ pour $a > 0$. ■

3 Fonctions hyperboliques et trigonométriques

Sont les fonctions cosinus, cosinus hyperboliques, sinus, sinus hyperboliques, tangente, tangente hyperboliques, cotangente et cotangente hyperboliques, notées et définies par

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, & \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, & \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, & \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}, \\ \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x}, & \coth x &= \frac{1}{\tanh x}, & \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x}, & \cotan x &= \frac{1}{\tan x}. \end{aligned}$$

Propriété 3.1

$$\begin{aligned} \cosh x + \sinh x &= e^x, & \cos x + i \sin x &= e^{ix}, \\ \cosh x - \sinh x &= e^{-x}, & \cos x - i \sin x &= e^{-ix}, \\ \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1, & \cos^2 x + \sin^2 x &= 1, \\ \cosh' x &= \cosh x, & \cos' x &= -\sin x, \\ \sinh' x &= \sinh x, & \sin' x &= \cos x, \\ \tanh' x &= \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x, & \tan' x &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x. \end{aligned}$$

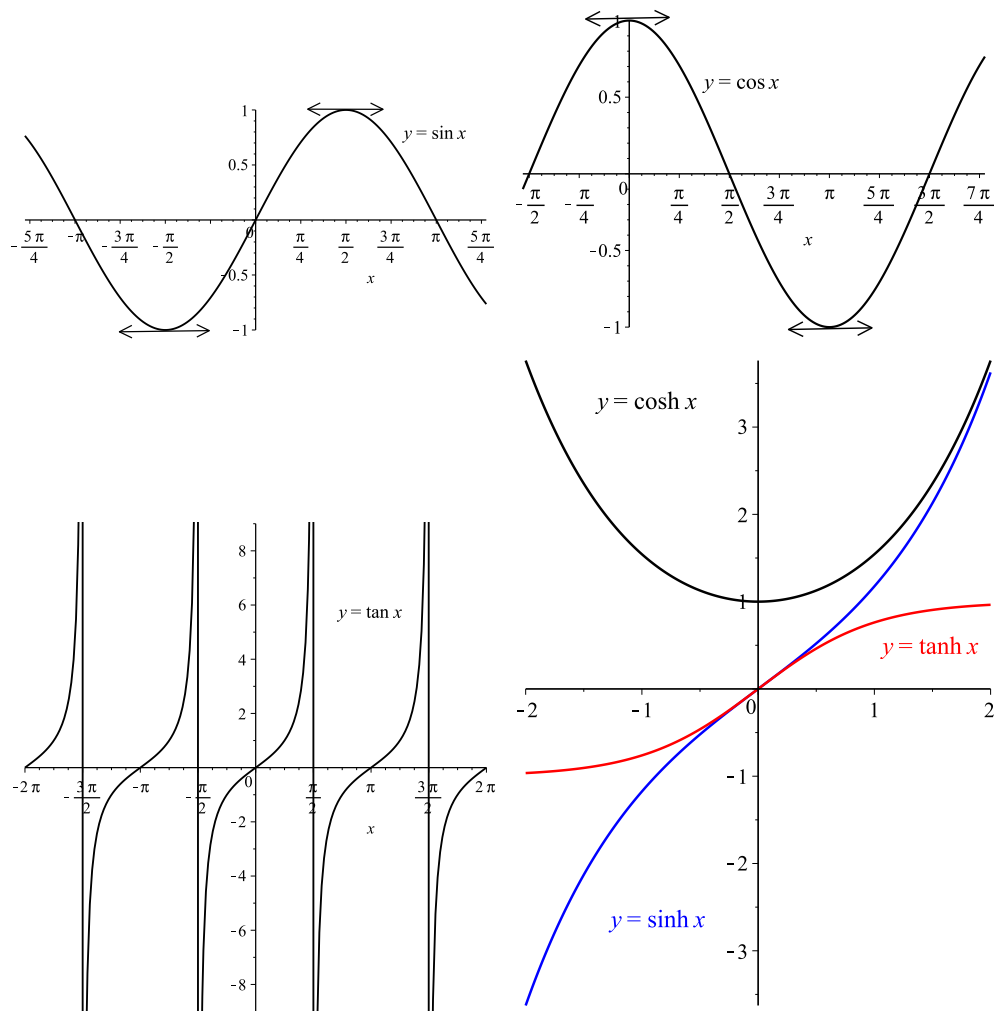


FIGURE 4.2 – Graphes des fonctions : cos, sin, tan, cosh, sinh et tanh

Propriété 3.2

$$\begin{aligned}
\cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y, & \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\
\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y, & \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y, \\
\cosh^2 x &= \frac{1}{2}(1 + \cosh(2x)) & \cos^2 x &= \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \\
\sinh^2 x &= -\frac{1}{2}(1 - \cosh(2x)) & \sin^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)). \\
\tanh(x+y) &= \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}, & \tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \\
\tanh(2x) &= \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}, & \tan(2x) &= \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x},
\end{aligned}$$

Propriété 3.3

Si on pose $s = \tanh(x/2)$ et $t = \tan(x/2)$, alors

$$\begin{aligned}
\sinh(x) &= \frac{2s}{1-s^2}, & \sin(x) &= \frac{2t}{1+t^2}, \\
\cosh(x) &= \frac{1+s^2}{1-s^2}, & \cos(x) &= \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\
\tanh(x) &= \frac{2s}{1+s^2}, & \tan(x) &= \frac{2t}{1-t^2},
\end{aligned}$$

4 Fonctions réciproques

Fonction arcsinus

La fonction $\sin$ définie de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$ est bijective. On définit sa réciproque $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. La fonction $\arcsin$ est impaire et on a

$$\begin{aligned}
\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \arcsin(\sin x) &= x. & \forall x \in [-1, 1], \sin(\arcsin x) &= x. \\
\forall x \in [-1, 1], \cos(\arcsin x) &= \sqrt{1-x^2} & \forall x \in [-1, 1], \tan(\arcsin x) &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned}$$

Proposition 4.1

La fonction $\arcsin$ est dérivable sur l'intervalle $] -1, 1[$ et

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

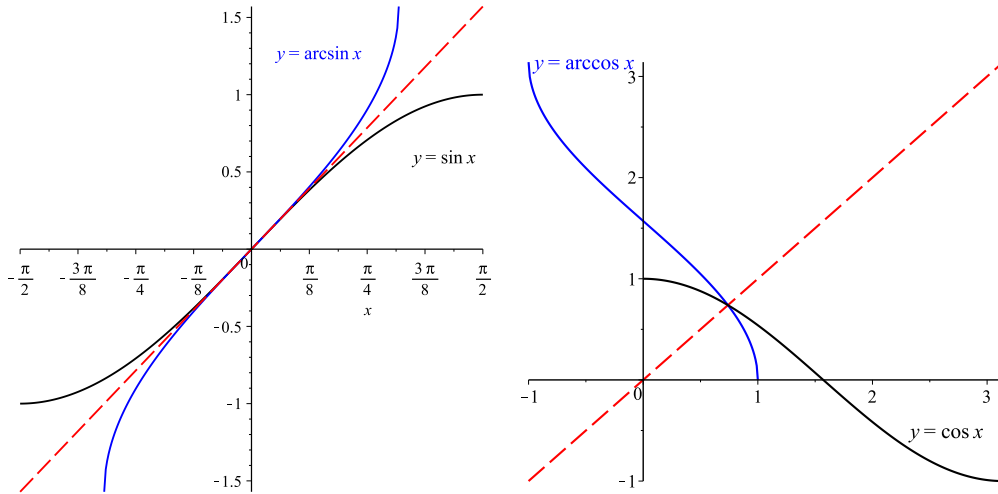


FIGURE 4.3 – Fonctions : arccos et arcsin.

Fonction arccosinus

La fonction $\cos$ est bijective de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. On définit sa réciproque $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$. On a

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, \pi], \arccos(\cos x) &= x. & \forall x \in [-1, 1], \cos(\arccos x) &= x. \\ \forall x \in [-1, 1], \sin(\arccos x) &= \sqrt{1 - x^2} & \forall x \in [-1, 1] - \{0\}, \tan(\arccos x) &= \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}. \end{aligned}$$

Proposition 4.2

La fonction $\arccos$ est dérivable sur l'intervalle $] -1, 1[$ et

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Proposition 4.3

$$\forall x \in [-1, 1], \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

Fonction arctangente

Sur l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, la fonction $\tan$ est bijective. On définit sa réciproque par $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. La fonction $\arctan$ vérifie les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \arctan(\tan x) &= x. & \forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan x) &= x. \\ \forall x \in \mathbb{R}, \cos(\arctan x) &= \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} & \forall x \in \mathbb{R}, \sin(\arctan x) &= \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}. \end{aligned}$$

Proposition 4.4

La fonction $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Fonction argument sinus hyperbolique $\sinh^{-1}$ (ou arsinh ou $\operatorname{argsinh}$)

La fonction $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bijective, donc inversible. Sa fonction inverse est appelée argument sinus hyperbolique notée : $\operatorname{argsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

La fonction $\operatorname{argsinh}$ peut s'exprimer en fonction du logarithme comme suit

Théorème 4.5

$$\operatorname{argsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Preuve du Théorème.

Soit $y \in \mathbb{R}$ Résolvons pour l'inconnue x réelle telle que $y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. On obtient alors

$$2y = e^x - e^{-x} \Leftrightarrow 2ye^x = e^{2x} - 1 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0.$$

En posant $t = e^x$, on obtient une équation du second ordre de la forme

$$t^2 - 2yt - 1 = 0.$$

Cette équation admet deux solutions : $t_1 = y - \sqrt{y^2 + 1} < 0$ et $t_2 = y + \sqrt{y^2 + 1} > 0$. La solution t_1 est à rejeter car $t = e^x > 0$, et donc on obtient $t = e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$, d'où

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

La fonction argument sinus est impaire et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{argsinh}(\sinh x) = x. \quad \forall x \in \mathbb{R}, \sinh(\operatorname{argsinh}(x)) = x.$$

Proposition 4.6

La fonction $\operatorname{argsinh}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{argsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Fonction argument cosinus hyperbolique $\cosh^{-1}$ (ou $\operatorname{arccosh}$ ou $\operatorname{argcosh}$)

La restriction de la fonction $\cosh$ à l'intervalle $I = [0, +\infty[$ est bijective de I vers $[1; +\infty[$. On appelle $\operatorname{argcosh}$ sa réciproque. La fonction $\operatorname{argcosh}$ peut s'exprimer en fonction du logarithme comme suit

Théorème 4.7

$$\operatorname{argcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \forall x \in [1; +\infty[.$$

Preuve du Théorème.

De même que $\operatorname{argsinh}$

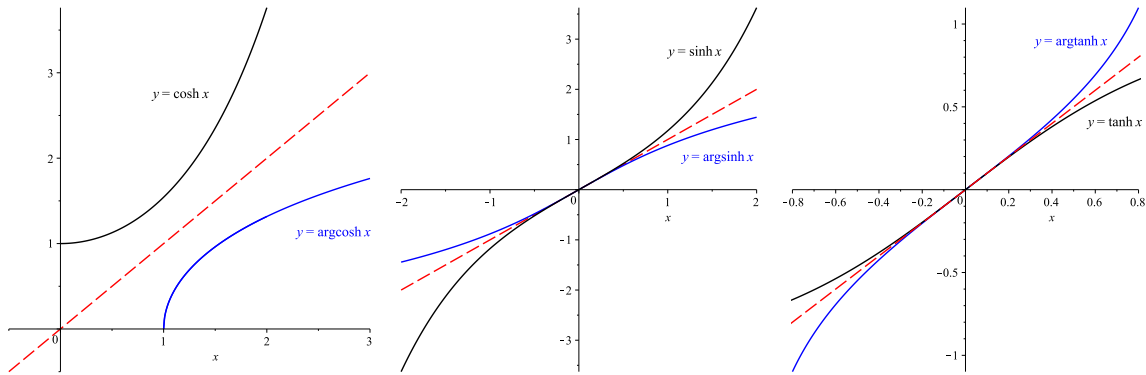


FIGURE 4.4 – Graphe de fonctions : $\operatorname{argcosh}$, $\operatorname{argsinh}$ et $\operatorname{argtanh}$

Fonction argument tangente hyperbolique $\tanh^{-1}$ (ou $\operatorname{arctanh}$ ou argtan)

La fonction $\tanh : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$ est bijective donc inversible. On appelle sa réciproque argument tangente hyperbolique, notée $\operatorname{argtanh} :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$. La fonction $\operatorname{argcosh}$ peut s'exprimer en fonction du logarithme comme suit

Théorème 4.8

$$\operatorname{argtanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right), \forall x \in]-1, 1[.$$

Preuve du Théorème.

Soit $y \in]-1, 1[$. Résolvons pour l'inconnue x réelle telle que $y = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. On obtient alors $y = \frac{e^{-x} e^{2x} - 1}{e^{-x} e^{2x} + 1} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \Leftrightarrow e^{2x}(1 - y) = (1 + y) \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1 + y}{1 - y}$. D'où

$$x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + y}{1 - y} \right).$$

Tableau récapitulatif des fonctions usuelles

Fonction	Domaine / Image	Dérivée	Limites	Propriétés clés
e^x	$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$	$(e^x)' = e^x$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$	Strictement croissante, convexe, $f(0) = 1$
$\ln(1+x)$	$] -1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x}$	$\lim_{x \rightarrow -1^+} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty$	Strictement croissante, concave, $f(0) = 0$
$\sin x$	$\mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$	$\cos x$	Bornée sur $\mathbb{R}$	Impaire, 2π -périodique, croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\cos x$	$\mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$	$-\sin x$	Bornée sur $\mathbb{R}$	Paire, 2π -périodique, décroissante sur $[0, \pi]$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\} \rightarrow \mathbb{R}$	$1 + \tan^2 x$	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} = -\infty$	Impaire, π -périodique, strictement croissante sur chaque intervalle de définition
$\sinh x$	$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$\cosh x$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = \pm\infty$	Impaire, strictement croissante
$\cosh x$	$\mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty[$	$\sinh x$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = +\infty$	Paire, strictement croissante sur $[0, +\infty[$, minimum en 0

TABLE 4.1 – Résumé des propriétés des fonctions usuelles

5 Exercices

Exercice 5.1:

Soient f et g deux fonctions définies par

$$f(x) = e^{-x} + (1 - e^{-x}) \ln(1 - e^{-x}), \quad g(x) = \ln(1 - e^{-x})e^x.$$

1. Montrer que f et g sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Étudier les variations de f et en déduire que pour tout $x > 0$ on a $f(x) > 0$.
3. Montrer que $g'(x) = \frac{e^x}{1 - e^{-x}} f(x)$. Et en déduire les variations de g .

4. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
5. Tracer le graphe de g .

Exercice 5.2:

Soit f une fonction définie par : $f(x) = 2 \sin(x) + \sin(2x)$

1. Déterminer le domaine de définition de f , sa période et sa parité.
2. Calculer la dérivée de f et dresser le tableau de variation.
3. Tracer la courbe représentative de f .

Exercice 5.3:

1. Déterminer la valeur de $\arcsin(-\sqrt{3}/2)$, $\arccos(-1/2)$ et $\arctan(\sqrt{3}/3)$.
2. Calculer 1. $\arccos(\cos(\frac{2\pi}{3}))$, 2. $\arccos(\cos(\frac{-2\pi}{3}))$, 3. $\arccos(\cos(\frac{4\pi}{3}))$, 4. $\cosh\left(\frac{1}{2} \ln(3)\right)$,
3. Simplifier les expressions suivantes 1. $\cos(\arctan x)$, 2. $\sin(\arctan x)$, 3. $\tan(\arcsin x)$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$1. \arccos(x) = \frac{\pi}{3} \quad 2. \arctan(x/2) = \pi,$$

$$3. \arccos(x) = \arcsin(x) \quad 4. \arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4},$$

$$5. 3 \cosh(x) - \sinh(x) - 3 = 0, \quad 6. 2 \cosh(x) + \sinh(x) = \sqrt{3} \cosh(5x).$$

5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Résoudre l'équation

$$\ln(\cosh(x)) = \alpha$$

Exercice 5.4:

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Simplifier l'expression de f , en posant $x = \sin t$.

Exercice 5.5:

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \cos \arctan(2x + 1)$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Étudier les limites de f en $\pm\infty$.
3. Calculer $f(-1)$.
4. Résoudre l'équation $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
5. Montrer que la restriction de f à $[-1/2, +\infty[$ est inversible. Si sa réciproque est notée g , calculer alors $g'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

CHAPITRE 5

FORMULE DE TAYLOR ET DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Ce chapitre approfondit l'étude locale des fonctions en introduisant les formules de Taylor, qui permettent d'approximer une fonction suffisamment dérivable par un polynôme au voisinage d'un point, avec une estimation de l'erreur commise (le "reste"). Nous explorerons différentes formes du reste (Lagrange, Cauchy, Young, intégral). Ces formules mènent naturellement à la notion de développement limité, un outil puissant pour analyser le comportement local des fonctions, calculer des limites, étudier la position d'une courbe par rapport à sa tangente, déterminer la nature d'extrema locaux, ou encore étudier les branches infinies.

1 Formule de Taylor

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable en $x_0 \in]a, b[$. Au voisinage de x_0 , on peut écrire

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h),$$

La fonction f est donc approchée au voisinage de x_0 par le polynôme de degré 1 :

$$p_1(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h.$$

Cette formule peut-être généralisée pour des fonctions n fois dérivables en x_0 , et elle sera approximée par un polynôme de degré inférieur ou égal à n , sous forme suivante

$$p_n(h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n,$$

Ce qui donne la *formule de Taylor* suivante

Théorème 1.1: Formule de Taylor^(a)

a. Brook Taylor (1685-1731), mathématicien anglais.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[a, b]$, $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a, b[$ ($f^{(n+1)}$ existe sur $]a, b[$) et soit x_0 un point de $[a, b]$. Alors $\forall x = x_0 + h \in [a, b]$, $h \neq 0$, on a

$$f(x) = f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + R_n(x_0, h), \quad (5.1)$$

où

$$R_n(x_0, h) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + t)(h - t)^n(g(x_0 + h) - g(x_0))}{(n + 1)!g'(x_0 + t)} \quad (5.2)$$

avec t est un point strictement compris entre 0 et h , et g est une fonction quelconque continue sur $[a, b]$, dérivable dans $]a, b[$ et $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in]a, b[$.

L'expression (5.1) est dite formule de Taylor avec le reste (5.2).

Preuve du Théorème.

Supposant que $h > 0$. Nous considérons la fonction $\phi : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(u) = f(x_0 + h) - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(x_0 + u)}{k!} (h - u)^k$$

- La fonction ϕ est bien définie, continue sur $[0, h]$, et dérivable sur $]0, h[$ (car f est C^n et f^n dérivable).
- La dérivée de ϕ est :

$$\phi'(u) = - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k+1)}(x_0 + u)(h - u)^k - k f^{(k)}(x_0 + u)(h - u)^{k-1}}{k!} = - \frac{f^{(n+1)}(x_0 + u)(h - u)^n}{n!}.$$

- On a $\phi(h) = 0$, $\phi(0) = f(x_0 + h) - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k$ et $\phi'(u) = - \frac{f^{(n+1)}(x_0 + u)(h - u)^n}{n!}$.
- Soit $\psi : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\psi(u) = g(x_0 + u)$. D'après le théorème des accroissements finis généralisé sur $[0, h]$, il existe t , $0 < t < h$, tel que

$$\frac{\phi(h) - \phi(0)}{\psi(h) - \psi(0)} = \frac{\phi'(t)}{\psi'(t)} \Rightarrow \frac{\phi(h) - \phi(0)}{g(x_0 + h) - g(x_0)} = \frac{- \frac{f^{(n+1)}(x_0 + t)(h - t)^n}{n!}}{g'(x_0 + t)}$$

On réarrange l'équation pour obtenir :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + R_n(x_0, h),$$

$$\text{où } R_n(x_0, h) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + t) \cdot (h - t)^n \cdot (g(x_0 + h) - g(x_0))}{(n + 1)! \cdot g'(x_0 + t)}.$$

Le cas $h < 0$ se traite de façon identique en considérant $x_0 + h < x_0$, donc avec l'intervalle $[h, 0]$, et mène à la même conclusion. ■

Théorème 1.2: Formule de Taylor-Lagrange^(a)

a. Joseph Louis de Lagrange (1736-1813) est un mathématicien, mécanicien et astronome italien, originaire du royaume de Sardaigne et naturalisé français.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[a, b]$, $f^{(n)}$ est dérivable dans $]a, b[$ et soit x_0 un point de $[a, b]$. Alors $\forall x = x_0 + h \in [a, b]$, $h \neq 0$, on a

$$f(x) = f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta)}{(n+1)!} h^{n+1}$$

où θ est un point strictement compris entre 0 et h . Le terme $\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta)}{(n+1)!} h^{n+1}$ est appelé reste de Lagrange.

Preuve du Théorème.

En portant $g(u) = (x_0 + h - u)^{n+1}$ dans la formule de Taylor, on obtient le résultat. ■

Remarque.

La formule de Taylor-Lagrange est particulièrement utile pour obtenir des encadrements ou des inégalités précises.

Par exemple, pour majorer l'erreur commise en approximant e^x par $1 + x + x^2/2$ pour $x \in [0, 1]$: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{e^c}{3!}x^3$ avec $c \in]0, x[$. Comme $c \in]0, x[$ et $x \in [0, 1]$, on a $e^c \leq e^1 = e$. Donc l'erreur (le reste) $R_2(x) = \frac{e^c}{6}x^3 \leq \frac{e}{6}x^3$. Pour $x = 0.1$, l'erreur est majorée par $\frac{e}{6}10^{-3} \approx 0.00045$.

Théorème 1.3: Formule de Taylor-Maclaurin^(b)

b. Colin Maclaurin (1698-1746), mathématicien écossais.

Lorsque $x_0 = 0$ dans la formule de Taylor-Lagrange, on obtient la formule dite de Maclaurin suivante :

$$f(h) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} h^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta h)}{(n+1)!} h^{n+1} \quad \text{où } 0 < \theta < 1.$$

Théorème 1.4: Formule de Taylor-Cauchy

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[a, b]$, $f^{(n)}$ est dérivable dans $]a, b[$ et soit x_0 un point de $[a, b]$. Alors $\forall h \in [a - x_0, b - x_0]$, $h \neq 0$, on a

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{(n+1)!} (1 - \theta)^n h^{n+1}.$$

où $0 < \theta < 1$ et le terme $\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{(n+1)!} (1 - \theta)^n h^{n+1}$ est appelé reste de Cauchy.

Théorème 1.5: Formule de Taylor-Young

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit x_0 un point de $[a, b]$. Supposant que $f^{(n)}(x_0)$ existe et fini. Alors $\forall x = x_0 + h \in [a, b]$, $h \neq 0$, on a

$$f(x) = f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + o(h^n).$$

Cette dernière est appelée Formule de Taylor avec reste de Young.

Théorème 1.6: Formule de Taylor avec reste intégrale

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1} sur $[a, b]$ et soit x_0 un point de $[a, b]$. Alors $\forall x = x_0 + h \in [a, b]$, $h \neq 0$, on a

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + t) dt.$$

où le terme $\int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + t) dt$ est appelé reste intégral.

2 Développements limités

Définition 2.1

Pour $x_0 \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 , $DL_n(x_0)$, s'il existe des nombres réels $a_0, \dots, a_n$ tels que, pour tout $x \in v(x_0) \subset I$, on ait :

$$f(x) = f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + \dots + a_n h^n + o(h^n),$$

avec $h = x - x_0$. Le polynôme de degré n : $a_0 + a_1 h + \dots + a_n h^n$ s'appelle partie régulière (Partie principale ou partie polynômiale) du $DL_n(x_0)$. Le terme $o(h^n)$ est appelé le reste du $DL_n(x_0)$, avec $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h^n)}{h^n} = 0$.

Remarque.

Il est important de noter que les différentes formes de la formule de Taylor (Lagrange, Cauchy, Young, avec reste intégral) reposent sur des hypothèses de régularité de la fonction f qui peuvent varier.

- La **formule de Taylor-Young**, $f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + o(h^n)$, ne requiert que l'existence de la dérivée n -ième $f^{(n)}(x_0)$ au point x_0 . C'est la forme la plus couramment utilisée pour l'obtention des développements limités et pour l'étude locale du comportement d'une fonction.
- Les **formules avec un reste explicite** (Taylor-Lagrange, Taylor-Cauchy) nécessitent généralement que la fonction f soit de classe C^n sur un intervalle $[a, b]$ contenant x_0 et $x_0 + h$, et que sa dérivée $(n+1)$ -ième, $f^{(n+1)}$, existe sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Ces formules sont précieuses pour obtenir des majorations de l'erreur d'approximation.
- La **formule de Taylor avec reste intégral** exige des hypothèses encore plus fortes, typiquement que f soit de classe C^{n+1} sur l'intervalle considéré, afin de garantir l'existence et l'intégrabilité de $f^{(n+1)}$.

Pour la plupart des applications pratiques des développements limités, la formule de Taylor-Young est suffisante. Cependant, lorsque l'on a besoin d'une estimation précise du reste, les autres formes deviennent indispensables et leurs hypothèses plus fortes doivent être vérifiées avec soin.

Exemple :

Soit $f : x \in]-1, 1[\mapsto f(x) = \frac{1}{1-x}$.

On a : $f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$. Donc f admet un développement limité en $x_0 = 0$ à tout ordre n de partie régulière (polynômiale) $1 + x + x^2 + \dots + x^n$ et de reste

$$o(x^n) = \frac{x^{n+1}}{1-x} \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1-x} = 0 \right)$$

Proposition 2.2

Si f est de classe $C^n(I)$ alors f admet un $DL_n(x_0)$, qui provient de la formule de Taylor-Young :

$$f(x) = f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + o(h^n),$$

où $h = x - x_0$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h^n)}{h^n} = 0$.

Proposition 2.3

Si f admet un $DL_n(x_0)$ alors ce DL est unique.

Preuve de la Proposition.

On pose $h = x - x_0$. Supposons que f admette deux développements limités à l'ordre n

$$f(x) = a_0 + a_1h + \cdots + a_nh^n + o_1(h^n) \quad (5.3)$$

$$f(x) = b_0 + b_1h + \cdots + b_nh^n + o_2(h^n) \quad (5.4)$$

(5.3)-(5.4) $\Rightarrow (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)h + \cdots + (a_n - b_n)h^n + o_1(h^n) - o_2(h^n) = 0$. Lorsque l'on fait tendre h vers 0 on obtient $a_0 = b_0$. Ensuite on peut diviser cette égalité par h : $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)h + \cdots + (a_n - b_n)h^{n-1} + o_1(h^{n-1}) - o_2(h^{n-1}) = 0$ de même quand $h \rightarrow 0$ nous donne $a_1 = b_1$, ainsi de suite on obtient, $a_i = b_i \forall i = 0..n$. Les parties régulières sont égales et donc les restes aussi. ■

Corollaire 2.4

Si f est paire (resp. impaire) alors la partie régulière de son DL en 0 ne contient que des monômes de degrés pairs (resp. impairs).

Preuve du Corollaire.

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admette le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 suivant

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$$

Si f est paire, c'est à dire tout élément x de I , $-x$ appartient aussi à I et $f(x) = f(-x)$, alors

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + \cdots + a_{2k+1}x^{2k+1} + \cdots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x) \\ &= a_0 - a_1x + \cdots - a_{2k+1}x^{2k+1} + \cdots + (-1)^na_nx^n + x^n\varepsilon(x). \end{aligned}$$

D'après l'unicité du développement limité, on a

$$a_{2k+1} = -a_{2k+1}$$

donc $a_{2k+1} = 0$. Si f est impaire, alors pour tout réel x appartenant à I , $-x$ appartient à I et $f(-x) = -f(x)$. Donc

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + \cdots + a_{2k}x^{2k} + \cdots + a_nx^n + o(x^n) \\ &= -a_0 + a_1x + \cdots - a_{2k}x^{2k} + \cdots + (-1)^n a_nx^n + o(x^n). \end{aligned}$$

D'après l'unicité du développement limité, on a

$$a_{2k} = -a_{2k}$$

donc $a_{2k} = 0$.

Proposition 2.5

Si f admet un $DL_n(x_0)$ alors elle en possède un pour tout $p \leq n$.

Preuve de la Proposition.

En effet

$$f(x) = f(x_0 + h) = a_0 + a_1h + \cdots + a_ph^p + \cdots + a_nh^n + o(h^n) = a_0 + a_1h + \cdots + a_ph^p + o(h^p)$$

$$\text{avec } o(h^p) = \sum_{k=p+1}^n a_k h^{k-p} + o(h^n) \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h^p)}{h^p} = 0.$$

Théorème 2.6: Formule de Taylor-Young

Soit f une fonction de classe C^n sur l'intervalle I et $0 \in I$. Alors pour tout $x \in I$ on a :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Remarque.

Si une fonction f est n fois dérivable en x_0 , alors elle admet un développement limité à l'ordre n en x_0 donné par la formule de Taylor-Young. La réciproque est fautive en général : une fonction peut admettre un DL à l'ordre n sans être n fois dérivable (elle n'est même pas nécessairement dérivable une fois si $n = 0$). Cependant, si f admet un DL d'ordre $n \geq 1$, alors f est continue en x_0 ($a_0 = f(x_0)$) et si $n \geq 1$, f est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) = a_1$.

Exemple :

$$DL_n(0)(e^x) : e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$DL_n(0)(\sin x) : \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

Remarque.

La fonction $f : x \mapsto f(x)$ admet un développement limité d'ordre n en x_0 si, et seulement si la fonction $g : h \mapsto f(x_0 + h)$ admet un développement limité d'ordre n en 0.

Exemple :

Calculer le $DL_n(1)$ de la fonction $x \mapsto f(x) = e^x$. On pose $h = x - 1$

$$e^x = e e^{x-1} = e^1 e^h = e \left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \cdots + \frac{h^n}{n!} + o(h^n) \right) \quad (5.5)$$

$$= e \left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x-1)^n}{n!} + o((x-1)^n) \right). \quad (5.6)$$

Exemple :

Calculer le $DL_2(+\infty)$ de la fonction $x \mapsto f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x}}$. On pose le changement de variable $t = \frac{1}{x}$. Si $x \in v(+\infty)$ alors $t \in v(0)$. On obtient alors

$$f(x) = f\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{1+2t}.$$

Ainsi, on est ramené au développement limité de $\sqrt{1+2t}$ au voisinage de 0. De la table des développements usuels, on a

$$\sqrt{1+2t} = 1 + t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^3 + o(t^3).$$

On obtient

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

3 Opérations sur les développements limités

Proposition 3.1

Si f et g sont deux fonctions définies au voisinage de 0 qui admettent des développements limités à l'ordre n et p

$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$, $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_px^p + o(x^p)$ Alors

1. $f + g$ admet un développement limité à l'ordre $q = \min\{n, p\}$.

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = c_0+c_1x+\dots+c_qx^q+o(x^q) \quad \text{o} \quad c_k = a_k+b_k, \quad k = 0, \dots, q.$$

2. $f.g$ admet un développement limité à l'ordre $q = \min\{n, p\}$.

$$(f.g)(x) = f(x).g(x) = c_0+c_1x+\dots+c_qx^q+o(x^q) \quad \text{o} \quad c_k = \sum_{i=0}^k a_ib_{k-i}, \quad k = 0, \dots, q.$$

3. Si $g(0) \neq 0$ alors f/g admet un développement limité à l'ordre $q = \min\{n, p\}$

$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = c_0 + c_1x + \dots + c_qx^q + o(x^q)$$

où $c_0 + c_1x + \dots + c_qx^q$ s'obtient en faisant la division de $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ par $b_0 + b_1x + \dots + b_px^p$, selon les puissances croissantes s'effectue jusqu'à l'ordre $q = \min\{n, p\}$.

Exemple :

Soit $f(x) = 1 + x - 3x^2 + 2x^3 + o(x)^3$, $g(x) = -x + x^2 + o(x)^2$.

Alors $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 1 - 2x^2 + o(x)^2$. ■

Exemple :

Soit $f(x) = x - 3x^2 - x^3 + o(x)^3$, $g(x) = 1 - x + 2x^2 + o(x)^2$.

Alors $(f.g)(x) = f(x).g(x) = x - 4x^2 + o(x)^2$. ■

Exemple :

Donner le développement limité de $\frac{1+x}{2+x}$ en 0 à l'ordre 4.

$ \begin{array}{r} 1 + x \\ 1 + x/2 \\ \hline x/2 \\ x/2 + x^2/4 \\ \hline - x^2/4 \\ - x^2/4 - x^3/8 \\ \hline x^3/8 \\ x^3/8 + x^4/16 \\ \hline - x^4/16 \\ - x^4/16 - x^5/32 \\ \hline x^5/32 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 2 + x \\ \hline \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{x^4}{32} \end{array} $
---	--

Donc le $DL_4(0)$: $\frac{1+x}{2+x} = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{x^4}{32} + o(x^4)$ ■

Remarque.

Lorsqu'on effectue des opérations (produit, quotient, composition) sur des DL à l'ordre n , il est parfois nécessaire de calculer les DL des fonctions de base à un ordre supérieur à n pour s'assurer que tous les termes jusqu'à l'ordre n du résultat final sont corrects, en particulier si des termes de bas degré s'annulent ou si la variable dans une composition n'est pas simplement x .

Proposition 3.2

Soit $g(x) = 1 + b_1x + \dots + b_px^p + o(x^p)$, alors

$$\frac{1}{g(x)} = 1 - (b_1x + \dots + b_px^p) + (b_1x + \dots + b_px^p)^2 + \dots + (-1)^p (b_1x + \dots + b_px^p)^p + o(x^p)$$

dont on conserve que les monômes de degré inférieur ou égal à p .

Preuve de la Proposition.

On a $\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{1-u}$ avec $u = -(b_1x + \dots + b_px^p + o(x^p)) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$

Comme $\frac{1}{1-u} = 1 + u^2 + u^3 + \dots + u^p + o(u^p)$, d'où le résultat. ■

Remarque.

1. Pour $g(x) = b_0 + \dots + b_p x^p + o(x^p)$ tel que $b_0 \neq 0$, il suffit d'écrire

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b_0} \frac{1}{1 + \frac{b_1}{b_0}x + \dots + \frac{b_p}{b_0}x^p + \frac{1}{b_0}o(x^p)}.$$

2. Si $b_i = 0 \forall i < k$ et $b_k \neq 0$ alors on factorise par x^k .
 3. On peut obtenir le développement limité du quotient de deux fonctions en combinant le produit et l'inverse.

$$\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}.$$

Exemple :

Cherchons le développement d'ordre 4 de $\tan x$

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \left[1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^4)\right] \\ &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^4)\right) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4) \end{aligned}$$

Proposition 3.3

Soit g une fonction définie au voisinage de 0 et f une fonction définie au voisinage de $b = g(0)$. Si g admet un développement limité à l'ordre p en 0 et si f admet un développement limité à l'ordre n en b alors $f \circ g$ admet un développement limité à l'ordre $q = \min\{n, p\}$ obtenu en substituant les développements limités et en tronquant à l'ordre q .

Remarque.

La condition g admet un développement limité à l'ordre p en 0 et f admet un développement limité à l'ordre n est une condition suffisante mais elle n'est pas nécessaire.

La fonction $x \mapsto \cos \sqrt{x}$ admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 alors que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'admet pas de développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 car elle n'est pas dérivable en 0 et donc elle n'admet pas un développement limité d'ordre 1.

Exemple :

Développement limités d'ordre 3 en 0 de $e^{\sin x}$.

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3) \text{ et } u = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\text{donc } e^{\sin x} = 1 + \left[x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right] + \frac{1}{2} \left[x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right]^2 + \frac{1}{6} \left[x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right]^3 + o \left(\left[x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right]^3 \right)$$

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$

Exemple :

Calculer le $DL_3(0)$ de $f(x) = \ln(\cos x)$. On pose $u(x) = \cos(x) - 1$. Quand $x \rightarrow 0$, $u(x) \rightarrow 0$. $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \implies u(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$. $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$. $f(x) = \ln(1+u(x)) = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(-\frac{x^2}{2} + \dots\right)^3 + o(x^6)$ (car $u \sim -x^2/2$). $f(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2} \left(\frac{x^4}{4}\right) + o(x^4)$ (on ne garde que les termes jusqu'à x^4 pour un DL_3 de $\ln(\cos x)$ car x^2 est le plus petit degré). $f(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} - \frac{2x^4}{24} + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$.

Proposition 3.4

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue au voisinage de 0 admettant un développement limité d'ordre n au point 0

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$$

alors toute primitive F de f admet le $DL_{n+1}(0)$ donné par

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = F(0) + a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + \dots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Exemple :

Calculons le développement limité de $\arctan x$.

On sait que

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

comme $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$, donc $\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1-(-t^2)} = 1 - t^2 + t^4 + \dots + (-1)^n t^{2n} + o(t^{2n})$. D'où

$$\begin{aligned} \arctan x &= \arctan(0) + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}). \end{aligned}$$

Proposition 3.5

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et admet un $DL_n(0) : f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$.
et si f' admet un $DL_{n-1}(0)$ alors celui-ci est donné par

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} + o(x^{n-1}).$$

Exemple :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + o(x^{n-1}).$$

4 Quelques applications des développements limités

4.1 Solutions approchées des équations

Soit à résoudre l'équation

$$f(x) = e^x - x - 1.0001 = 0. \quad (5.7)$$

On pose $f(x) = e^x - x - 1.0001$. On a f continue et $f(0)f(1) < 0$, donc d'après le théorème des VI l'équation (5.7) admet une solution dans l'intervalle $]0, 1[$, et comme f strictement croissante sur cet intervalle alors elle est unique. Soit x_0 la solution de l'équation (5.7) dans $]0, 1[$. Du fait que $0 < x_0 < 1$ donc $x_0^2 \ll 1$, donc on peut calculer une valeur approchée de x_0 et cela on négligeant les termes de degré trois et plus du DL(0) de e^x . On a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow e^x \simeq 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

Donc on a : $f(x) \simeq \frac{x^2}{2} - 0.0001$, d'où $x_0 \simeq \sqrt{2} 10^{-2}$.

4.2 Calcul des limites

Exemple :

Déterminer la limite en 0 de $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x}{x^3}$.

On a $\sqrt{1+x} \sim 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$ et $\sqrt{1-x} \sim 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3$. Donc

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x}{x^3} \sim \frac{(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3) - (1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3) - x}{x^3}$$

D'où

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x}{x^3} = \frac{1}{8}.$$

Exemple :

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$.

Ici, il faut des développements limités (DL) à l'ordre 3 pour chaque terme du numérateur.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\begin{aligned} e^x \sin x &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + o(x^3) \\ &= x - \frac{x^3}{6} + x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

$$x(1+x) = x + x^2$$

$$e^x \sin x - x(1+x) = \left(x + x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) - (x + x^2) + o(x^3) = \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

Donc,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

Cet exemple montre la nécessité de pousser les DL assez loin pour que le premier terme non nul du numérateur apparaisse.

4.3 Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Proposition 4.1

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant un développement limité en x_0

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^k)$$

où k est le plus petit entier supérieur ou égal à 2 tel que le coefficient a_k soit non nul. Alors l'équation de la tangente à la courbe de f en x_0 est :

$$y = a_0 + a_1(x - x_0)$$

et sa position par rapport à la fonction f pour x proche de x_0 est donnée par le signe $f(x) - y$, c'est-à-dire le signe de $a_k(x - x_0)^k$.

Trois cas se présentent

1. Si k est paire et $a_k > 0$ alors la courbe est au-dessus de la tangente.
2. Si k est paire et $a_k < 0$ alors la courbe est en dessous de la tangente.
3. Si k est impaire, alors la courbe traverse la tangente au point d'abscisse x_0 . On dit que $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion suivant la tangente $y = a_0 + a_1(x - x_0)$.

Exemple :

1. La tangente en 1 de $f(x) = \sin(x+3)+2$ est donnée par : $y = \cos(4)(x-1)+\sin(4)+2$. Le graphe de f est au-dessus de la tangente car $f''(1) = -\sin(4) > 0$.
2. La tangente en $\frac{1}{2}$ de $f(x) = 1 - 2x^3 + x^4$ est donnée par : $y = -(x - \frac{1}{2}) + \frac{13}{16}$. Le graphe de f est en dessous de la tangente car $f''(1/2) = -3 < 0$.
3. La tangente en 1 de $f(x) = 1 - 2x^3 + x^4$ est donnée par : $y = -2(x - 1)$. Donc $(1, 0)$ est un point d'inflexion car $f''(1) = 0$ et $f'''(1) = 12 \neq 0$. Alors la courbe du graphe de f traverse la tangente au point d'abscisse 1.

4.4 Étude des branches infinies

L'étude des branches infinies d'une fonction f a pour objectif de comprendre en détails le comportement de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

1. Calcul de

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

- (a) Si cette limite est un réel fini l , alors la courbe admet une asymptote horizontale à droite d'équation $y = l$ et l'étude est terminée.
- (b) Si c'est $+\infty$, passer à l'étape 2.

2. Calcul de

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

- (a) Si cette limite est nulle, alors la courbe n'admet pas d'asymptote mais une branche parabolique d'axe Ox .
- (b) Si cette limite est infinie, alors la courbe n'admet pas d'asymptote mais une branche parabolique d'axe Oy .
- (c) Si cette limite est un réel fini a non nul, passer à l'étape 3.

3. Calcul de

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$$

- (a) Si cette limite est un réel fini b , la droite d'équation $y = ax + b$ est alors une asymptote oblique à la courbe de f .
- (b) Si cette limite est infinie, alors la courbe de f n'a pas d'asymptote mais une branche parabolique de direction $y = ax$.

Dans la pratique, pour déterminer les branches infinies en $+\infty$ d'une fonction f , on effectue un développement asymptotique de f . Pour cela, on pose

$$t = \frac{1}{x}$$

et on utilise les développements limités connus.

Exemple :

La fonction $x \mapsto \ln x$ admet une branche infinie parabolique en $+\infty$ de direction Ox .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Exemple :

La fonction $x \mapsto e^x$ admet une branche infinie parabolique en $+\infty$ de direction Oy .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Exemple :

La fonction $x \mapsto x + \sqrt{x}$ admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = x$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x} - x) = +\infty.$$

4.5 Minima et maxima locaux

Les développements limités sont aussi très importants en vue de la détection des points des minima et maxima locaux.

Définition 4.2

Soit f une fonction définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f admet un maximum local en x_0 si f est majorée par $f(x_0)$ au voisinage de x_0 . Autrement dit

$$\exists \delta > 0 :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset D_f \text{ et } \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, f(x) \leq f(x_0)$$

On dit que f admet un minimum local en x_0 si f est minorée par $f(x_0)$ au voisinage de x_0

$$\exists \delta > 0 :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset D_f \text{ et } \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, f(x) \geq f(x_0)$$

On dit que f admet un **extremum** local en x_0 si f admet un maximum ou un minimum local en x_0 .

Proposition 4.3

Si f admet un **extremum** local en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$.

Théorème 4.4

Soit f une fonction définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f admet un développement limité au voisinage de x_0 de la forme

$$f(x) = a_0 + a_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^k)$$

avec $a_1 = 0$ ($f'(x_0) = 0$) et k est le plus petit entier naturel supérieur ou égale à deux tel que $a_k \neq 0$. Alors :

1. Si k est paire et $a_k > 0$ alors x_0 est un point minimum local ;
2. Si k est paire et $a_k < 0$ alors x_0 est un point maximum local ;
3. Si k est impaire, x_0 n'est pas un extremum, on dit que $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion.

Exemple :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \cos x^2$. Le développement limité de cette fonction est donnée par

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^8)$$

Donc le point $x_0 = 0$ est un maximum local. ■

Exemple :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sinh(x^2 + x)$. Le développement limité de cette fonction au point $x_0 = -\frac{1}{2}$ est donnée par

$$f(x) = -\sinh\left(\frac{1}{4}\right) + \cosh\left(\frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + o\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right)$$

$\cosh \frac{1}{4} = 1.0314 > 0$, donc le point $x_0 = -\frac{1}{2}$ est un minimum local. ■

Exemple :

Soit f la fonction définie par $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3 - e^x$. Le développement limité de cette fonction au point $x_0 = 0$ est donnée par

$$f(x) = \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$$

$a_2 = 0$ et $a_3 = \frac{5}{6} \neq 0$ donc le point $(x_0, f(x_0)) = (0, 0)$ est un point d'inflexion. ■

Tableau des développements limités usuels en $x_0 = 0$

Fonction $f(x)$	Développement limité en 0
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+1})$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k})$
$\tan x$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$
$\arctan x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2k+1})$
$\arcsin x$	$x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$
$\frac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$

5 Exercices

Exercice 5.1:

1. énoncé le théorème de Taylor-Lagrange.
2. écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 pour la fonction $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(1+x)$ au voisinage de 0.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
4. Dédire l'encadrement de $\ln(2)$ suivant : $\frac{7}{12} \leq \ln 2 \leq \frac{157}{192}$

Exercice 5.2:

A l'aide de la formule de Taylor-Lagrange, montrer que

$$\forall x \in]0, +\infty[: x - \frac{x^3}{2} < \ln(x + \sqrt{1+x^2}) < x.$$

Dédire la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x}.$$

Exercice 5.3:

A l'aide de la formule de Taylor-Lagrange, montrer que

$$\forall x \in]0, \sqrt{2}[: e^x < 2 \frac{1+x}{2-x^2}.$$

Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de e .

Exercice 5.4:

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3 et $x_0 \in \mathbb{R}$. À l'aide de la formule de Taylor-Young, montrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} = f''(x_0).$$

Exercice 5.5:

Déterminer les développements limités suivants

$$\begin{array}{lll} DL_3(\pi/4) \text{ de } \sin x; & DL_4(1) \text{ de } \frac{\ln x}{x^2}; & DL_5(0) \text{ de } \ln(1 + \sin x); \\ DL_4(0) \text{ de } \ln(\cos(x)); & DL_4(0) \text{ de } \tan(x); & DL_4(0) \text{ de } \sin(\tan(x)); \\ DL_4(0) \text{ de } (\ln(1+x))^2; & DL_3(0) \text{ de } \exp(\sin(x)); & DL_9(0) \text{ de } \sin^6(x); \\ DL_3(0) \text{ de } \ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right); & DL_3(0) \text{ de } \sqrt{3+\cos x}; & DL_3(0) \text{ de } e^{\sqrt{1+x}}; \\ DL_3(0) \text{ de } \ln(1 + \sqrt{1+x}); & DL_3(0) \text{ de } (1+x)^{1/x}; & DL_4(0) \text{ de } \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right); \\ DL_3(0) \text{ de } \frac{x - \sin x}{1 - \cos x}; & DL_3(0) \text{ de } \ln(1 + \sqrt{1+x}); & DL_4(0) \text{ de } \cos(x) \ln(1+x); \\ DL_4(0) \text{ de } \frac{1}{\cos x}. \end{array}$$

Exercice 5.6:

Calculer les limites suivantes : 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x}$ 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$
 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$ 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$ 6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x} \right)^{x \ln x}$.

Exercice 5.7:

Étudier la position de la courbe représentative de $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$ par rapport à sa tangente en 0 et en 1.

Exercice 5.8:

Étudier les branches infinies des fonctions :

$$1) f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{1+x^2}\right); \quad 2) g(x) = x \sqrt{\frac{x-1}{3x+1}}.$$

CHAPITRE 6

ALGÈBRE LINÉAIRE

L'algèbre linéaire est une branche centrale des mathématiques qui étudie les espaces vectoriels et les transformations linéaires entre eux. Ce chapitre a pour objectif d'introduire les structures algébriques de base (groupes, anneaux, corps) qui fournissent le cadre nécessaire à la définition rigoureuse des espaces vectoriels sur un corps commutatif $\mathbb{K}$. Nous explorerons ensuite en détail les propriétés de ces espaces : sous-espaces, familles génératrices et libres, bases et dimension. La dernière partie sera consacrée aux applications linéaires, à leur noyau, leur image, et au théorème fondamental du rang.

1 Structures algébriques de base : Loi de composition interne, groupe, anneau et corps

1.1 Loi de composition interne

Définition 1.1

Soit E un ensemble. On appelle *loi de composition interne* une relation binaire de $E \times E$ pour laquelle l'ensemble E est stable, ou bien une application de $E \times E$ dans E .

Remarque.

Si on note par $*$ une loi interne dans E , la stabilité par rapport à E signifie que pour deux éléments $a, b \in E$ quelconques, l'élément $a * b \in E$.

Exemple :

- $E = \mathbb{N}$, l'addition et la multiplication sont des lois de compositions internes, contrairement à la soustraction et à la division.
- Sur $\mathcal{P}(E)$, l'union et l'intersection définissent des lois de compositions internes.
- Dans l'ensemble $\mathcal{F}(E, E)$, des applications de E dans E , la composition des applications $\circ$, est une loi de composition interne.

Définition 1.2

Soit $*$ une loi de composition interne. On dit que $*$ est :

- *commutative* si et seulement si $\forall a, b \in E, a * b = b * a$.
- *associative* si et seulement si $\forall a, b, c \in E, a * (b * c) = (a * b) * c$.

Définition 1.3

Soit $*$ une loi de composition interne. Un élément e est dit *neutre* si et seulement si $\forall a \in E, a * e = e * a = a$.

Exemple :

- $(\mathbb{N}, +)$, $+$ commutative et associative, 0 est l'élément neutre.
- $(\mathbb{N}, \times)$, $\times$ commutative et associative, 1 est l'élément neutre.
- $(\mathcal{P}(E), \cup)$, $\cup$ commutative et associative, $\emptyset$ est l'élément neutre.
- Dans $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \circ)$ la loi de composition de deux fonction $\circ$ est une loi associative mais pas commutative. L'application identité id est un élément neutre.

Théorème 1.4

Si $(E, *)$ admet un élément neutre alors il est unique.

Définition 1.5

Un ensemble $(E, *)$ muni de la loi de composition interne associative et admettant un élément neutre est appelé un *monoïde*.

Définition 1.6

On suppose que $(E, *)$ admet un élément neutre e . Soit a un élément de E . On dit qu'un élément $b \in E$ est *symétrique* (ou un *inverse*) de l'élément a si et seulement si :

$$a * b = b * a = e.$$

Théorème 1.7

Soit $(E, *)$ un monoïde. Si $a \in E$ admet un élément symétrique alors il est unique.

Remarque.

Si la loi est multiplicative ($\cdot$), on note a^{-1} l'inverse d'un élément a . Si la loi est additive ($+$), le symétrique de l'élément a est noté $-a$.

1.2 Groupes

Définition 1.8: Groupe

On appelle *groupe* un ensemble G muni d'une loi de composition interne $*$ vérifiant :

1. la loi $*$ est associative ;
2. G possède un élément neutre ;
3. tout élément a de G admet un élément symétrique (ou un élément inverse si la loi est multiplicative).

Si de plus la loi $*$ est commutative, on dit que le groupe est *abélien* (ou commutatif)

Exemple :

$(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}^*, \times)$ sont des groupes commutatifs.

Définition 1.9

Soit $(G_1, *)$ et (G_2, Δ) deux groupes, on appelle homomorphisme de groupes de G_1 dans G_2 toute application $f : G_1 \rightarrow G_2$ tel que

$$f(x * y) = f(x) \Delta f(y)$$

Remarque.

Soient $(G_1, *)$ et (G_2, Δ) deux groupes, d'éléments neutres e_1 et e_2 respectivement. On remarque que si f est un *homomorphisme* de groupes $(G_1, *)$ dans (G_2, Δ) , avec on peut vérifier facilement que

- $f(e_1) = e_2$.
- Si $x \in G_1$, on a $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$.
- $f(G_1)$ est un sous-groupe de G_2 (appelé image de f , notée $Im(f)$) et $f^{-1}(\{e_2\})$ est un sous-groupe de G_1 (appelé noyau de f , notée $Ker(f)$).

On dira que l'homomorphisme f est un *isomorphisme* si f est bijective, si de plus $G_1 = G_2$ on dit que f est un *automorphisme*.

1.3 Anneaux et corps

Définition 1.10: Anneau

Soient $(+)$ et $(\times)$ deux lois de compositions internes sur $\mathbb{K}$. On dit que le triplet $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un *anneau* si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $(\mathbb{K}, +)$ est un groupe abélien, dont e_1 est l'élément neutre,
2. $(\times)$ est associative,
3. $(\times)$ est distributive par rapport à $(+)$,
4. $(\times)$ admet e_2 comme élément neutre,

Si de plus la loi $(\times)$ est commutative, on dit que l'anneau est commutatif.

Définition 1.11: Corps

Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un anneau. On note par e_1 et e_2 les éléments neutres associés aux lois $(+)$ et $(\times)$ respectivement. On dit que le triplet $(\mathbb{K}, +, \times)$ présente une structure d'un *corps* si pour tout élément a de $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{e_1\}$ possède un inverse multiplicatif, noté (a^{-1}) . C'est-à-dire $(\mathbb{K}, \times)$ est un groupe.

Si de plus la loi $(\times)$ est commutative, on dit que le corps est commutatif.

Exemple :

$\mathbb{R}$ muni de l'addition $(+)$ et de la multiplication $(.)$ est un corps commutatif. ■

2 Espace vectoriel ($\mathbb{K}$ -ev)

Cette section a pour objectif de définir rigoureusement la notion d'espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), en formalisant les propriétés de l'addition vectorielle et de la multiplication par un scalaire. Nous explorerons ensuite les sous-structures (sous-espaces) et les outils permettant de décrire ces espaces, notamment les bases et la dimension.

2.1 Espace vectoriel (e.v.) et sous espace vectoriel (s-e.v.)

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif (par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) Soit E un ensemble. On munit E de deux lois de composition :

- La loi interne, notée $+$: $\forall (x, y) \in E^2 : (x + y) \in E$.
- La loi externe, notée $.$: $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : (\lambda.x) \in E$.

Définition 2.1

On dit que le triplet $(E, +, \cdot)$ est un *espace vectoriel* sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ -e.v.) si :

1. $(E, +)$ est un groupe commutatif avec 0_E son élément neutre.
2. La loi externe doit vérifier
 - $\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$.
 - $\forall x \in E, \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2, (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot x = \lambda_1 \cdot x + \lambda_2 \cdot x$.
 - $\forall x \in E, \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2, (\lambda_1 \lambda_2) \cdot x = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot x)$
 - $\forall x \in E, 1 \cdot x = x$.

Exemple :

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. On a $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -e.v. muni des deux lois

1. loi interne : $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\forall y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ on a $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$
2. loi externe : $\forall x \in \mathbb{R}^n$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ on a $\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$

Montrons dans le cas $n = 2$ que $E = \mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$ -e.v.. En effet

- Soit $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1)$$

- Soit $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$(x_1, y_1) + [(x_2, y_2) + (x_3, y_3)] = (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)) = ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3) = [(x_1 + x_2, y_1 + y_2)] + (x_3, y_3) = [(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] + (x_3, y_3).$$

- On suppose qu'il $\exists 0_E = (e_1, e_2) \in E$ élément neutre par rapport à l'addition. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $(x, y) + 0_E = (x, y) + (e_1, e_2) = (x, y)$ donc $x + e_1 = x$ et $y + e_2 = y$ ce qui implique $e_1 = e_2 = 0$ d'où $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$.

- Soient $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, $\exists! (x', y') = (-x, -y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x, y) + (x', y') = (x, y) + (-x, -y) = (0, 0) = 0_{\mathbb{R}^2}$ (d'où $(-x, -y)$ est l'élément symétrique de (x, y)).

- Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot [(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = \lambda \cdot (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (\lambda(x_1 + x_2), \lambda(y_1 + y_2)) = (\lambda x_1 + \lambda x_2, \lambda y_1 + \lambda y_2) = (\lambda x_1, \lambda y_1) + (\lambda x_2, \lambda y_2) = \lambda \cdot (x_1, y_1) + \lambda \cdot (x_2, y_2)$.

- Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot (x, y) = ((\lambda_1 + \lambda_2) \cdot x, (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot y) = (\lambda_1 \cdot x + \lambda_2 \cdot x, \lambda_1 \cdot y + \lambda_2 \cdot y) = (\lambda_1 \cdot x, \lambda_1 \cdot y) + (\lambda_2 \cdot x, \lambda_2 \cdot y) = \lambda_1 \cdot (x, y) + \lambda_2 \cdot (x, y)$.

- Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda_1 \lambda_2) \cdot (x, y) = ((\lambda_1 \lambda_2) \cdot x, (\lambda_1 \lambda_2) \cdot y) = (\lambda_1(\lambda_2) \cdot x, \lambda_1(\lambda_2) \cdot y) = \lambda_1(\lambda_2 \cdot x, \lambda_2 \cdot y) = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot (x, y))$.

- Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $1 \cdot (x, y) = (1 \cdot x, 1 \cdot y) = (x, y)$.

Propriété 2.2

Si E est un $\mathbb{K}$ -e.v., on a :

1. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} \lambda.x = 0_E \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E).$
2. $(-\lambda).x = -(\lambda.x) = \lambda.(-x)$

Proposition 2.3

Soit K un corps commutatif et $E_1, \dots, E_n$ des $\mathbb{K}$ -e.v.. On définit sur $E_1 \times \dots \times E_n$ les lois :

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda.(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

alors $(E_1 \times \dots \times E_n)$ est un $\mathbb{K}$ -e.v.. Le vecteur nul est $(0_{E_1}, \dots, 0_{E_n})$.

Exemple :

Espaces de polynômes

Soit $\mathbb{K}$ un corps. On définit

$$E = \mathbb{K}[X]$$

l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Proposition 2.4

Soit A un ensemble et E un $\mathbb{K}$ -e.v.. On note par $\mathcal{F}(A, E)$ l'ensemble des fonctions de A vers E . On définit alors deux lois sur $\mathcal{F}(A, E)$:

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(A, E), f + g : x \in A \mapsto f(x) + g(x) \in E$$

$$\forall f \in \mathcal{F}(A, E), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda.f : x \in A \mapsto \lambda f(x) \in E$$

alors $\mathcal{F}(A, E)$ est un $\mathbb{K}$ -e.v.. Le vecteur nul est la fonction nulle.

Définition 2.5

Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. et $F \subset E$. On dit que F est *sous-espace vectoriel* (s-e.v.) de E si

- $F \neq \emptyset$.
- $\forall (x, y) \in F^2, (x + y) \in F$ (la loi " + " est stable dans F).
- $\forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda.x \in F$ (la loi "." est stable dans F).

Remarque.

F est un s-e.v. de E si et seulement si $F \neq \emptyset$ (ou $0_E \in F$) et $\forall (x, y) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, (\lambda x + \mu y) \in F \forall (x, y) \in F, (\lambda x + \mu y) \in F$.

Remarque.

- Si F est un s-e.v. du $\mathbb{K}$ -e.v. E , alors $0_E \in F$.
- En effet. Comme $F \neq \emptyset$ donc $\exists x \in E$ tel que $x \in F$ et pour $\lambda = 0 \in \mathbb{K}$ on a $\lambda.x = 0.x = 0_E \in F$.

Proposition 2.6

Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v.. Soient F_1 et F_2 deux s-e.v. de E . Alors $F_1 \cap F_2$ est un s-e.v. de E .

Preuve de la Proposition.

Soient F_1 et F_2 deux s-e.v. de E .

- De la remarque 2.1 on a $0_E \in F_1$ et $0_E \in F_2$ donc $0_E \in F_1 \cap F_2$, ce qui assure $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$.
- Soit $x, y \in F_1 \cap F_2 \Rightarrow x, y \in F_1$ et $x, y \in F_2 \Rightarrow x + y \in F_1$ et $x + y \in F_2 \Rightarrow x + y \in F_1 \cap F_2$.
- Soit $x \in F_1 \cap F_2$, $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\lambda.x \in F_1$ et $\lambda.x \in F_2$ donc $\lambda.x \in F_1 \cap F_2$.

Remarque.

Si E est un $\mathbb{K}$ -e.v., alors les parties $\{0\}$ et E sont toujours des s-e.v. de E .

Exemple :

Dans $\mathbb{R}^2$, les s-e.v. sont : $\{0\}$, $\mathbb{R}^2$, toutes les droites passant par l'origine $F_\alpha = \{(x, \alpha x), x \in \mathbb{R}\}$.

Montrons que F_α est un s-e.v. de $\mathbb{R}^2$. En effet

1. $F_\alpha \neq \emptyset$ car $(0, 0) = 0_{\mathbb{R}^2} \in F_\alpha$.
2. Soit $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in F_\alpha$ donc $y_1 = \alpha x_1$ et $y_2 = \alpha x_2$ et alors on a $y_1 + y_2 = \alpha x_1 + \alpha x_2 = \alpha(x_1 + x_2)$. D'où $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in F_\alpha$.
3. Soient $(x, y) \in F_\alpha$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $y = \alpha x \Rightarrow \lambda y = \lambda(\alpha x) = \alpha(\lambda x)$, donc $\lambda(x, y) \in F_\alpha$.

Exemple :

Dans $\mathbb{R}^3$, tous les plans passant par l'origine $(0, 0, 0)$ sont des s-e.v..

Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 3y - 2z = 0\}$. Montrons que E est un s-e.v. de $\mathbb{R}^3$. En effet

1. $E \neq \emptyset$ car $(0, 0, 0) = 0_{\mathbb{R}^3} \in E$.
2. Soit $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in E$ donc $x_1 + 3y_1 - 2z_1 = 0$ et $x_2 + 3y_2 - 2z_2 = 0$ et alors on a $x_1 + 3y_1 - 2z_1 + x_2 + 3y_2 - 2z_2 = 0 \Rightarrow (x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2) - 2(z_1 + z_2) = 0$. Donc $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in E$.
3. Soient $(x, y, z) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $x + 3y - 2z = 0 \Rightarrow \lambda(x + 3y - 2z) = 0 = (\lambda x) + 3(\lambda y) - 2(\lambda z)$, donc $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in E$.

Exemple :

Soit $\mathbb{K}$ un corps $E = \mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$F_n = \mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leq n\}.$$

Alors F_n est un sous-espace de E .

2.2 Opérations sur les sous-espaces vectoriels

Définition 2.7

Soient F_1 et F_2 deux s-e.v. de E . On appelle *somme des s-e.v.* F_1 et F_2 l'ensemble noté $F_1 + F_2$ et défini par

$$F_1 + F_2 = \{x + y \mid x \in F_1 \text{ et } y \in F_2\}.$$

Théorème 2.8

Soient F_1 et F_2 deux s-e.v. de E . La somme $F_1 + F_2$ est un s-e.v. de E .

Soient F_1 et F_2 deux s-e.v. de E . Montrons que $F_1 + F_2$ est un s-e.v. de E .
En effet

- F_1 et F_2 sont des s-e.v. de E , donc $0_E \in F_1$ et $0_E \in F_2$ par suite $0_E + 0_E = 0_E \in F_1 + F_2$. D'où $F_1 + F_2 \neq \emptyset$.
- Soit $z_1, z_2 \in F_1 + F_2$ donc $\exists x_1, x_2 \in F_1$ et $\exists y_1, y_2 \in F_2$ tels que $z_1 = x_1 + y_1$ et $z_2 = x_2 + y_2$. On a $z_1 + z_2 = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \in F_1 + F_2$ car $x_1 + x_2 \in F_1$ et $y_1 + y_2 \in F_2$.
- Soient $z \in F_1 + F_2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Donc $\exists x \in F_1$ et $\exists y \in F_2$ tels que $z = x + y$. On a $z = x + y \Rightarrow \lambda z = \lambda(x + y) = (\lambda x) + (\lambda y)$, donc $\lambda z \in F_1 + F_2$.

Définition 2.9

Soient F_1 et F_2 deux s-e.v. de E . On appelle *somme directe* de F_1 et F_2 la somme définie et notée

$$F = F_1 \oplus F_2 \Leftrightarrow \begin{cases} F = F_1 + F_2 \\ F_1 \cap F_2 = \{0_E\} \end{cases}$$

Remarque.

Si $F_1 \oplus F_2 = E$, on dit que F_1 et F_2 sont supplémentaires.

Proposition 2.10

$F = F_1 \oplus F_2$ si et seulement si tout élément $x \in F$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$.

Exemple :

Montrons que $F_1 = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \text{ avec } x \in \mathbb{R}\}$ et $F_2 = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ avec } (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$ sont supplémentaires. En effet

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a $(x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, z) \in F_1 + F_2$. Donc $\mathbb{R}^3 = F_1 + F_2$.
2. Soit $(x, y, z) \in F_1 \cap F_2 \Rightarrow (x, y, z) \in F_1$ et $(x, y, z) \in F_2 \Rightarrow y = z = 0$ et $x = 0 \Rightarrow x = y = z = 0$ donc $F_1 \cap F_2 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

2.3 Familles génératrices, familles libres et bases**Définition 2.11**

Soient E un $\mathbb{K}$ -e.v. et $\{x_i\}_{i=1, \dots, n} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) une famille d'éléments de E . On appelle *combinaison linéaire* de la famille $\{x_i\}_{i \in I}$, l'expression

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$$

où $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $\forall i = 1, \dots, n$.

Définition 2.12

On dit que deux vecteurs x_1 et x_2 sont *linéairement indépendant* si

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Définition 2.13

On dit que la famille $\{x_i\}_{i=1, \dots, n}$ est *libre* si

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i x_i = 0_E \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Définition 2.14

On dit que deux vecteurs x_1 et x_2 sont *linéairement liés* si

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0) \quad \text{tel que} \quad \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0_E.$$

Définition 2.15

On dit que la famille $\{x_i\}_{i=1,\dots,n}$ est liée si elle n'est pas libre c'est-à-dire si $\exists(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0)$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E$.

Définition 2.16

La famille $\{x_i\}_{i=1,\dots,n}$ est une *famille génératrice* de E si tout élément de E est une combinaison linéaire de cette famille :

$$\forall x \in E, \exists \lambda_i, i = 1, \dots, n \quad \text{tel que} \quad x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i.$$

Définition 2.17

On dit qu'une famille forme une base de E si elle est libre et génératrice.

Exemple :

La famille $\{(1, 0), (0, 1)\}$ forme une base de $\mathbb{R}^2$

La famille $\{(1, 0), (1, 1)\}$ forme une base de $\mathbb{R}^2$

Remarque.

La famille $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ avec $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, \dots, 1)$ constitue la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

2.4 Espace vectoriel de dimension finie**Définition 2.18**

L'e.v. E est de dimension finie si E admet une famille génératrice de cardinal fini.

Théorème 2.19

Toutes les bases d'un e.v. E ont le même cardinal. Ce cardinal est appelé la dimension de E . On note $\dim E$.

Corollaire 2.20

Dans un e.v. de dimension finie n , on a : Toute famille libre a au plus n éléments. Toute famille génératrice a au moins n éléments.

Exemple :

Soit $e_1 = (1, 1, 0)$, $e_2 = (1, 0, -1)$, $e_3 = (0, 2, 1)$. La famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. ■

Exemple :

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Pour tout entier $n \geq 0$, le s-e.v. $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leq n\}$ de l'e.v. $\mathbb{K}[X]$ est de dimension finie $n + 1$. Sa base canonique est

$$\{1, X, X^2, \dots, X^n\}.$$

Proposition 2.21

Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension n et F un s-e.v. de E :

$$\bullet \dim F \leq \dim E, \quad \bullet \dim E = \dim F \Leftrightarrow F = E.$$

3 Applications linéaires

3.1 Définitions et propriétés

Définition 3.1

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -e.v. ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et f une application de E dans F . On dit que f est *linéaire* si et seulement si $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$,

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$
2. $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

ou bien d'une manière équivalente $\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$. On note par $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

Si $E = F$, l'application linéaire $f : E \rightarrow E$ est dite *endomorphisme*.

Si l'application linéaire $f : E \rightarrow F$ est bijective, elle est dite *isomorphisme*.

Si f est un endomorphisme bijectif alors c'est un *automorphisme*.

Remarque.

■ Si $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire alors $f(0_E) = 0_F$.

Exemple :

L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & f(x, y, z) = (x + 2z, 2y + z, 5x + 2z) \end{array}$ est linéaire.

En effet, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $X = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ et $Y = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} f(\lambda X + \mu Y) &= f(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2) \\ &= ((\lambda x_1 + \mu x_2) + 2(\lambda z_1 + \mu z_2), 2(\lambda y_1 + \mu y_2) + (\lambda z_1 + \mu z_2), 5(\lambda x_1 + \mu x_2) + 2(\lambda z_1 + \mu z_2)) \\ &= \lambda(x_1 + 2z_1, 2y_1 + z_1, 5x_1 + 2z_1) + \mu(x_2 + 2z_2, 2y_2 + z_2, 5x_2 + 2z_2) \\ &= \lambda f(x_1, y_1, z_1) + \mu f(x_2, y_2, z_2) = \lambda f(X) + \mu f(Y) \end{aligned}$$

Exemple :

L'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ n'est pas linéaire car $f(0, 0) = (0, 2) \neq (0, 0)$.

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = (x + 2y, 5x + 2)$$

Exemple :

L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas une application linéaire sur $\mathbb{R}$ car $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ n'est pas toujours vrai, il suffit de prendre par exemple $\lambda = -2$. On a $f(-2 \times 1) = |-2| = 2$ mais $-2f(1) = -2$.

$$x \mapsto f(x) = |x|$$

Exemple :

Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. On a d'une part $f((1, -1) + (-1, 1)) = f(0, 0) = (0, 0)$ et d'autre part $f(-1, 1) + f(1, -1) = (-2, -1) + (2, -1) = (0, -2)$. Puisque $(0, 0) \neq (0, -2)$, donc f n'est pas linéaire.

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = (x - y, xy)$$

Proposition 3.2

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et f une application linéaire de E dans F , alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in E, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, f\left(\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i f(x_i).$$

3.2 Image et noyau d'une application linéaire

Définition 3.3

Soit f une application linéaire de E dans F .

On appelle *image* de f et on note $\text{Im}(f)$ le sous ensemble de F défini par

$$\text{Im}(f) = \{y \in F / \exists x \in E, f(x) = y\}.$$

On appelle *noyau* de f et on note $\text{Ker}(f)$ le sous ensemble de E défini par

$$\text{Ker}(f) = \{x \in E / f(x) = 0_F\}.$$

Théorème 3.4

$\text{Im}(f)$ est un s-e.v. de F et $\text{Ker}(f)$ est un s-e.v. de E .

Proposition 3.5

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -e.v. et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

1. Pour tout s-e.v. E_1 de E , l'image directe $f(E_1)$ est un s-e.v. de F .
2. Pour tout s-e.v. F_1 de F , l'image réciproque $f^{-1}(F_1)$ est un s-e.v. de E .

Preuve de la Proposition.

1. (a) On a $0_E \in E_1$ et $f(0_E) = 0_F$ donc $0_F \in f(E_1)$. Par suite $f(E_1) \neq \emptyset$.
- (b) Soient $y_1, y_2 \in f(E_1)$, donc $\exists x_1, x_2 \in E_1$, tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.

$$y_1 + y_2 = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) \in f(E_1).$$

- (c) Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $y \in f(E_1)$, donc $\exists x \in E_1$, $y = f(x)$.

$$\lambda y = \lambda f(x) = f(\lambda x) \in f(E_1).$$

De (a), (b) et c, on a $f(E_1)$ est un s-e.v. de F .

2. (a) On a $f(0_E) = 0_F \in F_1$ donc $0_E \in f^{-1}(F_1)$. Par suite $f^{-1}(F_1) \neq \emptyset$.
- (b) Soient $x_1, x_2 \in f^{-1}(F_1)$.

$$x_1, x_2 \in f^{-1}(F_1) \Rightarrow f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) \in F_1 \Rightarrow x_1 + x_2 \in f^{-1}(F_1).$$

- (c) Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in f^{-1}(F_1)$.

$$\lambda \in \mathbb{K}, x \in f^{-1}(F_1) \Rightarrow \lambda x \in f^{-1}(F_1) \Rightarrow f(\lambda x) = \lambda f(x) \in F_1 \Rightarrow \lambda x \in f^{-1}(F_1).$$

De (a), (b) et c, on a $f^{-1}(F_1)$ est un s-e.v. de E .

Théorème 3.6

Soit f une application linéaire de E dans F .

1. f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.
2. f est surjective si et seulement si $\text{Im}(f) = F$.

Preuve du Théorème.

1. On suppose que f est injective et soit $x \in \text{Ker}(f)$.

$$x \in \text{Ker}(f) \Rightarrow f(x) = 0_F = f(0_E) \Rightarrow x = 0_E \text{ (car } f \text{ injective)} \Rightarrow \text{Ker}(f) = \{0_E\}.$$

Réciproquement, on suppose que $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$. Soient $x_1, x_2 \in E$, on a

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = 0_F \Rightarrow f(x_1 - x_2) = 0_F \Rightarrow x_1 - x_2 \in \text{Ker } f \Rightarrow x_1 - x_2 = 0_E \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Par suite, f est injective.

2. On a

$$f \text{ est surjective} \Leftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x) \in f(E)$$

c'est-à-dire $F \subset \text{Im}(f)$. Or, il est évident que $\text{Im}(f) \subset F$.

D'où $\text{Im } f = f(E) = F$.

Exemple :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une application linéaire. Définissons f par $f(x, y, z) = (x + 2z, 2y + z, 5x + 2z)$. Déterminons $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im } f$.

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x + 2z, 2y + z, 5x + 2z) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2z = 0 \text{ et } 2y + z = 0 \text{ et } 5x + 2z = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z = 0\} = \{(0, 0, 0)\}. \end{aligned}$$

$\text{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ donc f est injective.

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \{f(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(x + 2z, 2y + z, 5x + 2z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{x(1, 0, 5) + y(0, 2, 0) + z(2, 1, 2) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \langle (1, 0, 5), (0, 2, 0), (2, 1, 2) \rangle = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle. \end{aligned}$$

Donc le sous espace $\text{Im}(f)$ de $\mathbb{R}^3$ est engendré par la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$. Montrons que cette famille est libre.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha(1, 0, 5) + \beta(0, 2, 0) + \gamma(2, 1, 2) = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\gamma = 0 \\ 2\beta + \gamma = 0 \\ 5\alpha + 2\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Donc la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est libre.

Finalement la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\text{Im} f$ et par suite $\dim \text{Im} f = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

Donc $\text{Im} f = \mathbb{R}^3$.

Par suite f est surjective. ■

Proposition 3.7

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -e.v., $f : E \rightarrow F$ une application linéaire et $E_1 \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ un s-e.v. de E , alors

$$f(E_1) = f(\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle) = \langle f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n) \rangle.$$

Preuve de la Proposition.

Soit $y \in f(E_1)$ donc $\exists x \in E_1 \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ tel que $y = f(x)$.

Or, $x \in E_1 \Rightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$. Donc

$$\begin{aligned} y \in f(E_1) &\Leftrightarrow \exists x \in E_1 : y = f(x) \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} : y = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \\ &\Leftrightarrow y \in \langle f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n) \rangle \end{aligned}$$
■

Corollaire 3.8

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Si $\dim E = n$ et $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est une base de E , alors la famille $f(B) = \{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\}$ engendre $\text{Im} f$. Si de plus $f(B)$ est libre alors elle forme une base de $\text{Im} f$.

Exemple :

Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (x + 2z, 2y + z, 5x + 2z)$.

Les images des vecteurs de base canonique sont : $f(1, 0, 0) = (1, 0, 5)$, $f(0, 1, 0) = (0, 2, 0)$ et $f(0, 0, 1) = (2, 1, 2)$, donc d'après le corollaire précédent la famille $\{(1, 0, 5), (0, 2, 0), (2, 1, 2)\}$ est génératrice de $\text{Im} f$. Et du fait que la famille $\{(1, 0, 5), (0, 2, 0), (2, 1, 2)\}$ est libre donc elle forme une base $\text{Im} f$. Par conséquent $\text{Im} f = \mathbb{R}^3$. ■

Proposition 3.9

Soient $f : E \rightarrow F$ une application linéaire et $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une famille d'éléments de E , alors

1. Si A est liée alors $f(A)$ est liée.
2. Si $f(A)$ est libre alors A est libre.
3. Si f est injective et A est libre alors $f(A)$ est libre.

Preuve de la Proposition.

1. Puisque A est liée, donc $\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i x_i = 0_E$. On a $\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i f(x_i) = f\left(\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i x_i\right) = f(0_E) = 0_F$. Donc $f(A)$ est liée.
2. (A est liée $\Rightarrow f(A)$ est liée) $\Leftrightarrow$ ($f(A)$ est libre $\Rightarrow A$ est libre)
3. On suppose que f est injective et A est libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i f(x_i) = 0_F$, donc on a

$$f\left(\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i x_i\right) = 0_F = f(0_E)$$

Or, f est injective, donc $\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i x_i = 0_E$, ce qui implique $\lambda_i = 0 \forall i = 1, \dots, n$ car A est libre. Ce qui montre $f(A)$ est libre. ■

Proposition 3.10

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -e.v. et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors f est bijective si et seulement si toute base B de E , $f(B)$ est une base de F .

Preuve de la Proposition.

Soit E et F deux espaces vectoriels de même dimension finie n , et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Nous montrons l'équivalence entre

$$f \text{ est bijective} \iff \forall \text{ base } B \text{ de } E, f(B) \text{ est une base de } F.$$

$\Rightarrow$ Supposons f bijective. Alors f est un isomorphisme et en particulier injective et surjective.

- **Liberté de $f(B)$.** Soit $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E . Considérons une relation linéaire

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i) = 0_F \quad (\lambda_i \in K).$$

Par linéarité,

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = 0_F.$$

Comme f est injective, son noyau est $\{0_E\}$. Donc $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_E$, et par liberté de B , $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Ainsi $f(B)$ est libre.

- **Génération de F .** Soit $y \in F$. Puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. écrivons

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \quad \alpha_i \in K.$$

Alors, par linéarité,

$$y = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(e_i),$$

ce qui montre que $f(B)$ engendre F .

Comme $f(B)$ est à la fois libre et génératrice dans F et que $\dim F = n$, c'est une base de F .

$\Leftarrow$ Réciproquement, supposons que pour une base $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E , l'ensemble $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ soit une base de F . Alors :

- **Injectivité.** Si $x \in \ker f$, alors $f(x) = 0_F$. écrivons $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. Alors

$$0_F = f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i).$$

Par liberté de $\{f(e_i)\}$, on obtient $\lambda_i = 0$ pour tout i , donc $x = 0_E$. Ainsi $\ker f = \{0_E\}$, et f est injective.

- **Surjectivité.** La base $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ engendre F , donc tout $y \in F$ s'écrit

$$y = \sum_{i=1}^n \beta_i f(e_i), \quad \beta_i \in K.$$

Posons $x = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i \in E$. Alors $f(x) = y$, ce qui prouve que f est surjective.

Puisque f est à la fois injective et surjective, elle est bijective. ■

Proposition 3.11

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -e.v. et $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ deux applications linéaires. Alors $g \circ f : E \rightarrow G$ est une application linéaire.

Preuve de la Proposition.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$, on a

$$\begin{aligned} g \circ f(\lambda x + \mu y) &= g(f(\lambda x + \mu y)) = g(\lambda f(x) + \mu f(y)) = \lambda g(f(x)) + \mu g(f(y)) \\ &= \lambda(g \circ f)(x) + \mu(g \circ f)(y). \end{aligned}$$

Proposition 3.12

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -e.v. et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Si f est un isomorphisme de E dans F , alors f^{-1} est aussi un isomorphisme de F dans E .

Preuve de la Proposition.

Si f est bijective, alors f^{-1} est aussi bijective. Montrons maintenant que f^{-1} est linéaire. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $y_1, y_2 \in F$, on a

$$\begin{aligned} f^{-1}(\lambda y_1 + \mu y_2) &= f^{-1}(\lambda(f \circ f^{-1})(y_1) + \mu(f \circ f^{-1})(y_2)) = f^{-1} \circ f(\lambda f^{-1}(y_1) + \mu f^{-1}(y_2)) \\ &= \lambda f^{-1}(y_1) + \mu f^{-1}(y_2). \end{aligned}$$

3.3 Rang d'une application linéaire

Définition 3.13

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -e.v. et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. On appelle *rang* de f et on note $\text{rg}(f)$ l'entier naturel $\text{rg}(f) = \dim \text{Im}(f)$.

Théorème 3.14: Théorème du rang

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -e.v. de dimensions finies et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors, on a

$$\dim E = \text{rg}(f) + \dim \text{Ker}(f).$$

Remarque.

Le théorème du rang est essentiel, notamment pour la résolution de systèmes linéaires : il permet de déterminer l'existence de solutions, leur unicité ou leur infinité, et d'en décrire la structure. De plus, à partir d'une base du noyau et d'un complément de dimension $\text{rg}(f)$, il garantit la construction d'une base de tout l'espace de départ.

Proposition 3.15

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -e.v. de dimensions finies et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors

1. f est injective $\Leftrightarrow \dim \operatorname{Im}(f) = \dim E$.
2. f est surjective $\Leftrightarrow \dim \operatorname{Im}(f) = \dim F$.

Remarque.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire

1. Si $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$ alors les applications linéaires sont de la forme $f(x) = ax$ avec a constante réelle.
2. Si $E = \mathbb{C}$ et $F = \mathbb{C}$ alors les applications linéaires prennent forme $f(z) = az$ avec a constante complexe.
3. Si $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}$ alors les applications linéaires sont de la forme $f(x, y) = ax + by$ avec a, b des constantes réelles.
4. Si $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}^2$ alors les applications linéaires sont de la forme $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ avec a, b, c, d des constantes réelles.

4 Exercices

Exercice 4.1:

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des s-ev de $\operatorname{ev} \mathbb{R}^3$? $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 4x + y = 3z\}$, $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 = y^2\}$, $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 1\}$.

Exercice 4.2:

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des s-ev de $\operatorname{ev} \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$? $E_1 = \mathcal{C}^n$, $E_2 = \{f \in \mathcal{F} | f(0) = 2f(1)\}$, $E_3 = \{f \in \mathcal{F} | f(0) = 2f(1) + 1\}$, $E_4 = \{f \in \mathcal{F} | \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(1 - x)\}$.

Exercice 4.3:

Soit E un espace vectoriel. Soient F, G, H trois s-ev de E . Montrer que

1. $F \cup G$ est un s-ev de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.
2. Si $G \subset F$ alors $F \cap (G + H) = G + (F \cap H)$.

Exercice 4.4:

Soit dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1, 2, 0)$, $v_2 = (3, 2, 1)$ et $v_3 = (1, -2, 4)$. La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est-elle libre ? Donner une famille libre de $\mathbb{R}^3$ non génératrice et une famille génératrice non libre de E .

Exercice 4.5:

Soit $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, n nombres réels ordonnés. Soit $f_i(x) = \exp(a_i x)$. Montrer que la famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est libre.

Exercice 4.6:

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application définie pour tout vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = (-3x + y + z, x - 3y + z).$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner une base de $\text{Ker}(f)$, en déduire $\dim(\text{Im}(f))$.
3. Donner la base de $\text{Im}(f)$.

Exercice 4.7:

Soit $\mathbb{K}$ un corps ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $E = \mathbb{K}^2$ et $F = \mathbb{K}^3$.

1. Soit $f : E \rightarrow E$
 $(x, y) \mapsto (x + y, 2x - y)$
 - i) Écrire la matrice de l'application f dans la base canonique.
 - ii) Déterminer le noyau et l'image de f .
2. Mêmes questions avec F à la place de E et
 $f : F \rightarrow F$
 $(x, y, z) \mapsto (3x + 2y, 3y + 2z, -4z + 9x)$
3. Écrire cette dernière application dans la base $((0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1))$ (après avoir vérifié que cette dernière famille est une base de F).

Exercice 4.8:

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Montrer qu'il existe un endomorphisme f de E tel que $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f)$ si et seulement si la dimension de E est paire.

RÉFÉRENCES

- [1] K. ALLAB, Élément d'analyse : Fonction d'une variable réelle, Entreprise Nationale du livre 3^{me} Édition, Bd Zirout Youcef Alger, (1990)
- [2] J.-M. MOUNIER, Analyse PC-PSI-PT : Cours, méthodes et exercices corrigés, 5^{me} Édition, DUNOD (2013)
- [3] E.AZOULAY, J.AVIGNANT, G.AULIAC, Les mathématiques en licence 2^{me} année Tome 1, EdiScienc, Dunod, Paris, (2003)

INDEX

- élément neutre, 102
- équivalence $\Leftrightarrow$, 12

- borne inférieure, 34

- anneau, 104
- application, 35
- application bijective, 39
- application composée, 36
- application injective, 38
- application linéaire, 111
- application surjective, 38
- Applications des développements limités
 - Branches infinies, 96
 - Solutions approchées, 94
- Applications des développements limités Maxima et minima, 97
- associative, 101
- automorphisme, 104, 111
- axiome, 14

- Base, 110
- borne supérieure, 34

- Combinaison linéaire, 109
- commutative, 101
- complémentaire, 24
- conjecture, 15
- conjonction, 12
- continue par morceaux, 52
- continuité, 48
- contra-position, 12
- corollaire, 14
- Corps, 104

- Dépendance linéaire, 109
- dérivabilité, 56

- deux fonction équivalentes, 54
- disjonction, 12

- endomorphisme, 111
- espace vectoriel, 105
- exponentielle, 72

- Famille génératrice, 110
- Famille liée, 110
- famille libre, 109
- Fonction arccosinus, 77
- Fonction arcsinus, 76
- Fonction arctangente, 77
- Fonction argument cosinus hyperbolique, 78
- Fonction argument sinus hyperbolique, 78
- fonction dominée, O , 54
- fonction indicatrice, 35
- fonction négligeable o , 54
- fonction puissance, 73
- Formes indéterminées, 47
- Formule de Leibniz, 61
- Formule de Taylor, 84
- Formule de Taylor avec reste intégrale, 86
- Formule de Taylor-Cauchy, 86
- Formule de Taylor-Lagrange, 85
- Formule de Taylor-Maclaurin, 85
- Formule de Taylor-Young, 86

- groupe, 103
- groupe abélien, 103

- homomorphisme, 104

- image, $\text{Im}(f)$, 113
- implication $\Rightarrow$, 12
- Indépendance lineaire, 109
- intersection, 24

isomorphisme, 104, 111

lemme, 15

limite, 44

logarithme, 70

loi de composition interne, 101

majorant, 34

maximum, 34

minimum, 34

minorant, 34

noyau, $\text{Ker}(f)$, 113

partition d'un ensemble, 27

prolongement d'une application, 35

prolongement par continuité, 51

proposition, 11

réunion, 24

raisonnement direct, 17

Raisonnement par absurde, 17

Raisonnement par contre exemple, 17

Raisonnement par récurrence, 18

rang, 118

relation antisymétrique, 30

relation binaire, 28

relation d'équivalence, 31

relation d'ordre, 33

relation dans un ensemble, 29

relation réflexive, 30

relation symétrique, 30

relation transitive, 31

restriction d'une application, 35

somme des s-e.v, 108

Somme directe de deux S-e.v., 108

sous-ensemble, 22

Sous-espace vectoriel, 106

sous-groupe, 103

théorème, 14

Théorème de Rolle, 62

Théorème des accroissement finis, 63

Théorème des valeurs intermédiaires, 50, 51