Série de TD 3 : les fonctions réelles à une seule variable

Exercice 1 : Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$f_1(x) = \sqrt{x-2} + \dfrac{1}{x-1}$. $\qquad f_2(x) = \ln(x^2 - 4x + 4)$.

Exercice 2 : Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$. **2)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos(\dfrac{1}{x}) + \dfrac{x^2+5}{x+2x^2+5}$. **3)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3} - x\right)$.

Exercice 3 : Soit

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x < 1, \\ 2x - 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

a) Étudier la continuité et la dérivabilité de g en $x = 1$.

b) Si possible, prolonger g par continuité sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

a) Déterminer la valeur de a pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

b) Pour $a = 0$ étudier la dérivabilité de f.

Exercice 5 :

a) Montrer que $e^x - 2 = 0$ admet une solution unique sur $[-1, 1]$

b) Vérifier si la fonction $h(x) = x^3 - 3x + 1$ satisfait les conditions du théorème de Rolle sur $[-1, 1]$.

c) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $0 < x < y$:

$$x < \frac{y-x}{ln(y) - ln(x)} < y$$

Exercice 6 : Calculer les limites suivantes à l'aide de la règle de l'Hôpital :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$. **2)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-4x}{e^x}$. **3)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{e^x - 1}$

Exercice 7 :

1) Donner le domaine de définition et les dérivées des fonctions

$$\arcsin(2x), \quad \arccos(x^2), \quad \arctan(3x+1).$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\arctan(x) = \dfrac{\pi}{4}$.

Solutions TD 3 analyse 01 (2025/2026)

1 Exercice 1

1. $f_1(x) = \sqrt{x-2} + \dfrac{1}{x-1}$.

Pour que $\sqrt{x-2}$ soit définie il faut $x - 2 \geq 0$, donc $x \geq 2$.

Pour que $\dfrac{1}{x-1}$ soit définie il faut $x \neq 1$.

Comme $x \geq 2$ implique $x \neq 1$, Donc

$$D_{f_1} = [2, +\infty).$$

2. $f_2(x) = \ln(x^2 - 4x + 4)$.

On remarque $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$. La fonction $\ln(t)$ est définie si et seulement si $t > 0$. alors $(x-2)^2 > 0$, c.-à-d. $x \neq 2$. Donc

$$D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

2 Exercice 2

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$.

On a $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Pour $x \neq 1$, donc

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{x^2+5}{x+2x^2+5}$.

Étudions séparément les deux termes. On a

$$\lim_{x\to +\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \cos(0) = 1.$$

et on a

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+5}{x+2x^2+5} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi la somme tend vers $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

3. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2+3} - x)$.

On élimine la forme $\infty - \infty$ en multipliant par le conjugué :

$$\sqrt{x^2+3} - x = \frac{(\sqrt{x^2+3} - x)(\sqrt{x^2+3} + x)}{\sqrt{x^2+3} + x} = \frac{3}{\sqrt{x^2+3} + x}.$$

Alors $\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+3} - x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2+3}+x} = 0$.

3 Exercice 3

Soit

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x < 1, \\ 2x - 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Calcul des limites en $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 - 2x) = -1, \qquad \lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+} (2x - 1) = 1.$$

et $g(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$.

Les limites à gauche et à droite pas égal, donc g n'est pas continue en 1. Puisqu'une fonction dérivable est nécessairement continue alors, g n'est pas dérivable en 1. et [redacted] donc pas admet prolonger par continuité

4 Exercice 4

Soit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

(a) Continuité en 0

Étudions $\lim_{x \to 0} x^2 \cos(1/x)$. Comme $-1 \leq \cos(1/x) \leq 1$ pour tout $x \neq 0$, on a

$$-x^2 \leq x^2 \cos(1/x) \leq x^2.$$

Or $\lim_{x \to 0} \pm x^2 = 0$. Par le théorème d'encadrement, $\lim_{x \to 0} x^2 \cos(1/x) = 0$. Ainsi la continuité en 0 exige $a = 0$.

(b) Dérivabilité en 0

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cos(1/x) - 0}{x} = \lim_{x \to 0} x \cos(1/x) = 0.$$

Donc $f'(0) = 0$ et f est dérivable en 0.

5 Exercice 5

(a) Existence et unicité de la solution de $e^x - 2 = 0$ sur $[-1, 1]$

Posons $\varphi(x) = e^x - 2$. On a $\varphi'(x) = e^x > 0$ pour tout x, donc φ est strictement croissante (et continue). Calcul des signes aux extrémités :

$$\varphi(-1) = e^{-1} - 2 \approx -1{,}6321 < 0, \qquad \varphi(1) = e - 2 \approx 0{,}7183 > 0.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, φ admet au moins un racine $c \in (-1, 1)$. L'unicité est assurée par strictement croissante .

(b) Applicabilité du théorème de Rolle pour $h(x) = x^3 - 3x + 1$ sur $[-1, 1]$

Calculons $h(-1)$ et $h(1)$:

$$h(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = -1 + 3 + 1 = 3, \qquad h(1) = 1 - 3 + 1 = -1.$$

Comme $h(-1) \neq h(1)$, la condition $h(-1) = h(1)$ requise par le théorème de Rolle n'est pas satisfaite. Donc Rolle n'est pas applicable sur cet intervalle.

(c)

Soit $f(t) = \ln(t)$ sur $[x, y]$ avec $x > 0$. f est continue sur $[x, y]$ et dérivable sur (x, y). Par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in (x, y)$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{\ln(y) - ln(x)}{y - x}.$$

Mais $f'(t) = \dfrac{1}{t}$, d'où

$$\frac{\ln(y) - ln(x)}{y - x} = \frac{1}{c}.$$

Puisque $x < c < y$, $\frac{1}{y} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$ donc $x < \dfrac{y - x}{ln(y) - ln(x)} < y$

6 Exercice 6

Rappel de la condition : L'Hôpital peut être appliquée lorsque l'expression est de forme indéterminée $0/0$ ou ∞/∞.

1.

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$.

Forme ∞/∞. donc

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

2.

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4x}{e^x}$.

Forme ∞/∞. Appliquons L'Hôpital successivement :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 4}{e^x}.$$

La forme reste ∞/∞, appliquons encore L'Hôpital :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 4}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

3.

$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1}$.

Forme $0/0$. alors

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{e^x}.$$

Quand $x \to 0$, $\sin x \to 0$ et $e^x \to 1$, donc la limite vaut 0.

7 Exercice 7

1. $y = \arcsin(2x)$.
Le domaine est donné par $2x \in [-1, 1]$, soit $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

$$\frac{d}{dx} \arcsin(2x) = \frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}, \qquad |x| < \tfrac{1}{2}.$$

2. $y = \arccos(x^2)$.
Ici $x^2 \in [0, 1]$ pour $x \in [-1, 1]$, donc le domaine est $[-1, 1]$. On a

$$\frac{d}{dx} \arccos(x^2) = -\frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}, \qquad |x| < 1.$$

3. $y = \arctan(3x + 1)$.
arctan est définie sur $\mathbb{R}$, donc le domaine est $\mathbb{R}$.

$$\frac{d}{dx} \arctan(3x+1) = \frac{3}{1+(3x+1)^2}.$$

Résoudre $\arctan(x) = \dfrac{\pi}{4}$.
Comme $\tan(\pi/4) = 1$ et arctan est la bijection de $\mathbb{R}$ sur $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, on obtient directement

$$\arctan(x) = \frac{\pi}{4} \iff x = 1.$$