

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université A-Mira de Bejaia
Faculté de Technologie
Département d'Automatique
Télécommunication et d'Electronique

POLYCOPIE DE COURS DU MODULE
COMMANDE AVANCEE

Réalisé par
Docteur LEHOUCHE Hocine

Maître de Conférences classe A
Laboratoire LTII

Les étudiants concernés sont
Les 2^{ème} année master Automatique
Spécialité : Automatique et Informatique Industrielle
-All-

Année universitaire
2025-2026

Table des matières

Avant-propos	1
Partie 1 : Commande optimale	
Chapitre 1 Calcul de la commande optimale	3
1.1 Introduction	3
1.2 Introduction à la théorie d'optimisation	3
1.2.1 Optimisation sans contrainte	4
1.2.2 Optimisation avec contrainte	5
1.3 Calcul des variations	5
1.3.1 Equation d'Euler-Lagrange	6
1.3.2 Prise en compte des conditions initiales et finales	7
1.3.3 Prise en compte des contraintes	7
1.4 Commande optimale	7
1.4.1 Principe d'optimalité de Bellman	8
1.4.2 Principe du maximum de Pontriaguine	9
1.4.3 Lien avec le calcul des variations	11
1.5 Commande bang-bang	11
Chapitre 2 Commande linéaire quadratique	13
2.1 Introduction	13
2.2 Commande LQR des systèmes à temps continu	13
2.2.1 Commande LQ à horizon fini	13
2.2.2 Commande LQ à horizon infini	15
2.2.3 Robustesse de la commande LQ	16
2.2.4 Structure des régulateurs	17
2.2.5 Choix de pondérations	18
2.3 Commande LQ des systèmes à temps discret	19
2.3.1 Commande LQ à temps discret à horizon fini	19
2.3.1.1 Formulation de problème	19
2.3.1.2 Formulation sous forme d'équation de Riccati	20
2.3.2 Commande LQ à temps discret à horizon infini	21
2.4 Problèmes	22
Chapitre 3 Commande Lineaire Quadratique Gaussienne (LQG)	24
3.1 Introduction	24
3.2 Formulation	24
3.3 Principe de séparation	24
3.4 Structure de la commande LQG	24
3.5 Choix des pondérations	25
3.6 Réglage de l'estimateur d'état	25
3.7 Loop Transfert Recovery (LTR)	26
3.8 Commande LQG à temps discret	26

Partie 2 : Commande adaptative

Chapitre 4 Généralités Sur La Commande Adaptative	27
4.1 Introduction	27
4.2 Bref historique	27
4.3 Classification des approches de commande adaptative	28
4.4 Commande à gain programmés (figure 4.1)	28
4.5 Commande adaptative à régulateur auto-ajustable	29
4.6 Commande adaptative par modèle de référence	30
4.7 Applications de la commande adaptative	31
4.6 Références bibliographiques	32
Chapitre 5 Commande Adaptative Auto-Ajustable	32
5.1 Introduction	32
5.2 Identification paramétrique des systèmes dynamiques	32
5.2.1 Définition et principes	32
5.2.2 Les étapes de l'identification	34
5.2.2.1 Acquisition des données entrée/sortie	34
5.2.2.2 Définition d'une classe de modèles	34
5.2.2.3 Algorithmes d'identification récursifs	36
5.2.2.4 Stabilité de l'algorithme d'identification PAA	39
5.2.2.5 Validation des modèles identifiés	40
5.3 Régulateur RST numérique synthèse par placement de pôles	41
5.3.1 Principe de synthèse du régulateur RST	42
5.3.1.1 Les spécifications des performances	43
5.3.1.2 Calcul de la dynamique de régulation	44
5.3.1.3 Calcul de la dynamique de poursuite	46
5.3.1.4 Calcul du régulateur : comment placer les pôles	47
5.4 Problèmes	48
Chapitre 6 Commande Adaptative à Modèle de référence	50
6.1 Introduction	50
6.2 Principe de base	50
6.3 Les méthodes du gradient	51
6.3.1 Règle d'adaptation de MIT	51
6.3.2 Autres critères	51
6.3.3 Normalisation de la règle MIT	55
6.4 Théorie de stabilité	55
6.4.1 Stabilité des systèmes non linéaires à temps continu	55
6.4.2 Stabilité des systèmes linéaires à temps variants	56
6.5 Synthèse de la commande MRAC par la théorie de Lyapunov	57
6.6 Synthèse de la commande MRAC dans l'espace d'état	60

Partie 3 : Commande prédictive

Chapitre 7 Introduction a la commande prédictive	62
7.1 Philosophie de la commande prédictive	62
7.2 Historique de la commande prédictive	62
7.3 Principe de la commande prédictive	64
7.4 Choix du modèle du processus	65
7.5 Paramètres de réglage de la commande prédictive	66
Chapitre 8 Commande predictive generalisee (GPC)	68
8.1 Introduction	68
8.2 Principe de la commande prédictive approche polynomiale (RST)	68
8.2.1 Modèle de représentation du procédé et calcul du prédicteur	69
8.2.2 Critère de performance	69
8.2.3 Synthèse de régulateur RST	70
8.3 Conclusion	72

Références bibliographiques

AVANT-PROPOS

Le cours “ Commande avancée ” a pour but de présenter les aspects théoriques et numériques des différentes parties, ainsi que des applications dans des domaines très divers. La théorie de commande analyse les propriétés des systèmes commandés, c’est-à-dire des systèmes dynamiques sur les- quels on peut agir au moyen d’une commande (ou contrôle). Le but est alors d’amener le système d’un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères. Les systèmes abordés sont multiples : systèmes différentiels, systèmes discrets, systèmes avec bruit, avec retard... Leurs origines sont très diverses : mécanique, électrique, biologie, chimie, ... L’objectif peut être de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations (stabilisation), ou encore de déterminer des solutions optimales et les meilleures performances.

Dans les industries modernes où la notion de rendement est prépondérante, le rôle de l’automaticien est de concevoir, de réaliser et d’optimiser, tout au moins d’améliorer les méthodes existantes. Ainsi les domaines d’application sont multiples aérospatiale, automobile, robotique, aéronautique, internet et les communications en général, mais aussi le secteur médical, chimique, génie des procédés, etc.

La première partie concerne la commande optimale en temps continu et discret. Les problèmes de commande optimale se rencontrent dans la vie de tous les jours : comment arriver à destination le plus rapidement possible, comment minimiser sa consommation... Pour un système dynamique donné et dont les équations sont connues, le problème de commande optimale consiste alors à trouver la commande minimisant un critère donné. C’est sous cette forme que la commande optimale a été étudiée dès le XIX^{ème} siècle avec le calcul des variations. Une des grandes applications de la commande optimale a été l’application au lanceur Apollo dans les années 1960. Notons néanmoins que les difficultés soulevées par ce genre de problème sont loin d’être complètement résolues comme en témoignent les sessions dédiées à la commande optimale dans les conférences d’automatique. La commande optimale reste donc un sujet de recherche d’actualité.

La deuxième partie commence par un exposé d’évolution historique de la commande adaptative et les différentes stratégies directes et indirectes appliquées sur des systèmes linéaires (chapitre 4). Ensuite, l’algorithme d’identification paramétrique à base des moindres carrés récurrents et la méthode de commande polynomiale RST utilisés pour la conception de la

commande adaptative auto-ajustable sont présentés (chapitre 5). Le reste de cette partie est consacré à la commande adaptative à modèle de référence (chapitre 6).

La troisième partie concerne la commande prédictive. Le chapitre 7 présente une introduction à la commande prédictive. Deux types de commande prédictive sont étudiés. Dans le chapitre 8, la commande prédictive généralisée monovariante est étudiée avec application. Le chapitre 9 traite la commande prédictive basée sur le modèle, multivariante, permettant de prendre en compte des contraintes, souvent utilisée dans l'industrie, présentée sous plusieurs formes.

PARTIE I : COMMANDE OPTIMALE

CHAPITRE 1

CALCUL DE LA COMMANDE OPTIMALE

1.1 Introduction

Fréquemment, l'ingénieur en charge des procédés industriels a confronté les problèmes d'optimisation. Un tel problème pourrait être la maximisation de la portée d'un missile ou le profil d'une entreprise, la minimisation de l'erreur d'estimation de la position d'une cible, de l'énergie ou encore le coût exigé pour atteindre le but final. La recherche d'une commande permettant d'atteindre de tels objectifs tout en minimisant, ou bien maximisant, un critère donné à priori, constitue le problème fondamental dans la théorie d'optimisation. On subdivise ce problème en quatre parties :

- 1- Définition de l'objectif,
- 2- Connaissance de la position actuelle par rapport à l'objectif,
- 3- Connaissance de l'influence de l'environnement sur le passé, le présent et le futur,
- 4- Détermination de la meilleure stratégie.

On s'intéressera dans une première partie à la commande optimale telle qu'elle a été posée initialement et dans le cas des systèmes les plus généraux. Dans un second chapitre, on s'intéressera plus particulièrement aux systèmes linéaires dans le cas d'un critère quadratique, cas connu sous le nom de commande linéaire quadratique (LQ), et qui s'exprime sous la forme d'un retour d'état statique. On s'intéressera ensuite à la commande linéaire quadratique gaussienne (LQG) permettant de synthétiser un correcteur dynamique pour un système dont l'état n'est que partiellement mesuré.

1.2 Introduction à la théorie d'optimisation

Soit un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ de variables de décision et soit un critère $J(x)$ à valeur dans \mathbb{R} définie sur $E \subset \mathbb{R}^n$. On note $\Delta J(x) = \frac{dJ(x)}{dx}$ le gradient de la fonction $J(x)$. Il s'agit d'une fonction de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R}^n . La $k^{\text{ème}}$ composante de $\Delta J(x)$ s'écrit $\frac{\partial J(x)}{\partial x_k}$. On note $H(x) = \frac{d^2 J(x)}{dx^2}$ le Hessian de la fonction $J(x)$. Il s'agit d'une fonction de \mathbb{R}^n vers $\mathbb{R}^{n \times n}$. La composante (k, l) de H s'écrit $\frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_k \partial x_l}$.

Définition 1.1 (minimum global) : La fonction $J(x)$ présente un minimum global en $x_0 \in E$ si $J(x) > J(x_0), \forall x \neq x_0$.

Définition 1.2 (minimum local) : la fonction $J(x)$ présente un minimum local en $x_0 \in E$ s'il existe un voisinage V de x_0 tel que $J(x) > J(x_0), \forall x \in V \setminus x \neq x_0$.

1.2.1 Optimisation sans contrainte

Lemme 1.1 (Condition du premier ordre d'existence d'un extremum) :

Si le critère $J(x)$ présente un extrémum en x_0 , alors on a

$$\left. \frac{dJ(x)}{dx} \right|_{x=x_0} = 0 \quad (1.1)$$

Cette équation de premier ordre est une condition nécessaire mais n'est pas suffisante car la connaissance des dérivées d'ordre supérieur sont nécessaires pour conclure à la présence d'un extrémum et à la détermination du type d'extrémum (minimum ou maximum).

Lemme 1.2 (Condition suffisante d'existence d'un extremum) :

Si $\left. \frac{dJ(x)}{dx} \right|_{x=x_0} = 0$ et si $\left. \frac{d^2J(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} > 0$ ⁽¹⁾ alors le critère $J(x)$ présente un minimum en x_0 .

Si $\left. \frac{dJ(x)}{dx} \right|_{x=x_0} = 0$ et si $\left. \frac{d^2J(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} < 0$ alors le critère $J(x)$ présente un maximum en x_0 .

Dans l'hypothèse où les conditions précédentes ne seraient pas satisfaites, il faut étudier les conditions d'ordre supérieures. On est en présence d'un extrémum si la première dérivée non nulle est d'ordre pair.

Exemple 1.1 : On considère la fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $I = [-3, 3]$ dont la courbe représentative est la suivante

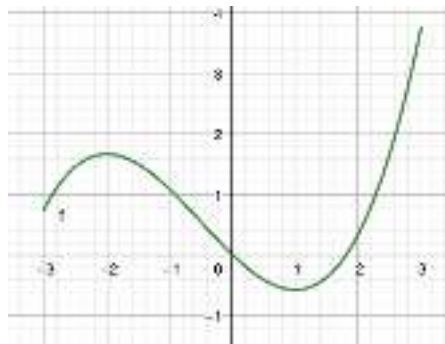


Figure 1.1 : extrémum local et global

f admet un minimum local en -3 : si je choisis l'intervalle $J =]-4, -2[$, alors pour tout $x \in I \cap J = [-3, 2]$ on a $f(x) \geq f(-3)$

- f admet un maximum local en -2

Cette inégalité doit être lue au sens des inégalités matricielles, c'est-à-dire que le Hessien doit être défini positif, ce qui revient aussi à dire que ses valeurs propres sont toutes strictement positives.

- f admet un minimum global, et donc local, en 1
- f admet un maximum global, et donc local, en 3.

1.2.2 Optimisation avec contrainte

Intéressons-nous désormais à la minimisation de $J(x)$ sous la contrainte d'égalité $\varphi(x) = \mathbb{O}_{p \times 1}$. La recherche du minimum se fait par l'introduction d'un vecteur de \mathbb{R}^p appelé Lagrangien et par l'introduction d'un critère modifié

$$\tilde{J}(x, \lambda) = J(x) + \lambda^T \varphi(x) \quad (1.2)$$

Lemme 1.3 (Condition du premier ordre d'existence d'un extremum)

Pour que x_0 soit solution du problème d'extrema sous contrainte ci-dessus, il faut qu'il existe un Lagrangien λ_0 qui satisfasse les conditions suivantes :

$$\frac{\partial \tilde{J}}{\partial x}(x_0, \lambda_0) = \mathbb{O}_{n \times 1} \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \lambda}(x_0, \lambda_0) = \mathbb{O}_{p \times 1} \quad (1.4)$$

Exemple 1 (Minimisation sous contrainte)

Pour $x \in \mathbb{R}^2$, on considère le critère $J(x) = x^T x$ et la contrainte $px = 1$ où $p = [1 \ 1]$. Trouvez la solution du problème de minimisation sous contrainte.

Solution

$$\tilde{J}(x, \lambda) = J(x) + \lambda^T \varphi(x) = x^T x + \lambda(px - 1) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_1 + \lambda x_2 - \lambda$$

Les conditions d'optimalité

$$\frac{\partial \tilde{J}}{\partial x_1}(x_0, \lambda_0) = 2x_1 + \lambda = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}\lambda$$

$$\frac{\partial \tilde{J}}{\partial x_2}(x_0, \lambda_0) = 2x_2 + \lambda = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2}\lambda$$

$$\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \lambda}(x_0, \lambda_0) = x_1 + x_2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

Le point (0.5, 0.5, -1) est un point critique.

La matrice Hessienne

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{les mineurs } h_1 = 2, h_2 = 4, h_3 = \det(H) = -4$$

La matrice hessienne est indéfinie

1.3 Calcul des variations

Le calcul des variations est la base des méthodes de la commande optimale. Dans ce paragraphe, nous nous contentons de donner un exemple introductif. Dans ce cas, l'inconnue n'est plus un scalaire ni un vecteur, mais une fonction. Autrement dit, la solution du problème est cherchée dans un espace de dimension infinie.

On cherche une fonction $x(t)$ minimisant une intégrale de la forme :

$$J(x) = \int_a^b \varphi(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad (1.5)$$

Notons $x^*(t)$ la fonction optimale qui doit vérifier :

$$J(x) \geq J(x^*) \quad \forall x$$

L'argument de J est une fonction, on qualifie souvent J de fonctionnelle, c'est-à-dire de fonction. En notant δx une petite variation de la fonction x , et $\delta \dot{x}$ la variation de sa dérivée correspondante, on a :

$$\begin{aligned} J(x + \delta x) &\cong \int_a^b \left(\varphi(x(t), \dot{x}(t), t) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t) \delta x \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) \delta \dot{x} \right) dt \end{aligned} \quad (1.6)$$

Pour la trajectoire optimale, il faut que $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t) \delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) \delta \dot{x}$ soit nul tout au long de la trajectoire.

1.3.1 Equation d'Euler-Lagrange

Lemme 1.4 : la fonction optimale $x(t)$ vérifie l'équation suivante

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (1.7)$$

Dans le cas où φ ne dépend pas explicitement de t , la formule d'Euler-Lagrange se reformule de la manière suivante :

Lemme 1.5 (Formule de Beltrami) : La fonction optimale $x(t)$ vérifie l'équation suivante :

$$\varphi - \dot{x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}} \right) = k \quad (1.8)$$

Où k est une constante.

Démonstration :

On a

$$\frac{d}{dt} \left(\varphi - \dot{x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}} \right) \right) = 0 \Rightarrow \dot{x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}} \right) \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}} \right) = 0$$

Le résultat du lemme 1.5 est vérifié

1.3.2 Prise en compte des conditions initiales et finales

Les conditions initiales et finales peuvent être libres ou imposées. On peut imposer l'instant et/ou la valeur de la fonction x . Considère un critère intégrant éventuellement une pénalité sur les conditions initiales et finales, la forme :

$$J(a) = \int_a^b \varphi(x(t), \dot{x}(t), t) dt + \psi(a, b, x(a), x(b)) \quad (1.9)$$

Les conditions correspondantes, appelées conditions de transversalité, s'écrivent :

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}}(a) - \frac{\partial \psi}{\partial x(a)} \right) \delta x(a) + \left(\varphi(a) - \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}}(a) \dot{x}(a) - \frac{\partial \psi}{\partial a} \right) \delta a = 0 \quad (1.10)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}}(b) + \frac{\partial \psi}{\partial x(b)} \right) \delta x(b) + \left(\varphi(b) - \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}}(b) \dot{x}(b) + \frac{\partial \psi}{\partial b} \right) \delta b = 0 \quad (1.11)$$

$\varphi(a) = \varphi(x(a), \dot{x}(a), a)$ et $\varphi(b) = \varphi(x(b), \dot{x}(b), b)$ pour alléger l'écriture.

Exemple 1.2 : déterminer la trajectoire $x(t)$ optimale minimisation le critère

$\int_a^b (t\dot{x}(t) + \dot{x}^2(t)) dt$ avec $a = 0, x(a) = 1, x(b) = 5$ et b libre.

1.3.3 Prise en compte des contraintes

Considérant le cas d'une minimisation du critère (1.2) avec les contraintes suivantes :

- Contrainte intégrale : $\int_a^b r(x, \dot{x}, t) dt = 0, r \in \mathbb{R}^r$
- Contrainte instantanée $s(x, \dot{x}, t) = 0, s \in \mathbb{R}^s$

La résolution se fait en introduisant les multiplieurs de Lagrange $\lambda \in \mathbb{R}^r$ et $\mu(x) \in \mathbb{R}^s$ et en substituant à la fonction φ l'Hamiltonien

$$H(x, \dot{x}, t, \lambda, \mu) = \varphi(x, \dot{x}, t) + \lambda^T r(x, \dot{x}, t) + \mu^T s(x, \dot{x}, t) \quad (1.12)$$

L'équation d'Euler-Lagrange est inchangée

$$\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (1.13)$$

1.4 Commande optimale

Plutôt que de présenter de manière approfondie le problème de la commande optimale, cette partie constitue plutôt une introduction au sujet. Le choix a été fait de présenter un résultat s'appuyant sur le principe du *maximum de Pontriaguine*. Pour approfondir ce domaine.

Position de problème

Soit un système à temps continu de représentation d'état :

$$\dot{x} = f(x, u, t) \text{ et } x(t_0) = x_0 \text{ où } t \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}^m \text{ et } x \in \mathbb{R}^n \quad (1.14)$$

Pour la condition initiale x_0 et la commande u , l'équation d'état (1.14) définit une trajectoire unique x pour l'état sur $[t_0, t_f]$. Celle-ci est fonction de la condition initiale x_0 et de la commande u sur $[t_0, t_f]$.

Soit le critère :

$$J(x_0, t_0, u) = \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \varphi(x, u, t) dt \quad (1.15)$$

Avec $x_f = x(t_f)$. Les fonctions θ et φ ainsi que les instants t_0 et t_f étant donnés, ce critère ne dépend que de x_0 et de u sur $[t_0, t_f]$. L'application qui au signal de commande u associe le critère scalaire $J(x_0, t_0, u)$ est une fonctionnelle. On peut noter que différents critères existent dans la littérature :

- *Le problème de Lagrange* : $\int_{t_0}^{t_f} \varphi(x, u, t) dt$
- *Le critère de Bolza* : $\theta(x_f) + \int_{t_0}^{t_f} \varphi(x, u, t) dt$
- *Le critère de Mayer* : $\sigma(x_f, t_f)$

Remarque :

- L'instant final peut être imposé ou libre
- La commande peut appartenir à un ensemble $u \in \mathbb{U} \neq \mathbb{R}^m$
- Des contraintes peuvent exister sur l'état final : $x_f \in \chi$

Le problème de la commande optimale consiste alors à trouver la commande \tilde{u} minimisant $J(x_0, t_0, u)$:

$$\tilde{u} = \min_{u \in \mathbb{U}} J(x_0, t_0, u) \quad (1.16)$$

On notera alors \tilde{x} la trajectoire correspondante de l'état et $\tilde{J}(x_0) = J(x_0, t_0, \tilde{u})$ la valeur du critère.

1.4.1 Principe d'optimalité de Bellman

Soit le critère :

$$J(x_0, t_0, u) = \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \varphi(x, u, t) dt \quad (1.17)$$

La trajectoire optimale sur $[t_0, t_f]$ est \tilde{u} et le critère optimal :

$$\tilde{J}(x_0, t_0) = \min_{u_{[t_0, t_f]}} J(x_0, t_0, u) \quad (1.18)$$

Soit $t_1 \in [t_0, t_f]$. Le principe d'optimalité de Bellman énonce que la trajectoire optimale sur $[t_0, t_f]$ contient la trajectoire optimale sur $[t_1, t_f]$ avec comme condition initiale $x_1 = x(t_1)$.

Autrement dit :

$$\tilde{J}(x_0) = \min_{u_{[t_0, t_f]}, x_1} \left(\int_{t_0}^{t_1} \varphi(x, u, t) dt + \tilde{J}(x_1) \right) \quad (1.19)$$

Bien que les développements suivants ne s'appuient pas directement sur ce principe, mais sur le principe du maximum, ce principe est un résultat classique de la commande optimale et se trouve souvent utilisé dans la littérature. Il permet d'obtenir une solution optimale en découpant l'intervalle et en résolvant un problème récursif.

1.4.2 Principe du maximum de Pontriaguine

Soit un système d'équation d'état $\dot{x} = f(x, u, t)$

Le critère de performance $J(x_0, t_0, u) = \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \varphi(x, u, t) dt$

On définit l'Hamiltonien du système

$$H(x, u, \lambda, t) = \varphi(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t) \quad (1.20)$$

Où λ est appelé état-adjoint. Le principe du minimum de Pontriaguine énonce que la trajectoire optimale minimise l'Hamiltonien du système. Autrement dit :

$$H(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{\lambda}) \leq H(\tilde{x}, u, \tilde{\lambda}) \quad \forall u \in \mathbb{U} \quad (1.21)$$

Le long de la trajectoire optimale, on dispose d'un certain nombre d'équations permettant de résoudre le problème de commande optimale. Ces équations sont généralement établies en utilisant le calcul des variations.

1) L'extrémité de la solution conduit à un jeu d'équations, appelées équations canoniques de Hamilton, qui régissent les dynamiques de l'état d'une part et de l'état adjoint d'autre part :

- Etat

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{x} \quad (1.22)$$

- Etat adjoint

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{\lambda} \quad (1.23)$$

2) Les équations provenant des conditions dites terminales, en t_0 d'une part et en t_f d'autre part sont appelées équations de transversalité :

- À l'origine

$$\left(-H(t_0) + \frac{\partial \theta}{\partial t_0} \right) \delta t_0 + \left(\lambda(t_0) + \frac{\partial \theta}{\partial x_0} \right)^T \delta x_0 = 0 \quad (1.24)$$

- À l'arrivée

$$\left(H(t_f) + \frac{\partial \theta}{\partial t_f} \right) \delta t_f + \left(-\lambda(t_f) + \frac{\partial \theta}{\partial x_f} \right)^T \delta x_f = 0 \quad (1.25)$$

3) Enfin, selon la nature du problème, on aura encore certaines relations additionnelles :

- Si aucune contrainte (de type saturation) n'est imposée sur $u(t)$ à l'instant t , on a :

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t) = 0 \quad (1.26)$$

Si H n'est pas une fonction explicite du temps, on a :

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (1.27)$$

1.4.3 Lien avec le calcul des variations

Il s'agit d'un problème d'optimisation sous contrainte égalité $f(x, u, t) - \dot{x} = 0$. En appuyant sur le calcul des variations, on est amené à introduire un multiplicateur de Lagrange λ , qui est une fonction du temps, et à introduire l'Hamiltonien.

$$H(x, u, \lambda, t) = \varphi(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t)$$

Le critère s'écrit alors

$$\begin{aligned} \tilde{J} &= \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (\varphi(x, u, t) + \lambda^T (f(x, u, t) - \dot{x})) dt \\ &= \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (H(x, u, \lambda, t) - \lambda^T \dot{x}) dt \\ &= \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (H(x, u, \lambda, t) + \dot{\lambda}^T x) dt - \lambda_f^T x_f + \lambda^T(t_0) x_0 \\ &= \tilde{\theta}(x_0, t_0, x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (H(x, u, \lambda, t) + \dot{\lambda}^T x) dt \\ &\quad \searrow \\ &\quad \theta(x_f, t_f) - \lambda_f^T x_f + \lambda^T(t_0) x_0 \end{aligned} \quad (1.28)$$

Le calcul des variations permet de donner des conditions nécessaires pour résoudre ce problème.

1.4.4 Equation d'Euler-Lagrange

L'équation d'Euler-Lagrange, bien connue en mécanique, peut être retrouvée à partir du principe du minimum. En notant T , l'énergie cinétique et U l'énergie potentielle d'un système mécanique, le principe de moindre action énoncé par Maupertuis postule que le système évolue en minimisant l'intégrale :

$$\int_{t_0}^{t_f} (T - U) dt \quad (1.29)$$

Notons q les coordonnées généralisées du système. Soit $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$ le lagrangien, avec le critère :

$$J(q_0, t_0, \dot{q}) = \int_{t_0}^{t_f} L(q, \dot{q}) dt \quad (1.30)$$

Exemple

On considère un système dont on commande la vitesse, l'équation d'état du système s'écrivant alors simplement :

$$\dot{q} = u$$

L'Hamiltonien s'écrit alors :

$$H(q, \dot{q}, \lambda) = L(q, \dot{q}) + \lambda^T \dot{q}$$

Et le principe du minimum donne les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q} &= \frac{\partial L}{\partial q} = -\dot{\lambda} \\ \frac{\partial H}{\partial \dot{q}} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \lambda = 0 \end{aligned}$$

En dérivant la seconde équation par rapport au temps puis en remplaçant λ grâce à la première, on obtient l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (1.31)$$

1.5 Commande bang-bang

Un type de commande optimal particulier bien connu est la commande à temps minimal. Prenons un exemple : vous commandez l'accélération d'un véhicule que vous devez amener d'une position initiale d'arrêt à une position finale, également à l'arrêt, dans le temps le plus court possible. Si l'on considère un mouvement en ligne droite, on conçoit intuitivement que la commande optimale est dans ce cas une accélération maximale jusqu'à un certain instant à partir duquel il faudra freiner au maximum.

On parle de commande bang-bang parce que la commande est toujours saturée, alternativement à sa valeur minimale ou à sa valeur maximale. Quant à la robustesse de la commande, c'est-à-dire la capacité à remplir la mission de manière précise, lorsque la masse du véhicule est imparfaitement estimée, vous imaginez bien que ce genre de commande n'est

pas très recommandable. Pour un exemple de ce type de commande. Un exemple complet de commande en temps minimal sera traité : Celui du double intégrateur.

1.6 Problèmes

Problème N°1

Calculer la commande optimale amenant le système d'un état initial $x(t_0) = x_0$ à l'état final $x_f = 0$, en temps minimal. En minimisant la fonction $J = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt$

Pour le système $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, lorsque $-1 \leq u \leq 1$.

Application au système intégrateur double $\ddot{y} = u$ (on posera $t_0 = 0$ pour simplifier).

Problème N°2: On considère le système linéaire du premier ordre :

$$\dot{x}(t) = u$$

Partant de l'état initial donné $x(0) = x_0$. Appliquer le principe du maximum pour résoudre les problèmes suivants.

$$J = \int_0^T \frac{1}{2} (u^2(t) + \omega^2 x^2(t)) dt$$

- 1) Au bout du temps T donné, amener le système en $x(T) = 0$, tout en minimisant le critère.
- 2) Même problème, mais $x(T)$ est laissé libre.
- 3) Même problème, mais on considère le critère

$$J = \int_0^T \frac{1}{2} (u^2(t) + \omega^2 x^2(t)) dt + \frac{1}{2} x^2(T)$$

Afin d'amener $x(T)$ au voisinage de 0

- 4) Critère identique à la question 2), mais avec une durée T qui est laissée libre.

Pour les questions 1 à 3 on expliquera ce que devient la commande en boucle fermée quand $t \rightarrow T$ et t fini quand $T \rightarrow \infty$

CHAPITRE 2

COMMANDE LINEAIRE QUADRATIQUE

2.1 Introduction

On parle de commande linéaire quadratique : LQ ou LQR (Linear Quadratic Regulator). Le système est linéaire et la commande est quadratique. La commande optimale est un retour d'état.

2.2 Commande LQR des systèmes à temps continu

2.2.1 Commande LQ à horizon fini

Soit le problème de commande optimale du système :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (2.1)$$

Avec le critère

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2}x_f^T S x_f + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2}(x^T Q(t)x + u^T R(t)u)dt \quad (2.2)$$

Les matrices Q, R , et S étant symétriques avec Q et $S \geq 0$ et $R > 0$

Remarque : Remarquons que le critère $\int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2}(y^T Q_y(t)y + u^T R u)dt$ est équivalent à celui de l'équation (2.2) avec $Q(t) = C^T(t)Q_y(t)C(t)$

L'Hamiltonien s'écrit alors :

$$H(x, u, \lambda, t) = \underbrace{\lambda^T A(t)x + \lambda^T B(t)u}_{\lambda^T f(x,u,t)} + \underbrace{\frac{1}{2}(x^T Q(t)x + u^T R u)}_{\varphi(x,u,t)} \quad (2.3)$$

L'Hamiltonien vérifie les conditions suivantes :

- Equation de l'état adjoint

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -A^T(t)\lambda - Q(t)x \quad (2.4)$$

- Condition de transversalité

$$\lambda(t_f) = S x_f \quad (2.5)$$

- Absence de contrainte sur la commande

$$\frac{\partial H}{\partial u} = B^T(t)\lambda + R(t)u = 0 \quad (2.6)$$

On déduit $u = -R^{-1}(t)B^T(t)\lambda$

$$\dot{x} = A(t)x - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\lambda \quad (2.7)$$

Les équations (2.4) et (2.7) peuvent se mettre sous la forme d'un système matriciel appelé *système Hamiltonien* :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -Q(t) & -A^T(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Avec $\lambda = P(t)x$, comme nous y avons avec la condition finale $P(t_f) = S$, l'équation (2.4) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= -(A^T(t)P(t) + Q(t))x \\ \dot{\lambda} &= \dot{P}(t)x + P(t)\dot{x} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Alors

$$(\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) + Q(t))x = 0 \quad (2.10)$$

La solution est alors obtenue en résolvant l'équation (différentielle) de **Riccati** suivante :

$$\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) + Q(t) = 0 \quad (2.11)$$

Avec la condition finale $P(t_f) = S$, on montre que la condition :

$$x^T(\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q)x = 0 \quad (2.12)$$

S'écrit aussi :

$$\frac{d}{dt}(x^T P x) + x^T Q x + u^T R u = 0 \quad (2.13)$$

Le critère :

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2}x_f^T S x_f + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2}(x^T Q(t)x + u^T R(t)u)dt \quad (2.14)$$

S'écrit alors :

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2}(x_f^T S x_f - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}(x^T P x)dt)$$

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2}x_0^T P(t_0)x_0$$

Le minimum du critère est donc

$$J(x_0, t_0, \tilde{u}) = \tilde{J}(x_0) = \frac{1}{2}x_0^T P(t_0)x_0 \quad (2.15)$$

Il est intéressant de noter que la commande optimale obtenue s'écrit comme un retour d'état $u = -K(t)x$ avec :

$$K = R^{-1}B^T P \quad (2.16)$$

Néanmoins, n'oublions pas que, dans le cas présent, K varie en fonction du temps, même dans le cas d'un système et d'un critère à temps invariant (c'est-à-dire si les matrices A , B , Q et R ne dépendent pas du temps). En effet, la matrice $P(t)$ reste dépendant du temps dans le cas d'un critère à temps fini.

2.2.2 Commande LQ à horizon infini

Nous intéressons ici au cas du système linéaire à temps variant précédent où :

$$J(x_0, t_0, u) = \int_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{2} (x^T Q(t)x + u^T R(t)u) dt \quad (2.17)$$

On montre que ce critère est fini si le système est **stabilisable** à tout instant t , (c'est-à-dire qu'à chaque instant, il existe un $K(t)$ tel que les valeurs propres de $(A - BK(t))$ soient à partie réelle négative). Remarquons par ailleurs que la partie du critère concernant l'état final n'est plus pertinente car, sur un horizon infini, l'état tend vers zéro si le système bouclé est stable. Dans le cas d'un problème **LTI** (linéaire à temps invariant), la commande optimale est un retour d'état statique $u = -Kx$ où K est exprimé par l'équation (2.16) où P vérifie l'équation algébrique de **Riccati** :

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (2.18)$$

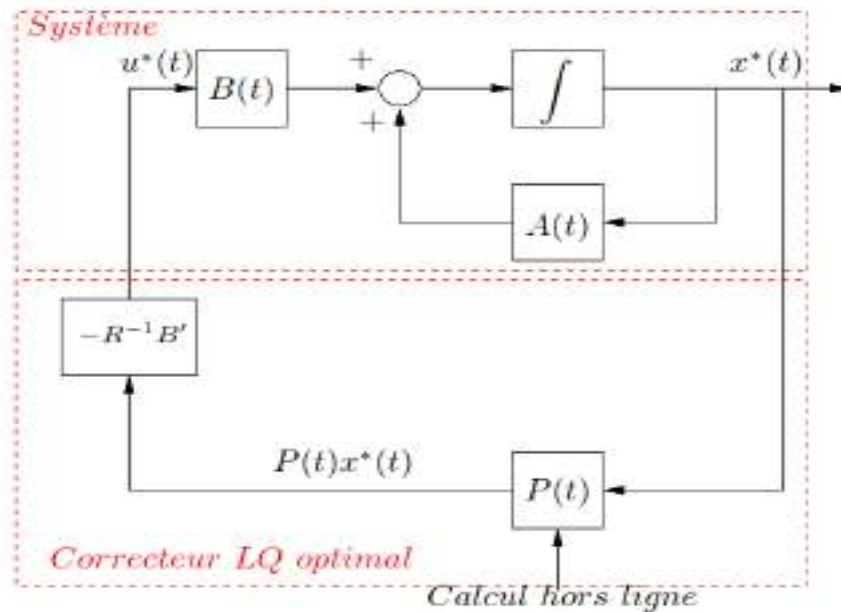


Figure 2.1: Shéma bloc de la commande LQR des systèmes continus

2.2.3 Robustesse de la commande LQ

A partir de l'équation de Riccati, faisons apparaître les termes $sI - A$ en ajoutant $(PsI - sIP)$ où I est la matrice unité.

$$P(sI - A) + (-sI - A^T)P + PBR^{-1}B^TP = Q \quad (2.19)$$

Multipliant à droite par $(sI - A)^{-1}B$ et à gauche par $B^T(-sI - A^T)^{-1}$:

$$\begin{aligned} B^T(-sI - A^T)^{-1}PB + B^TP(sI - A)^{-1}B + B^T(-sI - A^T)^{-1}PBR^{-1}B^TP(sI - A)^{-1}B \\ = B^T(-sI - A^T)^{-1}Q(sI - A)^{-1}B \end{aligned} \quad (2.20)$$

En notant que d'après (2.16), on a $B^TP = RK$ et $PB = K^TR$, on obtient :

$$\begin{aligned} B^T(-sI - A^T)^{-1}K^TR + RK(sI - A)^{-1}B + B^T(-sI - A^T)^{-1}K^TRK(sI - A)^{-1}B \\ = B^T(-sI - A^T)^{-1}Q(sI - A)^{-1}B \end{aligned} \quad (2.21)$$

Le premier membre de l'égalité s'écrit : $(I + B^T(-sI - A^T)^{-1}K^T)R(I + K(sI - A)^{-1}B) - R$

On obtient finalement l'équation de la différence de retour :

$$\begin{aligned} (I + B^T(-sI - A^T)^{-1}K^T)R(I + K(sI - A)^{-1}B) = \\ R + B^T(-sI - A^T)^{-1}Q(sI - A)^{-1}B \end{aligned} \quad (2.22)$$

2.2.4 Marges de stabilité

Reprenons l'équation de la différence de retour en fréquentiel avec $s = j\omega$ et en notant $H(j\omega) = (j\omega I - A)^{-1}B$. On obtient alors pour tout ω :

$$(I + KH(j\omega))^H R (I + KH(j\omega)) = R + H(j\omega)^H Q H(j\omega) \quad (2.23)$$

Où N^H est l'hermitien de N , c'est-à-dire le conjugué transposé. On déduit alors l'inégalité de Kalman :

$$(I + KH(j\omega))^H R (I + KH(j\omega)) \geq R \quad (2.24)$$

Nous restreignons au cas $R = \rho I$ et factorisons Q en $Q = LL^T$. L'égalité (2.23) s'écrit alors :

$$(I + KH(j\omega))^H (I + KH(j\omega)) = I + \frac{1}{\rho} (LH(j\omega))^H (LH(j\omega)) \quad (2.25)$$

Dont on déduit les valeurs singulières de $(I + KH(j\omega))$

$$\begin{aligned} \sigma_i(I + KH(j\omega)) &= \sqrt{\lambda_i \left((I + KH(j\omega))^H (I + KH(j\omega)) \right)} \\ \sigma_i(I + KH(j\omega)) &= \sqrt{\lambda_i \left(I + \frac{1}{\rho} (LH(j\omega))^H (LH(j\omega)) \right)} \end{aligned}$$

La marge de module on en déduit

$$\sigma_i(I + KH(j\omega)) = \sqrt{1 + \frac{1}{\rho} \sigma_i^2(LH(j\omega))} \geq 1 \quad (2.26)$$

Où λ_i représente la $i^{\text{ème}}$ valeur propre (en utilisant les propriétés $\sigma_i^2(N) = \lambda_i(N^H N)$ et $\lambda_i(I + N) = 1 + \lambda_i(N)$). En mono-variable, ce résultat s'interprète facilement sur le lieu de Nyquist, comme le fait que la distance au point -1 est toujours supérieure à 1. Ainsi, la commande LQ présente la propriété de robustesse suivante : sa marge de module est égale à 1. On en déduit ainsi les intervalles dans lesquels le gain et la phase peuvent varier :

- Le gain $]0.5; +\infty[$
- La phase $] -60^\circ; +60^\circ[$

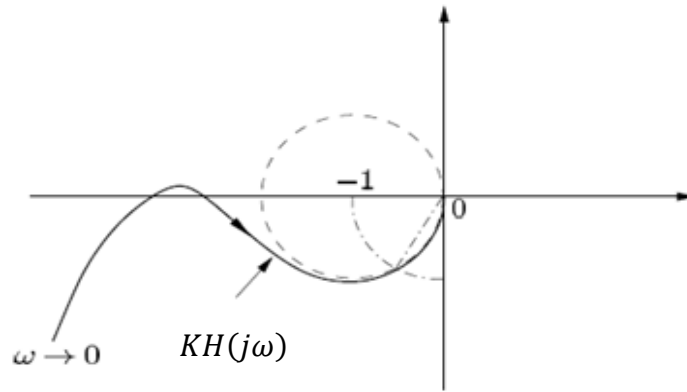


Figure 2.2 : Lieu de Nyquist de la fonction de transfert de boucle LQ.

2.2.5 Structure des régulateurs

Lorsque des signaux de consigne y^* sont donnés pour certaines composantes y de x , comment les intégrer à la loi de commande ? Imaginons que les consignes concernent les premières composantes de x et décomposons x et K ainsi :

$$Kx = [K_y \ K_z] \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Alors la loi de commande sera

$$u = K_y(y^* - y) - K_z z \quad (2.28)$$

Si y est donné par une loi de type équation de sortie, $y = Cx$, on peut effectuer un changement d'état de sorte que le nouveau vecteur d'état contienne y , par exemple en utilisant la forme canonique d'observabilité.

La commande LQ est de type proportionnel. Dans le but d'améliorer les performances en régulation en présence de perturbations constantes, il est souhaitable d'ajouter un effet intégral.

Imaginons, à titre d'exemple, que la première composante x_1 de x doit être asservie à x_1^* sans erreur statique.

Construisons l'état supplémentaire :

$$I_1 = \int_0^t (x_1(\tau) - x_1^*(\tau)) d\tau \quad (2.29)$$

Avec $\dot{I}_1 = x_1 - x_1^*$

En considérant x_1^* comme une perturbation constante et de ce fait, en ne l'intégrant pas dans le modèle, l'équation d'état du système augmenté de son nouvel état I_1 s'écrit :

$$\dot{x}_e = A_e(t)x_e - B_e(t)u \quad (2.30)$$

$$x_e = \begin{bmatrix} x \\ I_1 \end{bmatrix}, \quad A_e = \begin{bmatrix} A & \mathbb{O}_{n \times 1} \\ [1 \ \mathbb{O}_{1 \times n-1}] & 0 \end{bmatrix}, \quad B_e = \begin{bmatrix} B \\ \mathbb{O}_{1 \times m} \end{bmatrix}$$

$$K_e x_e = [K \ K_I] \begin{bmatrix} x \\ I_1 \end{bmatrix}, \quad K_e \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)} \text{ de type } LQ$$

Le régulateur obtenu, d'entrées x et x_1^* et de sortie u est un système dynamique d'ordre 1 de modèle d'état.

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = x_1 - x_1^* \\ u = -K_I I_1 - Kx \end{cases} \quad (2.31)$$

La consigne x_1^* peut aussi être retranchée à x_1 ; d'autres consignes peuvent être intégrées de la même manière en retranchant leur valeur à l'état correspondant. Si une commande en boucle ouverte (feed-forward) est disponible, elle peut être également intégrée, la commande sera alors la somme de la commande en boucle fermée et de la commande en boucle ouverte.

Remarques

- La matrice de Riccati $P(t)$ est une matrice symétrique variant dans le temps indépendant de l'instant initial ($t_0 = 0$).
- L'équation de Riccati constitue un système de $n(n+1)/2$ équations différentielles ordinaires non linéaires du premier ordre variant dans le temps
- La matrice de Riccati $P(t)$ est une matrice définie positive sur $[0, t_f)$
- La matrice $P(t)$ peut être calculée hors ligne par intégration numérique arrière à partir de $P(t_f) = Q_f$.

2.2.6 Choix de pondérations

Il est intéressant de remarquer d'abord que la multiplication des pondérations Q et R par un même scalaire laisse inchangé le gain K . En effet, soit P solution de l'équation de Riccati (et

soit le nouveau problème basé sur les pondérations $\hat{Q} = \lambda Q$ et $\hat{R} = \lambda R$. On vérifie que $\hat{P} = \lambda P$ est solution de l'équation de **Riccati** correspondante. En effet :

$$\hat{K} = -\hat{R}^{-1}B^T\hat{P} = -R^{-1}B^TP = K$$

Sans restriction, les pondérations peuvent être choisies symétriques. Elles sont généralement choisies diagonales. Ainsi, on se ramène au choix de n scalaires pour l'état et de p scalaires pour la commande. Voici une méthode simple de choix et de modification des pondérations en vue d'aboutir à un correcteur satisfaisant.

1. Au départ, on choisit généralement des pondérations égales aux matrices identité.
2. Dans une seconde étape, on accélère ou décélère globalement le système en multipliant la matrice Q par un scalaire λ (accélération avec $\lambda > 1$ et décélération avec $\lambda < 1$), jusqu'à obtenir une dynamique moyenne adaptée.
3. Dans le cas où certains états auraient des dynamiques trop lentes par rapport à d'autres, on peut choisir d'augmenter la pondération de Q correspondant aux premiers.
4. Dans le cas où certains actionneurs seraient trop sollicités par rapport à d'autres, on peut choisir d'augmenter la pondération de R leur correspondant.

Les étapes 2, 3 et 4 peuvent être réitérées dans l'ordre souhaité jusqu'à obtenir un correcteur satisfaisant le cahier des charges.

2.3 Commande LQ des systèmes à temps discret

2.3.1 Commande LQ à temps discret à horizon fini

2.3.1.1 Formulation de problème

Soit le système dynamique à temps discret défini par

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \quad (2.32)$$

Avec la condition initiale $x(k_0) = x_{k_0}$ et cherchons la commande minimisant le critère :

$$J(k_0) = \frac{1}{2}x^T(N)S(N)x(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=k_0}^{k=N-1} x^T(k)Q(k)x(k) + u^T(k)R(k)u(k) \quad (2.33)$$

Ce problème est plus simple que celui à temps continu car il s'agit ici d'un problème dont les inconnues sont les N et k_0 valeurs de $u(k)$ et non plus une fonction du temps. Il s'agit d'une minimisation de (2.33) sous les contraintes (2.32). L'Hamiltonien s'écrit alors :

$$H(k) = \frac{1}{2} \left(x^T(k)Qx(k) + \frac{1}{2}u^T(k)R(k)u(k) \right) + \lambda^T(k+1)(A(k)x(k) + B(k)u(k)) \quad (2.34)$$

Et la solution optimale vérifie les équations suivantes :

$$\frac{\partial H(k)}{\partial u(k)} = R(k)u(k) + B^T(k)\lambda(k+1) = 0 \quad (2.35)$$

$$\lambda(k) = \frac{\partial H(k)}{\partial x(k)} = Q(k)x(k) + A^T(k)\lambda(k+1) \quad (2.36)$$

$$x(k+1) = \frac{\partial H(k)}{\partial \lambda(k+1)} = A(k)x(k) + B(k)u(k) \quad (2.37)$$

La commande est

$$u(k) = -R^{-1}(k)B^T(k)\lambda(k+1) \quad (2.38)$$

La dernière commande $u(N)$ n'a aucun effet sur l'évolution du système sur l'horizon considéré sa valeur optimale est donc nulle $u(N) = 0$, $\lambda(N+1) = 0$. D'après (2.36) $\lambda(N) = S(N)x(N)$.

Il s'agit d'un problème aux deux bouts, une condition initiale est disponible pour l'état alors que c'est une condition finale qui est disponible pour l'état adjoint. Ainsi, la résolution du problème doit se faire pour l'ensemble de la trajectoire, ce qui peut représenter une charge de calcul élevée dans le cas d'un horizon N élevée.

$$x(k+1) = A(k)x - B(k)R^{-1}(k)B^T(k)\lambda(k)$$

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ \lambda(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(k) & -B(k)R^{-1}(k)B^T(k) \\ Q(k) & A^T(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ \lambda(k+1) \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Si déterminant de la matrice A différent de zéro l'équation (2.38) est réécrite sous forme

$$\begin{pmatrix} x(k) \\ \lambda(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1}(k) & A^{-1}(k)B(k)R^{-1}(k)B^T(k) \\ Q(k)A^{-1}(k) & A^T(k) + Q(k)A^{-1}(k)B(k)R^{-1}(k)B^T(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k+1) \\ \lambda(k+1) \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

Si on a $x(N)$ et $\lambda(N)$ donc on peut calculer $x(k)$ et $\lambda(k)$.

2.3.1.2 Formulation sous forme d'équation de Riccati

Les équations précédentes peuvent être résolues directement en x et λ . On peut aussi adopter la démarche suivante, basée sur un changement de variable suivant pour la variable adjointe.

$$\begin{aligned} \lambda(k) &= P(k)x(k), \text{ avec } P(N) = S(N) \\ R(k)u(k) &= -B^T(k)P(k+1)x(k+1) \\ &= -B^T(k)P(k+1)(A(k)x(k) + B(k)u(k)) \\ u(k) &= -K(k)x(k) \end{aligned}$$

$$K(k) = \tilde{R}^{-1}(k)B^T(k)P(k+1)A(k)$$

$$\tilde{R}(k) = R(k) + B^T(k)P(k+1)B(k)$$

Il reste maintenant à déterminer la matrice $P(k)$, on obtient :

$$P(k)x(k) = Q(k)x(k) + A^T(k)P(k+1)x(k+1)$$

$$P(k)x(k) = [Q(k) + A^T(k)P(k+1)(A(k) - B(k)K(k))]x(k)$$

$$P(k) = Q(k) + A^T(k)P(k+1)(A(k) - B(k)K(k))$$

$$P(k) = Q(k) + A^T(k)M(k+1)A(k) \quad (2.41)$$

$$M(k+1) = P(k+1) - P(k+1)B(k)(R(k) + B^T(k)P(k+1)B(k))^{-1}B^T(k)P(k+1)$$

Cette équation récursive à inconnue matricielle est appelée équation de **Riccati discrète**. Sa condition finale est $P(N) = S(N)$ et sa résolution se fait donc à rebours. Dans le cas de systèmes LTV où les matrices A, B dépendent effectivement de k ou bien si c'est le cas des matrices de pondération Q et R , cela suppose de connaître à l'avance l'ensemble des matrices pour $k = k_0, \dots, N$.

2.3.2 Commande LQ à temps discret à horizon infini

2.3.2.1 Critère à horizon infini

Cherchons la commande minimisant le critère :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=k_0}^{k=+\infty} x^T(k)Qx(k) + u^T(k)R(k)u(k) \quad (2.42)$$

Il s'agit du critère précédent où N tend vers l'infini.

On peut montrer alors que pour un système LTI le gain du retour d'état est constant. Il s'écrit :

$$K = (R + B^T P B)^{-1} B^T P A \quad (2.43)$$

Où P est solution de l'équation algébrique de Riccati discrète :

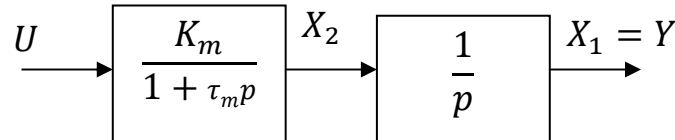
$$P = Q + A^T (P - P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P) A \quad (2.44)$$

Interprétation : de déterminer la commande $u(k)$ qui maintienne le vecteur d'état proche de son état d'équilibre 0 sans une dépense trop forte en énergie de commande.

2.4 Problèmes

Problème N°1

Considérer le moteur à courant continu représenté par la figure ci-dessous avec $K_m = 10$, et $\tau_m = 2.0s$



Pour le régulateur, on désire obtenir un système en boucle fermée avec coefficient d'amortissement $\xi = 0.707$ et un temps de réponse à l'échelon (à 5%) de 300 ms.

1) Étudier le choix des gains du régulateur par retour d'état en appliquant la théorie du régulateur linéaire quadratique (LQR). Tracer le lieu des racines quadratiques pour $Q_y = 1$ et la pondération sur la commande r variant de 0 à une valeur très grande.

$$J = \int_0^{\infty} (y^T(t)Q_y y(t) + r u^2(t)) dt$$

2) Pour ce système étudier une structure de commande régulateur-observateur.

3) Trouver les pôles en boucle fermée permettant de rencontrer les spécifications demandées au niveau du régulateur.

Problème N°2 :

Considérer le modèle du pendule inversé donné ci-dessous

$$(M + m)\ddot{x}(t) + m l \ddot{\theta}(t) = F(t) \quad (1)$$

$$\ddot{x}(t) - g\theta(t) + l\ddot{\theta}(t) = 0 \quad (2)$$

Avec $M = 0.445kg$; $m = 0.21kg$; $l = 0.3m$

1) Écrire le modèle d'état de ce système en considérant que la sortie mesurée est la position du chariot $x(t)$.

2) Déterminer une commande par retour d'état qui stabilise le système en utilisant la technique de placement de pôles et la commande optimale avec un critère quadratique et simuler le système avec cette commande.

3) Écrire les équations d'un observateur d'état d'ordre complet et déterminer ses gains par placement de pôles.

4) Simuler la structure de commande (régulateur + observateur) et comparer le comportement du système avec le régulateur mis au point en 2).

Problème N° 3

On considère le système

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 1) Vérifier que la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ est nilpotente.
- 2) Etudier la stabilité de ce système. Calculer le régime libre.
- 3) On boucle le système à l'aide d'une commande par retour d'état de la forme

$$u = -[1, m]x$$

Ecrire les nouvelles équations d'état.

- 4) Pour quelles valeurs de m , le système est-il asymptotiquement stable.
- 5) Quelle valeur de m permettant de minimiser le critère :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} [x^T(t)x(t) + u^2(t)]dt$$

Quelle est la valeur du J ?

Problème N° 4

Considérant un système donné par

$$x(k+1) = 2x(k) + u(k)$$

- 1) Trouver la solution homogène $x(k)$ pour $k = 0, 5$ si $x(0) = 3$.
- 2) Trouver la séquence de commande à énergie minimale $u(k)$ nécessaire pour dériver $x(0) = 3$ à $x(5) = 0$. Vérifier votre réponse en retrouvant la trajectoire d'état résultante.
- 3) Trouver la séquence gain de retour optimale $K(k)$, pour minimiser l'indice de performance suivant

$$J_0 = 5x_5^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^4 (x_k^2 + u_k^2)$$

Trouver la trajectoire d'état résultante et le coût pour aller J_k^* pour $k = 0, 5$.

CHAPITRE 3

COMMANDE LINEAIRE QUADRATIQUE GAUSSIENNE (LQG)

3.1 Introduction

Par rapport à la commande LQ, la commande LQG présente l'intérêt de s'appliquer à des systèmes dont l'état n'est pas mesuré. Développée au début de la seconde moitié du 20^{ème} siècle et appliquée lors du programme spatial Apollo pour la stabilisation de lanceurs, elle est apparue comme la première méthode générale pour l'asservissement des systèmes multi-variables. De ce fait, elle a connu un grand succès comme en témoigne les nombreuses publications sur le sujet. Depuis la fin du 20^{ème} siècle, la commande H1 apparaît comme un sérieux concurrent pour l'asservissement robuste des systèmes multi-variables. Néanmoins, la commande LQG n'en demeure pas moins un standard industriel.

3.2 Formulation

Soit un système dynamique stochastique d'équation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + b_v(t) \\ y(t) = Cx(t) + b_w(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

Où b_v et le bruit de mesure b_w sont des bruits blancs centrés de variance $E\{b_v^T b_v\} = V \geq 0$ et $E\{b_w^T b_w\} = W > 0$. Le problème LQG consiste à minimiser le critère suivant :

$$J(x_0, t_0, u) = \lim_{t_f \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{t_f} \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} (x^T Q(t) x + u^T R(t) u) dt \right\} \quad (3.2)$$

Avec $Q = Q^T \geq 0$ et $R = R^T > 0$

3.3 Principe de séparation

La solution du problème LQG est donnée par les solutions de deux problèmes connus :

- 1- Le problème d'estimation optimale de l'état d'un système dynamique stochastique (filtre de Kalman) donnant une estimée \hat{x} de x qui est non biaisé et à variance minimale.
- 2- Le problème de commande LQ optimale en supposant x connu, donnant un retour d'état de gain K . La commande LQG par retour de l'état estimé est donc finalement $u = -K\hat{x}$.

3.4 Structure de la commande LQG

Equation de l'observateur (filtre de Kalman-Bucy) :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) \quad (3.3)$$

Où le gain de Kalman est :

$$L = PC^TW^{-1}$$

Avec P la solution de l'équation algébrique de Riccati

$$PA^T + AP - PC^TW^{-1}CP + V = 0 \quad (3.4)$$

Modèle d'état du correcteur

$$\dot{\hat{x}} = (A - BK - LC)\hat{x} + Ly \quad (3.5)$$

$$u = -K\hat{x}$$

Le suivi d'une consigne y^* se fera par la loi de commande $u = G(p)(y^* - y)$ où la fonction de transfert du correcteur est :

$$G(p) = K(pI - A + BK + LC)^{-1}L \quad (3.6)$$

Ses équations d'état sont :

$$\dot{\hat{x}} = (A - BK - LC)\hat{x} + Le \quad (3.7)$$

$$u = -K\hat{x} \quad (3.8)$$

Où $e = (y^* - y)$. Notons que ce correcteur LTI a même ordre que le processus

3.5 Choix des pondérations

Le réglage du correcteur LQG nécessite la donnée de quatre matrices de pondération : Q et R pour le retour d'état, V et W pour l'estimateur. La méthode de réglage la plus simple repose sur un réglage séparé : régler V et W de sorte que l'état soit bien reconstruit et régler Q et R pour avoir un bon retour d'état. Si les dynamiques de la régulation sont relativement lentes devant celles de l'observation, on peut supposer que l'état est parfaitement connu du point de vue du retour d'état et la commande sera robuste (marge de module égale à 1). Si cette hypothèse n'est pas respectée, et ce sera le cas dès que vous souhaiterez obtenir un régulateur avec des dynamiques élevées, la robustesse n'est plus assurée. La méthode de réglage des pondérations Q et R du retour d'état vue au paragraphe précédent reste valable. Abordons la question du réglage de l'estimateur avant de présenter les méthodes de recouvrement du gain destinées à rendre robuste la commande LQG.

3.6 Réglage de l'estimateur d'état

L'estimateur d'état s'appuie sur la commande u et sur la mesure y du système pour donner l'estimée de l'état la plus plausible, compte-tenu des incertitudes et bruits affectant le modèle et la mesure.

Une première approche du réglage du filtre concerne le cas où l'hypothèse de départ sur le modèle est respectée; c'est-à-dire que le seul défaut du modèle est d'être affecté par des signaux stochastiques blancs. Dans ce cas, le réglage se fera directement par une évaluation des

variances des bruits. Evaluer le bruit de mesure b_w en observant y est direct, ce qui n'est pas le cas du bruit d'état b_v . Ce bruit peut être attribué à la commande u en choisissant $V = BV_u B^T T$, avec V_u la variance du bruit de mesure. Cependant, la principale source de bruit d'état d'un modèle provient généralement des erreurs de modélisation qui sont déterministes et non stochastiques. Néanmoins ces erreurs de modélisation sont généralement mal connues et il n'est pas *aberrant* d'en tenir compte globalement grâce à un terme stochastique. La validation du filtre de Kalman peut alors se faire en simulation en introduisant des erreurs sur le modèle telles que des variations sur ses paramètres.

3.7 Loop Transfer Recovery (LTR)

La présence d'un observateur fait, que les propriétés de robustesse du correcteur LQ ne sont plus valables. Les méthodes de Loop Transfer Recovery (LTR ou en Français recouvrement du transfert de la boucle) consistent à modifier les conditions de la synthèse afin de se rapprocher du transfert qui serait obtenu avec un retour d'état LQ. Si ce transfert est obtenu, la robustesse est alors assurée. Depuis les premiers travaux de Doyle et Stein en 1981, de nombreux travaux ont été menés sur ce sujet. C'est cette première approche qui est présentée ici. Elle a l'inconvénient de ne pas convenir aux systèmes à déphasage non-minimal. Des travaux de recherche sont attachés à ce type de système.

La méthode de recouvrement repose sur l'écriture de la matrice de covariance V de la forme :

$$V = V_0 + q^2 B B^T \quad (3.9)$$

On montre que le gain de la boucle ouverte $C(p)G(p)$ tend vers $K(pI - A)^{-1}B$, celui du régulateur LQ, lorsque q tend vers l'infini. Ainsi, à partir d'un correcteur initial reposant sur les pondérations V_0 et W , on augmente petit-à-petit q jusqu'à obtenir la robustesse suffisante. Une approche duale consiste à retoucher le gain du retour d'état en choisissant la matrice de pondération Q de la forme :

$$Q = Q_0 + q^2 C^T C \quad (3.10)$$

La méthode reste la même : on augmente q jusqu'à obtenir la robustesse désirée. Dans tous les cas, l'augmentation de la robustesse se fait au détriment des performances et un compromis doit être trouvé.

3.8 Commande LQG à temps discret

A l'image de la commande LQG à temps continu, la version à temps discret consiste en la combinaison d'un filtre de Kalman à temps discret et d'un retour d'état. La méthode LTR s'applique également.

PARTIE II : COMMANDE ADAPTATIVE

CHAPITRE 4

GENERALITES SUR LA COMMANDE ADAPTATIVE

4.1 Introduction

La terminologie de *la commande adaptative* désigne un ensemble de méthodes permettant un ajustement automatique en temps réel des paramètres des régulateurs mis en œuvre dans une boucle de commande afin de réaliser ou de maintenir un niveau de performance désiré, lorsque les paramètres du processus sont inconnus ou varient légèrement dans le temps.

Le problème essentiel d'un schéma de commande adaptative est d'assurer la stabilité du système en boucle fermée. Nous trouvons actuellement dans la littérature des commandes adaptatives élaborées pour différents types de systèmes parmi lesquels on trouve :

- Les systèmes linéaires à déphasage minimal. Ce sont des systèmes dont les zéros sont tous dans la région stable.
- Les systèmes linéaires à déphasage non minimal. Ce sont des systèmes qui peuvent avoir un ou plusieurs zéros dans la région instable.

4.2 Bref historique

- L'origine de la commande adaptative remonte au début des années 1950.
- La commande adaptative a été motivée par ces problèmes de l'aéronautique
- Beaucoup de recherches ont été activement menées
- Conception d'autopilotes pour une large fourchette d'altitudes et de vitesses.
- Forts changements dans la dynamique quand l'avion change de point de fonctionnement.
- Les contrôleurs par feedback à gains constant n'étaient pas capables de garantir les performances désirées lors du changement de point de fonctionnement.
- Des approches de commande sophistiquées, telle que la commande adaptative, étaient nécessaires pour compenser ces fortes variations dans la dynamique de l'avion.
- La commande adaptative à modèle de référence a été proposée par *Whitaker* pour résoudre le problème de commande d'autopilotes.
- La méthode de sensibilité et la règle d'adaptation du MIT a été largement utilisée.
- Une méthode de placement de pôles adaptatif basée sur le problème linéaire quadratique optimal a été proposée par *Kalman*.
- Méthode de sensibilité, règle du MIT, analyse de stabilité limitée (les années 1960) *Whitaker, Kalman, Parks, etc*

- Méthode basée sur la technique de Lyapunov, de passivité (les années 1970) *Morse, Narendra, Landau, etc*
- Preuves de stabilité globales (les années 1970-1980) *Astrom, Morse, Narendra, Landau, Goodwin, Keisselmeier, Anderson, etc*
- Questions de robustesse, instabilité (Début des années 1980) *Rohrs, Valavani, Athans, Marino, Tomei, Egard, Ioanno, Anderson, Sastry etc*
- Commande adaptative robuste (les années 1980) *Ioanno, Sun, Praly, Jiang, Tsakalis, Tao, Datta, Middleton, Basar, etc*
- Commande adaptative non linéaire (les années 1990) *Kokotovic, Ioannou, Narendra, Krstic, Xu, Wang, Anderson, Safonov, Bernstein, etc*

4.3 Classification des approches de commande adaptative

Les approches de commande adaptative peuvent être classées en deux classes :

1. Commande adaptative **directe** (*Direct adaptive control*).
2. Commande adaptative **indirecte** (*Indirect adaptive control*).

Il existe principalement quatre types d'approches de commande adaptatives :

1. Commande par **gain programmé** (*Gain scheduling*).
2. Commande adaptative à **Modèle de Référence** (*Model Reference Adaptive Control*).
3. Contrôleurs **auto-ajustable** (*Self-Tuning Regulator*)
4. Commande **duale** (*Dual control*)

Trois approches de base de la commande adaptative existent en boucle ouverte et fermée sont.

Les schémas-blocs de chacun de ces différentes commandes seront présentés par la suite

4.4 Commande à gain programmés (figure 4.1)

Dans ce type d'adaptation, on suppose qu'il existe une relation entre le point de fonctionnement du système, certaines variables de l'environnement, le temps écoulé et les paramètres du processus. Les valeurs de régulateur sont prédéfinies et ajustées en fonction des valeurs des mesures des différentes variables prises en compte. Ce type de d'adaptation s'avère cependant suffisant pour de nombreux processus. Cette méthode suppose que les non linéarités sont connues, car il n'existe pas de correction pour compenser une programmation incorrecte (fonctionnement en boucle ouverte). Elle a cependant l'avantage d'ajuster rapidement les paramètres du régulateur lors de changements rapides de la dynamique du processus.

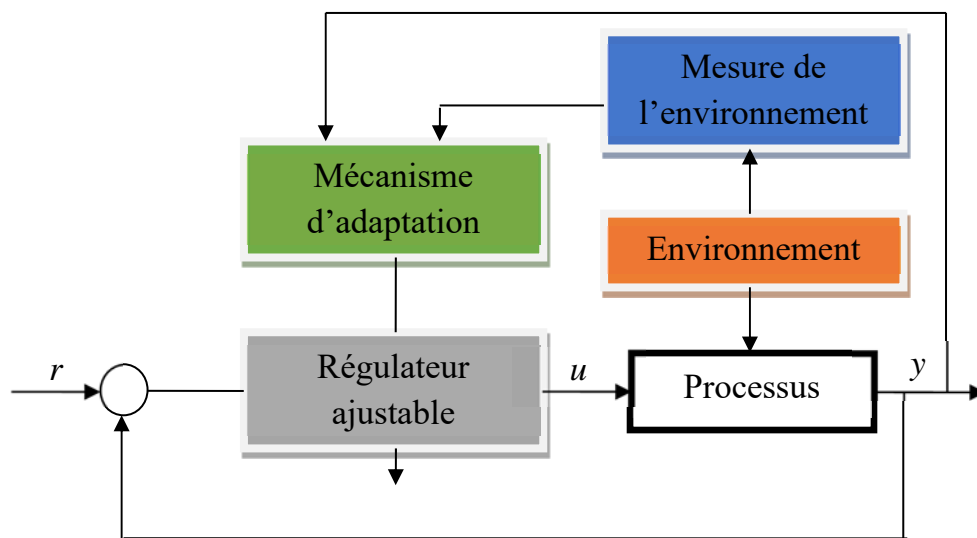


Figure 4.1 : commande à gains programmés

Les méthodes présentées dans la suite concernant la commande adaptative en boucle fermée, qu'elle soit directe, c'est-à-dire avec un ajustement des paramètres de contrôleur directement à partir des mesures de l'indice de performance (comme modèle de référence, MRAC), ou indirecte c'est-à-dire en effectuant un ajustement des paramètres du modèle du processus (identification en ligne) suivi d'un nouveau calcul des paramètres du régulateur (commande auto-ajustable).

Dans tous les cas, il est nécessaire dans une première étape de préciser la structure et la complexité de modèle de procédé.

4.5 Commande adaptative à régulateur auto-ajustable

Schéma de la figure 4.2 comporte une boucle interne, la boucle classique processus-contrôleur et une boucle externe comprenant un estimateur (identificateur des paramètres du processus) et un mécanisme d'adaptation qui minimise l'erreur entre la sortie du processus et son estimateur. A l'origine la commande à modèle de référence traitait les problèmes de l'asservissement alors que le contrôleur auto-ajustable était destiné aux problèmes de régulation.

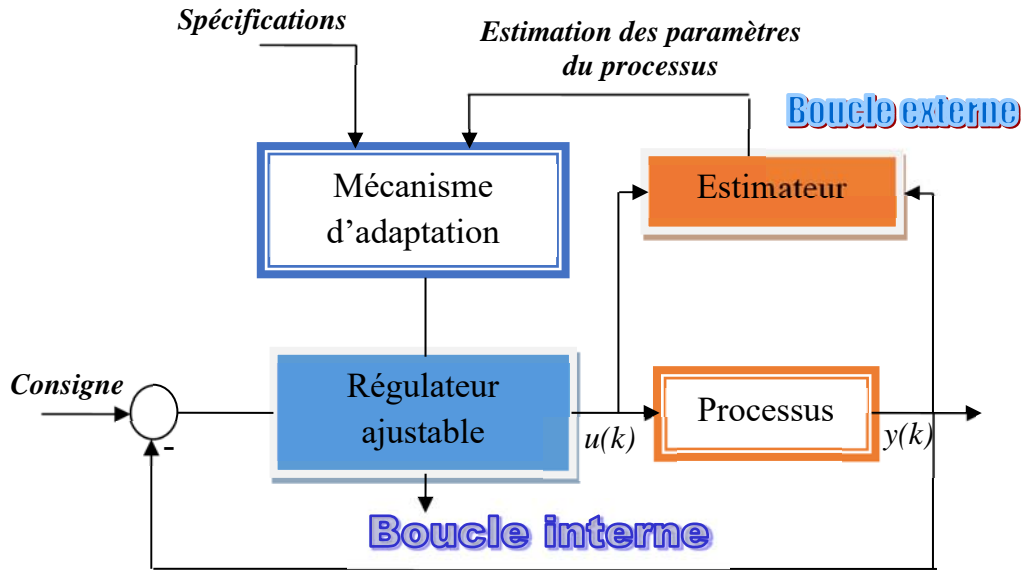


Figure 4.2 : commande auto-ajustable (STR)

4.6 Commande adaptative par modèle de référence

Commande adaptative à modèle de référence fait partie d'un ensemble de techniques destinées à ajuster automatiquement les paramètres de contrôleur des systèmes de commande. Le comportement dynamique du processus est défini par un modèle de référence et les paramètres de contrôleur sont ajustés par la boucle externe de façon à minimiser l'erreur de sortie de processus-modèle. Cette méthode est utilisée en général pour les systèmes continus et déterministes. ($e = y - y_m$). Le schéma fonctionnel est ;

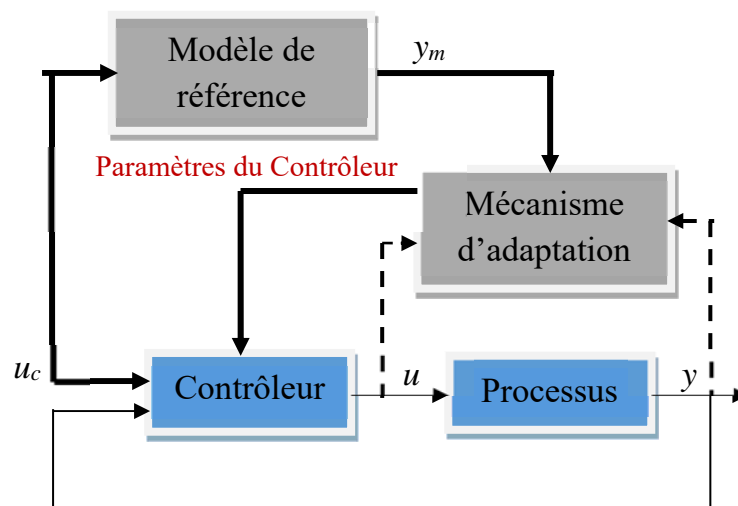


Figure 4.3 : Schéma de la commande adaptative à modèle de référence

4.7 Applications de la commande adaptative



4.8 Références bibliographiques



CHAPITRE 5

COMMANDE ADAPTATIVE AUTO-AJUSTABLE

5.1 Introduction

Une commande est dite adaptative si les paramètres de contrôleur peuvent être ajustés en fonction des paramètres estimés du procédé à commander. La synthèse de contrôleur se fait normalement en utilisant la connaissance à priori de procédé. Lorsque ces paramètres de système à commander sont mal connus ou varient dans le temps, on peut faire appel à une commande adaptative. En général, on distingue deux niveaux de commande adaptative :

- La commande adaptative directe : on estime directement les bons paramètres du régulateur qui intègre implicitement les paramètres du modèle.
- La commande adaptative indirecte : on procède d'abord à une estimation des paramètres du modèle, puis on calcule le régulateur. La loi de commande adaptative est obtenue en utilisant l'équivalence certaine, c'est-à-dire en remplaçant le modèle de procédé par son estimation admissible lorsque la loi de commande est recherchée.

Ce chapitre est organisé en deux parties. La première partie regroupe la définition, principes et différentes d'étapes des algorithmes d'identification paramétrique récursive. La seconde partie présente la méthode de placement de pôles utilisée pour le calcul du régulateur RST. Application de la commande auto-ajustable sur une éolienne à deux masses.

5.2 Identification paramétrique des systèmes dynamiques

Dans le but de développer une méthodologie intégrée pour la commande adaptative itérative indirecte ou auto-ajustable des systèmes industriels le premier élément consiste dans l'identification en ligne ou en temps réel des paramètres du modèle du système considéré. Le principe de l'identification en ligne consiste à comparer, à chaque instant $t = kT_e$ (T_e est le temps d'échantillonnage), un signal de sortie $y(k)$ à sa prédiction $\hat{y}(k)$. L'écart $\epsilon(k) = y(k) - \hat{y}(k)$ appelé erreur de prédiction, est ensuite utilisé par l'algorithme d'identification paramétrique approprié pour modifier les valeurs des paramètres $\hat{\beta}(k)$ du modèle, de manière à minimiser l'erreur suivant un certain critère $J(k)$.

5.2.1 Définition et principes

L'identification est l'opération de construction d'un modèle permettant d'analyser les caractéristiques dynamiques d'un système et dont la connaissance est nécessaire pour la conception et la mise œuvre d'un système permanent de régulation. L'identification est une

technique expérimentale qui s'appuie sur l'utilisation de procédures et algorithmes issus d'études théoriques. L'identification inclut quatre étapes :

- 1) acquisition des entrées/sorties sous un protocole d'expérimentation ;
- 2) choix ou estimation de la complexité du modèle ;
- 3) estimation des paramètres du modèle ;
- 4) validation du modèle identifié.

Une opération complète d'identification doit nécessairement comporter les quatre étapes indiquées ci-dessus. Il faut donc voir l'identification comme une procédure itérative telle quelle est illustrée dans la figure 5.1. Toutes les méthodes d'estimation paramétrique peuvent être représentées selon la figure 5.2.

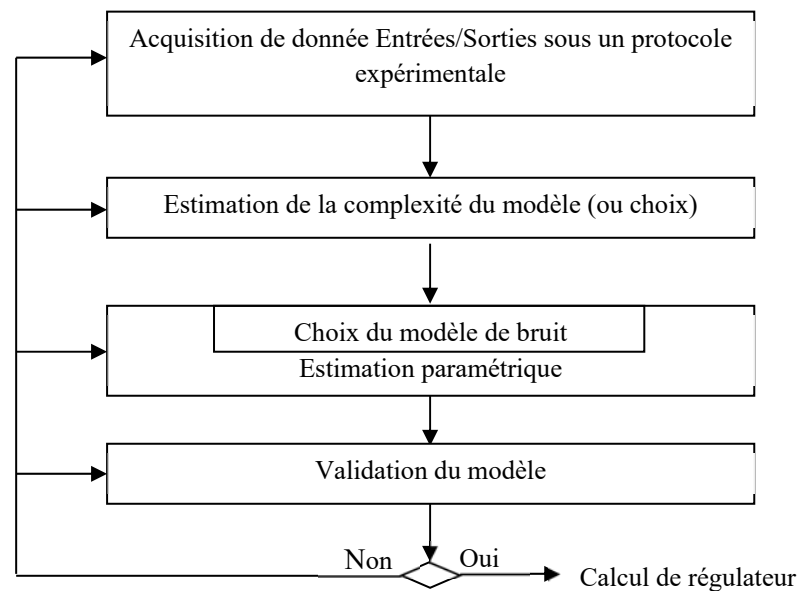


Figure 5.1 : Méthodologie de l'identification

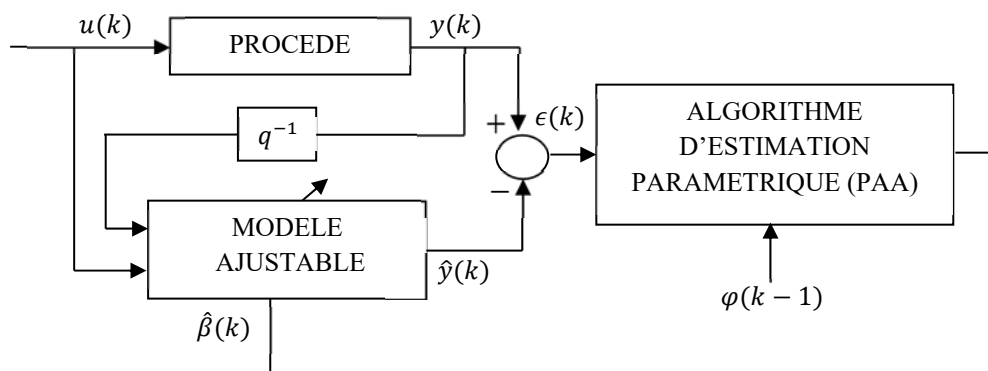


Figure 5.2 : Structure d'identification récursive

5.2.2 Les étapes de l'identification

Nous donnerons dans ce qui suit les éléments de base de chaque étape de l'identification.

5.2.2.1 Acquisition des données entrée/sortie

L'acquisition des données entrée/sortie est la première étape de la procédure d'identification. Etant donné que le modèle résultant à l'issue de la procédure dépend essentiellement des données utilisées, le protocole d'acquisition (et sa mise en œuvre) conditionne la qualité de l'identification. En conséquence, une attention particulière doit être donnée à toute contrainte possible et aspect d'ordre pratique lié au système avant d'appliquer les algorithmes qui détermineront les paramètres du modèle.

Les signaux d'excitation utilisés pour l'identification d'un modèle paramétrique du système doivent être suffisamment riches en fréquence pour pouvoir exciter convenablement la dynamique du système. Cela correspond à l'utilisation des signaux qui couvrent un intervalle de fréquence spécifié avec une énergie constante à toutes les fréquences (bruit blanc ou bruit à bande limitée). Une classe de signaux largement utilisée dans le domaine pratique de l'identification est l'ensemble des signaux pseudo-aléatoires. Les séquences binaires pseudo-aléatoires (SBPA) sont des successions d'impulsions rectangulaires modulées en largeur qui approchent un bruit blanc discret. Les signaux SBPA sont engendrés à partir d'un registre à décalage bouclé. La longueur maximale d'une séquence est $2^N - 1$, où N est le nombre de cellules du registre. Pour des détails sur la SBPA.

5.2.2.2 Définition d'une classe de modèles

La structure choisie pour les modèles linéaires et invariants dans le temps est

$$F(q) = q^{-d} \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} \quad (5.1)$$

où

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} \dots + a_n q^{-n}$$

$$B(q^{-1}) = b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} \dots + b_m q^{-m}$$

$$d = n - m$$

d est le retard du système en nombre entier de la période d'échantillonnage et $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ sont des polynômes en q^{-1} (opérateur de retard) d'ordre n et m respectivement. Un modèle de ce type exprime la relation entre l'entrée $u(k)$ et la sortie $y(k)$ du système qu'on désire estimer sous l'hypothèse qu'un bruit additif sur la sortie soit présente et que.

$$y(k) = F(q)u(k) + w(k) \quad (5.2)$$

où $w(k)$ représente l'effet du bruit.

Les principaux modèles de bruit sont :

- **1^{er} cas**

$$w(k) = \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} e(k) \quad (5.3)$$

Où $e(k)$ est un bruit blanc discret gaussien de valeur moyenne nulle et d'écart type σ , dans ce cas, (5.2) est un modèle ARMAX (Auto Regressive Moving Average with eXogenous input).

- **2^{ème} cas**

$$w(k) = \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})D(q^{-1})} e(k) \quad (5.4)$$

Dans ce cas, (5.2) est un modèle AR-ARMAX (pour $C(q^{-1}) = 1$ ce modèle est appelé AR-ARX).

Les polynômes $C(q^{-1})$ et $D(q^{-1})$ sont supposés asymptotiquement stables et ont la forme :

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-2} \dots + c_{nc} q^{-nc} = 1 + q^{-1} C^*(q^{-1}) \quad (5.5)$$

$$D(q^{-1}) = 1 + d_1 q^{-1} + d_2 q^{-2} \dots + d_{nd} q^{-nd} = 1 + q^{-1} D^*(q^{-1}) \quad (5.6)$$

Les deux structures (5.3) et (5.4) correspondent au filtrage de la perturbation par les pôles de modèle de procédé. Nous supposons aussi que la structure choisie (ordre des différents polynômes) pour l'estimateur est telle qu'il existe un vecteur des paramètres $\hat{\beta}$ pour lequel l'erreur de prédiction $e(k)$, dans un environnement déterministe (sans bruit), est nulle.

L'équation de l'estimateur à posteriori est donnée par :

$$\hat{y}(k) = F(q, k)u(k) = q^{-d} \frac{B(q^{-1}, k)}{A(q^{-1}, k)} u(k) \quad (5.7)$$

$$\hat{y}(k+1) = \hat{\beta}^T(k+1) \hat{\vartheta}(k) \quad (5.8)$$

où

$$A(q^{-1}, k) = 1 + a_1(k)q^{-1} + a_2(k)q^{-2} \dots + a_n(k)q^{-n}$$

$$B(q^{-1}, k) = b_1(k)q^{-1} + b_2(k)q^{-2} \dots + b_m(k)q^{-m}$$

$$\hat{\beta}^T(k) = [a_1(k), a_2(k), \dots, a_n(k), b_1(k), b_2(k), \dots, b_m(k)] \quad (5.9)$$

$$\hat{\vartheta}^T(k) = [-\hat{y}(k), -\hat{y}(k-1), \dots, -\hat{y}(k-n+1), u(k-d), \dots, u(k-d-m+1)] \quad (5.10)$$

$\hat{\beta}(k)$ est le vecteur des paramètres et $\hat{\vartheta}(k)$ est le vecteur des mesures (appelé aussi régresseur).

La démarche pour le développement des différentes méthodes d'identification peut se résumer de la façon suivante :

1) Choix d'un modèle "procédé + perturbation".

- 2) Construction d'estimateur optimal qui, pour $\hat{\beta} = \beta$ assure les conditions pour une estimation non biaisée.
- 3) Choix du critère de l'erreur.
- 4) Construction des algorithmes de minimisation du critère (algorithmes itératifs ou récursifs).

5.2.2.3 Algorithmes d'identification récursifs

Plusieurs approches peuvent être considérées pour engendrer des algorithmes récursifs :

- Transformation d'algorithmes non récursifs en algorithmes récursifs
- Utilisation de la technique d'optimisation du gradient dans le domaine temporel,
- Utilisation de la théorie des systèmes adaptatifs,
- Rapprochement avec filtre de Kalman.

Pour une représentation exhaustive de différentes approches. Mais quelle que soit l'approche utilisée pour les obtenir, les algorithmes récursifs ont toujours la forme générale.

$$\begin{aligned}\hat{\beta}(k+1) &= \hat{\beta}(k) + P(k)\hat{\vartheta}(k)\epsilon(k+1) \\ &= \hat{\beta}(k) + P(k+1)\hat{\vartheta}(k)\bar{\epsilon}(k+1)\end{aligned}\quad (5.11)$$

$$\epsilon(k+1) = y(k+1) - \hat{y}(k+1) \quad (5.12)$$

$$P^{-1}(k+1) = \lambda_1(k)P^{-1}(k) + \lambda_2(k)\hat{\vartheta}(k)\hat{\vartheta}^T(k) \quad (5.13)$$

$$0 < \lambda_1(k) \leq 1, 0 \leq \lambda_2(k) < 2 \quad P(0) > 0$$

$$P^{-1}(k) > \alpha P^{-1}(0); 0 < \alpha < +\infty$$

$$\epsilon(k+1) = \frac{\bar{\epsilon}(k+1)}{1 + \hat{\vartheta}^T(k)P(k)\hat{\vartheta}(k)} \quad (5.14)$$

L'ensemble des équations (5.11), (5.12), (5.13) et (5.14) porte le nom d'algorithme d'adaptation paramétrique (Parametric Adaptation Algorithm PAA). Dans l'équation (5.14) $\hat{\vartheta}(k)\bar{\epsilon}(k+1)$, correspond à une évaluation de gradient du critère à minimiser, $\bar{\epsilon}(k+1)$ et $\epsilon(k+1)$ correspondent aux erreurs d'estimation, $\bar{\epsilon}(k+1)$ a le sens d'une erreur d'estimation a priori (elle dépend de $\hat{\beta}(k)$ et $\epsilon(k+1)$ a le sens d'une erreur d'estimation a posteriori (elle dépend de $\hat{\beta}(k+1)$), $P(k+1)$ correspond au gain d'adaptation (pas de gradient). Ce pas est en général variable dans le temps et la variation de ce pas est définie par l'équation (5.13) qui, en utilisant le lemme d'inversion matricielle, peut s'écrire :

$$P(k+1) = \frac{1}{\lambda_1(k)} \left[P(k) - \frac{P(k)\hat{\vartheta}(k)\hat{\vartheta}^T(k)P(k)}{\frac{\lambda_1(k)}{\lambda_2(k)} + \hat{\vartheta}^T(k)P(k)\hat{\vartheta}(k)} \right] \quad (5.15)$$

Les séquences $\lambda_1(k)$ et $\lambda_2(k)$ permettent de modifier la loi de variation du gain d'adaptation dans le temps. Dans de nombreuses applications il est néanmoins utile d'utiliser les séquences λ_1 et λ_2 pour obtenir d'autres caractéristiques pour la variation du profil du gain d'adaptation.

5.2.2.3.1 Choix du gain d'adaptation

Considérons l'équation (5.13), à noter que $\lambda_1(k)$ et $\lambda_2(k)$ dans l'équation (5.15) ont un effet opposé, $\lambda_1(k) \leq 1$ tend à augmenter le gain d'adaptation (l'inverse du gain décroît), $\lambda_2(k)$ tend à décroître le gain d'adaptation (l'inverse de gain augmente). Pour chaque choix des séquences $\lambda_1(k)$ et $\lambda_2(k)$ correspond un profil de variation du gain d'adaptation et une interprétation en termes de critère d'erreur qui est minimisé par l'algorithme PAA.

a) Gain constant (l'algorithme de gradient amélioré)

Dans ce cas

$$\lambda_1(k) = \lambda_1 = 1 ; \lambda_2(k) = \lambda_2 = 0 \quad (5.16)$$

C'est l'algorithme le plus simple mais aussi le moins performant, car il n'est pas facile à choisir les meilleures valeurs des gains d'adaptation et les performances sont très sensible à ces valeurs. On peut utiliser cet algorithme pour identification des systèmes stationnaires ou variables dans le temps, mais avec peu de paramètres (≤ 3) et en présence d'un niveau de bruit réduit.

b) Gain décroissant

Dans ce cas

$$\lambda_1(k) = \lambda_1 = 1 ; \lambda_2(k) = \lambda_2 = 1 \quad (5.17)$$

Cet algorithme est appliqué en général pour l'estimation des paramètres des processus stationnaires.

c) Gain est variable et décroissant

Dans ce cas

$$\lambda_1(k) = \lambda_1 = 1 ; 0 < \lambda_2(k) < 2 \quad (5.18)$$

Pour éviter la convergence vers zéro du gain d'adaptation, ces algorithmes sont initialisés soit en détectant un changement de la dynamique du processus, soit à période fixe.

d) Facteur d'oubli fixe

Dans ce cas

$$0 < \lambda_1 \leq 1 ; \lambda_2(k) = \lambda_2 = 1 \quad (5.19)$$

Les valeurs typiques pour λ_1 sont de 0.95 à 0.99. L'effet de ($\lambda_1 < 1$) est d'introduire une pondération de plus en plus faible sur les données anciennes ($i < k$). C'est pour cette raison que λ_1 est appelé « facteur d'oubli ». Le point maximum est donné à la dernière erreur. Ce type

d'algorithme convient pour l'identification des systèmes lentement variables. Le gain d'adaptation a une capacité de poursuite (convergence exponentielle), dans le cas où les signaux d'entrée-sortie sont excitants. Or cette condition n'est pas réalisée lorsque le régime stationnaire est atteint. Dans ce cas, le gain d'adaptation tend à croître exponentiellement et conduit à l'explosion de vecteur des paramètres.

e) Facteur d'oubli variable

Dans ce cas

$$\lambda_2(k) = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_1(k) = \lambda_0 \lambda_1(k-1) + 1 - \lambda_0; \quad 0 < \lambda_0 \leq 1 \quad (5.20)$$

Les valeurs typiques pour $\lambda_1(0)$ et λ_0 sont de 0.95 à 0.99, $\lambda_1(k)$ peut être interprétée comme la sortie d'un filtre de premier ordre avec un gain statique égale à 1 qui est:

$$\lambda_1(k) = \frac{1 - \lambda_0}{1 - \lambda_0 q^{-1}} \quad (5.21)$$

Ce type de profil est très recommandé pour l'identification des systèmes stationnaires.

f) Trace constante

Dans ce cas, $\lambda_1(k)$ et $\lambda_2(k)$ sont choisis automatiquement à chaque pas pour assurer une trace constante de la matrice de gain.

$$\text{tr}(P(k+1)) = \text{tr}(P(k)) = \text{tr}(P(0)) = n\delta \quad (5.22)$$

où n est le nombre de paramètres et δ est le gain initial (valeurs typiques $\delta = 0.1$ à 4), la matrice $P(0)$ ayant la forme :

$$P(0) = \begin{pmatrix} \delta & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \delta \end{pmatrix}_{n \times n} \quad (5.23)$$

Les valeurs de $\lambda_1(k)$ et $\lambda_2(k)$ se déterminent à partir de l'équation :

$$\text{tr}(P(k+1)) = \frac{1}{\lambda_1(k)} \text{tr} \left[P(k) - \frac{P(k) \hat{\vartheta}(k) \hat{\vartheta}^T(k) P(k)}{\gamma(k) + \hat{\vartheta}^T(k) P(k) \hat{\vartheta}(k)} \right] \quad (5.24)$$

En fixant le rapport $\gamma(k) = \frac{\lambda_1(k)}{\lambda_2(k)}$ (l'équation (5.24) est obtenue à partir de (5.15)). Ce type de profil convient pour l'identification des systèmes à paramètres variables dans le temps.

5.2.2.3.2 Choix du gain initial $P(0)$

Le gain d'adaptation initial $P(0)$ est de la forme donnée par l'équation (5.23). En absence d'information initiale sur les paramètres à estimer, on prend les estimations initiales nulles et on choisit le gain initial ($\delta=1000$). On peut interpréter le gain d'adaptation comme une mesure de la précision de l'estimation, ceci explique le choix de $P(0)$.

5.2.2.4 Stabilité de l'algorithme d'identification PAA

L'erreur paramétrique est définie par

$$\tilde{\beta}(k) = \hat{\beta}(k) - \beta \quad (5.25)$$

Pour analyser les méthodes d'identification itérative (récursive), nous disposons d'un résultat général de stabilité qui est obtenu en prenant en compte la structure équivalente à contre-réaction des algorithmes (voir la figure 5.3). Nous ferons les hypothèses suivantes :

- i)** L'algorithme d'adaptation paramétrique est donné par les équations (5.11) à (5.14) ;
- ii)** La commande adaptative conduit à écrire l'erreur généralisée, ou l'erreur d'adaptation à posteriori, sous la forme

$$\epsilon(k+1) = -H(q^{-1})\tilde{\beta}^T(k)\hat{\vartheta}(k) \quad (5.26)$$

$$\text{on} \quad H(q^{-1}) = \frac{H_1(q^{-1})}{H_2(q^{-1})} \quad (5.27)$$

$$\text{avec} \quad H_i(q^{-1}) = 1 + q^{-1}H_i^*(q^{-1}) = 1 + \sum_{j=1}^{n_i} h_j^i q^{-j}; i = 1, 2 \quad (5.28)$$

où $\hat{v}(k)$ est une séquence bornée ou non bornée.

- iii) β est une valeur constante du vecteur des paramètres.

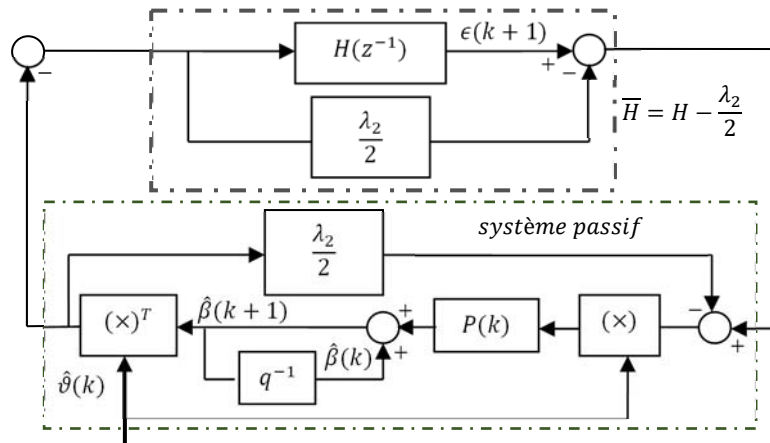


Figure 5.3 : Représentation équivalente à contre-réaction associée à l'algorithme PAA

Théorème 5.1: Sous hypothèse (i), (ii) et (iii) si :

$$\overline{H}(z^{-1}) = H(z^{-1}) - \frac{\lambda_2}{2} \quad (5.29)$$

est une fonction de transfert strictement réelle positive où :

$$\max_k \lambda_2(k) \leq \lambda_2 < 2 \quad (5.30)$$

alors pour tout $\epsilon(0)$ et $\hat{\beta}(0)$ bornés, on a :

$$(1) \quad \lim_{k_1 \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{k_1} \epsilon^2(k+1) < C \left(\epsilon(0), \hat{\beta}(0) \right); \quad 0 < C < \infty \quad (5.31)$$

$$(2) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \epsilon(k+1) = 0 \quad (5.32)$$

$$(3) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} [\beta - \hat{\beta}(k+1)]^T \varphi(k) = 0 \quad (5.33)$$

$$(4) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} [\hat{\beta}(k+1) - \hat{\beta}(k)]^T P^{-1}(k) [\hat{\beta}(k+1) - \hat{\beta}(k)] = 0 \quad (5.34)$$

$$(5) \quad [\hat{\beta}(k+1) - \beta]^T P^{-1}(k) [\hat{\beta}(k+1) - \beta] < R_1 < \infty \quad (5.35)$$

$$(6) \quad \text{si } \bar{H}(z^{-1}) \text{ est strictement passive en sortie :}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow +\infty} [1 + \hat{\theta}^T(k) P(k) \hat{\theta}(k)] \epsilon^2(k+1) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{[\bar{\epsilon}(k+1)]^2}{1 + \hat{\theta}^T(k) P(k) \hat{\theta}(k)} = 0 \end{aligned} \quad (5.36)$$

si les conditions suivantes sont vérifiées

$$P^{-1}(k) \geq \alpha P^{-1}(0); \quad P(0) > 0; \quad \alpha > 0; \quad \forall k \geq 0 \quad (5.37)$$

donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P(k) \hat{\theta}(k) \epsilon(k+1) = \lim_{k \rightarrow +\infty} [\hat{\beta}(k+1) - \hat{\beta}(k)] = 0 \quad (5.38)$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\hat{\beta}(k+1) - \hat{\beta}(k)\| = 0; \quad k < \infty \quad (5.39)$$

$$\|\hat{\beta}(k)\| \leq R_2 < \infty; \quad \forall k \geq 0 \quad (5.40)$$

La relation (5.32) de ce théorème assure la convergence vers zéro de l'erreur d'adaptation à postériori, les autres résultats prouvent que les paramètres du processus convergent et l'entrée et la sortie du système sont bornées. La démonstration de ce théorème se trouve dans¹.

5.2.2.5 Validation des modèles identifiés

La dernière étape de la procédure d'identification est la validation du modèle obtenue au terme de la phase d'identification paramétrique. Dans le paragraphe précédent, on a mentionné la méthode d'identification réursive utilisée. Parallèlement, nous allons rappeler les techniques de validation associées à cette méthode. Pour les méthodes d'identification basées sur le blanchissement de l'erreur de prédiction, il est nécessaire de vérifier que l'erreur de prédiction, obtenue comme différence entre la sortie réelle du système $y(k)$ et la sortie du modèle identifié $\hat{y}(k)$, est assimilable au bruit blanc. Si on note avec $\epsilon(k)$ l'erreur de prédiction, cela implique :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} [\epsilon(k) \epsilon(k-j)] = 0, \quad j = 1, 2, \dots \quad (5.41)$$

Le test de blancheur appliqué à la séquence $\epsilon(k)$ centrée (la valeur moyenne a été soustraite) est :

$$R(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \epsilon^2(k), \quad R_N(0) = \frac{R(0)}{R(0)} = 1 \quad (5.42)$$

$$R(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \epsilon(k)\epsilon(k-j), \quad R_N(j) = \frac{R(j)}{R(0)}; j = 1, 2, \dots, j_{max} \quad (5.43)$$

$$\text{où} \quad j_{max} = \max(n, m + d) \quad (5.44)$$

et les $R_N(j)$ sont les estimations des auto corrélation (normalisées). La condition (5.41) devient alors :

$$R_N(0) = 1; \quad R_N(j) = 0; \quad j \geq 1 \quad (5.45)$$

Dans les situations pratiques cela ne se produit jamais car $\epsilon(k)$ contient des erreurs résiduelles de structure et le nombre d'échantillons utilisés ne peut pas être infini. En conséquence on considère comme critère pratique de validation (sous l'hypothèse que la séquence $R_N(j)$ ($j \neq 0$) tend vers une distribution gaussienne à valeur moyenne nulle et écart type $\sigma = \frac{1}{\sqrt{N}}$) :

$$R_N(0) = 1; \quad |R_N(j)| \leq \frac{2.17}{\sqrt{N}}; \quad j \geq 1 \quad (5.46)$$

où N est le nombre d'échantillons. Une comparaison dans le domaine temporel entre $y(k)$ et $\hat{y}(k)$ termine la phase de validation (pour les détails théoriques sur la méthode des moindres carrés voir l'annexe A).

5.3 Régulateur RST numérique synthèse par placement de pôles

La deuxième étape de la méthodologie de commande adaptative d'un système industriel est la conception d'un régulateur numérique sur la base d'un modèle du procédé (identifié en boucle ouverte ou en boucle fermée). La méthode retenue pour la synthèse de régulateurs numériques robustes dans le cas linéaire est le placement des pôles avec calibrage des fonctions de sensibilité. Cette méthode repose sur un ensemble de techniques qui ont été développées au cours de ces dernières années. Comme pour toute structure de correction, le concepteur devra déterminer les paramètres de correction (ici les polynômes R, S et T) pour assurer :

- la stabilité en boucle fermée ;
- le suivi asymptotique d'une certaine classe de consigne ;
- le rejet asymptotique d'une certaine classe de perturbation ;
- un régime transitoire satisfaisant.

Cependant, le respect des spécifications n'est pas suffisant pour assurer un fonctionnement satisfaisant de l'installation. Il faudra tenir compte :

- des saturations de procédé ;
- du niveau du bruit de mesure ;
- des erreurs de modélisation.

5.3.1 Principe de synthèse du régulateur RST

Le schéma de régulation qui sera considéré comme base pour les discussions qui suivent est celui représenté en figure 5.4. Le procédé est contrôlé par un régulateur polynômial de type R - S - T à deux degrés de liberté (permettant d'imposer un comportement différent pour la poursuite et la régulation). Le modèle échantillonné du procédé $F(q)$ et les polynômes du régulateur ont les formes suivantes :

$$F(q) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} = \frac{b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots + b_m q^{-m}}{1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \dots + a_n q^{-n}} \quad (5.47)$$

et

$$R(q^{-1}) = 1 + r_1 q^{-1} + r_2 q^{-2} + \dots + r_{n_r} q^{-n_r} \quad (5.48)$$

$$S(q^{-1}) = s_0 + s_1 q^{-1} + s_2 q^{-2} + \dots + s_{n_s} q^{-n_s} \quad (5.49)$$

$$T(q^{-1}) = t_0 + t_1 q^{-1} + t_2 q^{-2} + \dots + t_{n_t} q^{-n_t} \quad (5.50)$$

Avec n, m, n_r, n_s, n_t les degrés des polynômes et $d = n - m$ est le retard pur du modèle. La période d'échantillonnage en seconds de système est T_e et q^{-1} est soit l'opérateur temporel de retard, soit l'opérateur fréquentiel avec $\omega_d \in [0, \frac{\pi}{T_e}]$ la pulsation discrète normalisée.

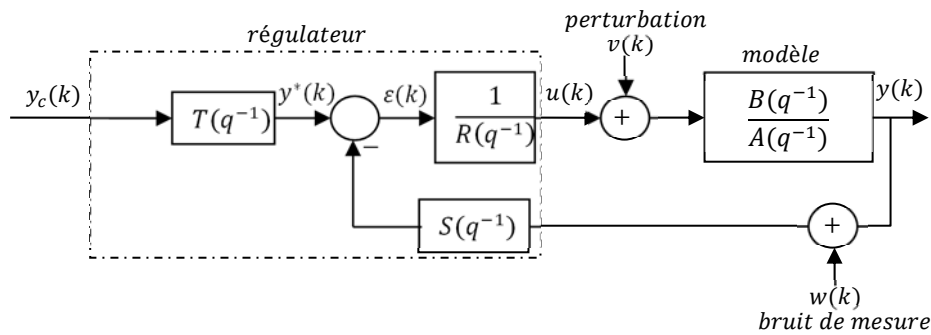


Figure 5.4 : Structure de la commande RST

La loi de commande dans le domaine
e temporelle est :

$$R(q^{-1})u(k) = T(q^{-1})y_c(k) - S(q^{-1})y(k) \quad (5.51)$$

qui exprime la commande $u(k)$ comme moyenne filtrée des mesures $y(k), y(k-1), \dots$, des valeurs précédentes de la commande $u(k-1), u(k-2), \dots$, et les consignes ($y_c(k-1), y_c(k-2), \dots$) qui est enregistrée dans le microcontrôleur ou générée à partir d'un modèle de référence :

$$F_m(q) = \frac{B_m(q^{-1})}{A_m(q^{-1})} \quad (5.52)$$

avec

$$\begin{aligned} A_m(q^{-1}) &= 1 + a_1^m q^{-1} + a_2^m q^{-2} + \dots + a_n^m q^{-n} \\ B_m(q^{-1}) &= b_1^m q^{-1} + b_2^m q^{-2} + \dots + b_m^m q^{-m} \end{aligned}$$

La fonction de transfert en boucle fermée, entre la référence filtrée $y_c(k)$ et la sortie $y(k)$ (boucle de poursuite), est donnée par :

$$H_{BF}(z) = \frac{T(z^{-1})B(z^{-1})}{A_{BF}(z^{-1})} \quad (5.53)$$

où

$$A(z^{-1})R(z^{-1}) + B(z^{-1})S(z^{-1}) = A_{BF}(z^{-1}) \quad (5.54)$$

Dans l'équation (5.54), le polynôme $A_{BF}(z^{-1})$ représente les pôles désirés de la boucle fermée. La partie gauche de (5.54) est le dénominateur des fonctions de sensibilité.

5.3.1.1 Les spécifications des performances

Un problème de commande est généralement décrit par un cahier des charges qui définit les spécifications à atteindre, dans le domaine temporel et/ou fréquentiel.

5.3.1.1.1 Spécifications temporelles

Les spécifications pour la commande d'un système sont souvent liées aux caractéristiques de la réponse indicielle du système.

- **Le temps de montée t_m** est le temps nécessaire au système pour que sa sortie passe de 10% à 90% de sa valeur finale.
- **Le dépassement maximal $D\%$** est la différence entre la valeur maximale prise par la sortie du système et la valeur finale divisée par la même valeur finale.
- **Le temps du premier maximum T_M** est l'instant caractérisant le premier maximum.
- **Le temps d'établissement t_r à $x\%$** ou encore le temps de réponse est le temps nécessaire pour que la réponse du système demeure dans la fourchette $\pm x\%$ autour de la valeur finale (en prend couramment $x\% = 10\%, 5\% \text{ ou } 2\%$).

Ces quatre quantités permettent de caractériser assez complètement le régime transitoire d'un système. Si elles sont assez facilement mesurables pratiquement, leurs expressions analytiques ne sont pas toujours évidentes à établir.

5.3.1.1.2 Spécifications fréquentielles

Les spécifications pour la commande d'un système peuvent être aussi exprimées en termes des caractéristiques de la réponse fréquentielle du système.

- **La bande passante BP** : est la fréquence maximale à laquelle une sinusoïde à la sortie du système peut reproduire, sans trop d'atténuation, une sinusoïde sur la consigne. La quantité BP est une mesure de la vitesse de réponse d'un système et sa valeur correspond à la fréquence à laquelle le gain en dB devient inférieur à $-3dB$.

- **Le facteur de résonance MR** : est le rapport entre le gain maximum du module de la réponse fréquentielle et le gain à la fréquence nulle. La quantité MR est une mesure de l'amortissement du système. L'étude d'un système en boucle fermée dans le domaine fréquentiel est extrêmement importante. Car, il permet d'évaluer ses caractéristiques de robustesse de manière très significative.

5.3.1.1.3 Les marges de robustesse

Nous rappelons ici les marges de robustesse (voir aussi la figure 5.5) communément utilisées pour mesurer la réserve de stabilité du système en boucle fermée par rapport à une variation de la fonction de transfert $H_{BO}(e^{j\omega})$ de la boucle ouverte :

- **La marge de gain MG** : correspond à l'inverse du gain de $H_{BO}(e^{j\omega})$ à la fréquence où le déphasage est égale à -180 . Physiquement, elle représente donc la quantité de gain que l'on peut ajouter (en dB) dans la boucle avant que la boucle fermée ne devienne instable. Des valeurs typiques sont $MG \geq 2$ ($6dB$).

La marge de phase $M\varphi$: définit la marge de sécurité sur la phase. Elle est donnée par ($M\varphi = 180 - \arg(H_{BO}(e^{j\omega_\varphi}))$) ; où ω_φ est la pulsation à laquelle $|H_{BO}(e^{j\omega_\varphi})| = 1$. Physiquement la marge de phase représente la quantité de phase que l'on peut perdre dans la

- boucle avant que la boucle fermée ne devienne instable. D'un point de vue pratique, un réglage assez courant (mais on peut évidemment avoir d'autres exigences) est d'imposer :

$$\begin{cases} MG = 10 \\ M\varphi \geq 45^\circ \end{cases} \quad (5.55)$$

- **La marge de module ΔM** : est la mesure de la distance minimale entre le point critique dans le plan de Nyquist $(-1, 0j)$ et l'hodographe de la fonction de transfert de la boucle ouverte ($\Delta M = \min_{(\forall \omega)} |1 + H_{BO}(e^{j\omega\varphi})|$). La valeur de ΔM mesure l'incertitude additive non-structurée tolérée par le H_{BO} à toutes les fréquences, on donne souvent comme contrainte $\Delta M \geq 0.5$ ou $\Delta M \geq -6dB$.
- **La marge de retard $\Delta\tau$** : est le retard supplémentaire maximal tolérable pour H_{BO} $\Delta\tau = \min \left[\frac{\Delta\varphi_i}{\omega_i} \right]$ avec $\Delta\varphi_i$ marge de phase en ω_i exprimée en *rad*. C'est le retard parasite maximum que l'on acceptera. Pour les systèmes temps discret échantillonnés avec une période d'échantillonnage T_e , une condition typique à atteindre est $\Delta\tau \geq T_e$. Par ailleurs, une bonne marge de module implique des bonnes marges de gain et phase, mais l'inverse n'est pas toujours vrai (pour des détails sur les relations entre les marges voir [Lan02]). Les marges de module et de retard sont des indices plus fiables.

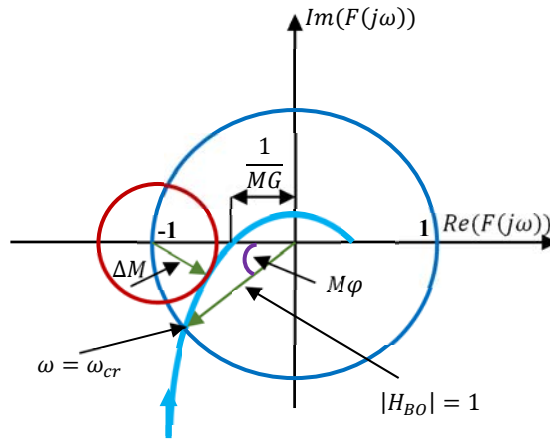


Figure 5.5 : Marges de robustesse

5.3.1.2 Calcul de la dynamique de régulation

Les polynômes R et S du régulateur sont généralement factorisés en une partie fixe (les polynômes R_f et S_f imposés par les spécifications de synthèse, soit fixés pour calibrer des fonctions de sensibilité) et une autre partie liée au placement de pôles (R_0 et S_0).

$$\begin{cases} R(z^{-1}) = R_f(z^{-1})R_0(z^{-1}) \\ S(z^{-1}) = S_f(z^{-1})S_0(z^{-1}) \end{cases} \quad (5.56)$$

Les polynômes $R(z^{-1})$ et $S(z^{-1})$ de manière générale sont les solutions de l'équation de Bézout (5.57) de placement de pôles.

$$\begin{aligned} A(z^{-1})R_f(z^{-1})R_0(z^{-1}) + B(z^{-1})S_f(z^{-1})S_0(z^{-1}) &= A_{BF}(z^{-1}) \\ &= A_{BF}^d(z^{-1}) A_{BF}^a(z^{-1}) \end{aligned} \quad (5.57)$$

Les pôles désirés doivent être fixés afin de satisfaire les spécifications de performance et de robustesse imposées. L'identité de Bézout a une solution unique minimale sous les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \deg(A_{BF}(z^{-1})) &= n_{BF} \leq n + m - 1; \\ \deg(R(z^{-1})) &= n_r = m - 1; \\ \deg(S(z^{-1})) &= n_s = n - 1 \end{aligned} \quad (5.59)$$

ou si on considère les parties fixes imposées au régulateur, la condition devient :

$$\deg(R_0) = n_{r_0} = m + \deg(S_f) - 1; \deg(S_0) = n_{s_0} = n + \deg(R_f) - 1$$

5.3.1.3 Calcul de la dynamique de poursuite

La partie $T(z^{-1})$ de la poursuite est utilisée dans le régulateur pour compenser la dynamique de la boucle fermée afin que la fonction de transfert entre $y_c(k)$ et $y(k)$ soit très proche du modèle de référence $F_m(z^{-1})$. La fonction de transfert de la boucle de poursuite, en tenant compte de ce modèle de référence est exprimée comme :

$$H_{yy_c}(z) = \frac{B(z^{-1})T(z^{-1})}{A_{BF}(z^{-1})} = \frac{B_m(z^{-1})}{A_m(z^{-1})} \quad (5.60)$$

Le polynôme $T(z^{-1})$ peut avoir l'une des trois structures suivantes :

- $T(z^{-1}) = \frac{A_{BF}(z^{-1})}{B(1)}$ qui correspond à simplifier les pôles imposés par la boucle de régulation, normaliser le gain statique à 1 et imposer comme dynamique de poursuite de modèle spécifié par le modèle de référence $F_m(z^{-1})$.
- $T(z^{-1}) = \frac{A_{BF}^d(z^{-1})A_{BF}^a(1)}{B(1)}$ qui correspond à simplifier les seuls pôles dominant (donnés par le polynôme $A_{BF}^d(z^{-1})$ de la régulation en laissant les pôles auxiliaires inchangés (spécifiés par $A_{BF}^a(z^{-1})$) et son gain statique est ajusté.
- $T(z^{-1}) = \frac{A_{BF}(1)}{B(1)}$ est un gain constant ($= S(1)$ si $R(z^{-1})$ contient un terme $1 - z^{-1}$) et on impose la même dynamique soit en poursuite qu'en régulation $F_m(z) = 1$.

Dans la pratique, on choisit souvent un modèle de référence de 2^{ème} ordre avec la dynamique désirée de la poursuite.

5.3.1.4 Calcul du régulateur : comment placer les pôles

On a montré auparavant que l'emplacement des pôles de la boucle fermée caractérise complètement la nature de la réponse temporelle du système et ses propriétés de robustesse. Il est intéressant de fournir un ensemble de règles qui puissent aider à déterminer la configuration des pôles qui conduit à la boucle fermée désirée.

Dans la pratique on classe les pôles en rapides et lents (ou dominants), en faisant référence à la rapidité avec laquelle le mode naturel associé tend à disparaître. On placera, comme pôles dominants, les pôles qui correspondent à la dynamique désirée (spécifiée par n paires de pôles complexes conjugués placés aux fréquences désirées). On rappelle que du point de vue de la robustesse un bon choix initial (si on ne veut pas accélérer le système) correspond généralement à imposer en boucle fermée les pôles de la boucle ouverte (si stables et bien amortis, les cas échéants on imposera un amortissement compris entre 0.7 et 1). Les pôles qui restent (pôles auxiliaires) sont utilisés pour améliorer la robustesse de la boucle fermée. En général on place des pôles de la forme :

$$A_{BF}^a(z^{-1}) = (1 - \alpha z^{-1})^{n_a} \quad (5.61)$$

où α est le pôle en haute fréquence de multiplicité n_a placé suffisamment loin de pôles dominants mais tel que les marges de robustesse soient respectées, et

$$n_a \leq n + m - 1 + \deg(S_f(z^{-1})) + \deg(R_f(z^{-1})) - \deg(A_{BF}^d(z^{-1})) \quad (5.62)$$

Problèmes

Problème N°1 : On considère la fonction

$$V(x) = x^T A x + b^T x + c$$

Où x et b sont des vecteurs colonnes, A est une matrice et c est un scalaire.

- 1- Vérifier que le gradient $\text{grad}_x V(x) = (A + A^T)x + b$
- 2- Utiliser la première question pour calculer le minimum x^* .

Problème N°2 : considère

$$y(k) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + e(k), k = 1, 2, \dots$$

$\{e(k)\}$ est une séquence indépendante normale $N(0, \sigma)$ variable aléatoire.

- 1) Déterminer l'estimation des b_0, b_1 utilisant la méthode des moindres carrés avec un échelon comme entrée $\{u(k)\}$.
- 2) Si $\{u(k)\}$ est un bruit blanc interpréter les résultats.

Problème N°3 : On considère un procédé du double intégrateur donné par la fonction de transfert

$$G(p) = \frac{1}{p^2}$$

En prenant comme entrée de référence un échelon. Souhaitant déterminer les paramètres d'une loi de commande de type RST permettant d'annuler l'erreur statique en un temps fini.

- 1- Trouver le modèle discret du procédé.
- 2- Calculer le régulateur RST utilisant l'équation de diophantienne. Avec $T_e = 1s$
- 3- Etudier la réponse par rapport un échelon.

Problème N°4 : Soit le système

$$G_s(p) = \frac{1}{p^2 + 1}$$

- 1- Montrer que la fonction de transfert de ce système échantillonné à la période T_e (convertisseur numérique analogique modélisé par un bloqueur d'ordre zéro) est :

$$G(z) = \frac{(1 - \cos(T_e))(z + 1)}{z^2 - 2 \cos(T_e) z + 1}$$

- 2- Choisir en première approximation pour $T_e = 1s$, calculer la fonction de transfert $G(z)$.
- 3- Ecrire la fonction $G(z)$ sous la forme de z^{-1} .
- 4- Donner le schéma de principe d'un système asservi avec la commande $R.S.T$.

5- On souhaite calculer un correcteur sous forme $R.S.T$ qui assure les spécifications suivantes

($\xi = 0.7, \omega_n = 5 \text{ rad/s}$) :

- Calculer le polynôme de dénominateur $A_m(z^{-1})$ du modèle de référence $G_m(z)$
- Déterminer les degrés minimaux pour les polynômes R, S pour assurer les spécifications.
- Donner la fonction de transfert en boucle fermée entre la sortie et la consigne $Y_c(z)$ et $Y(z)$.
- Calculer les polynômes $R(z^{-1}), S(z^{-1})$ et $T(z^{-1})$ qui assurent les spécifications de régulation et de poursuite.

Indices :

$$\frac{1}{p(p^2 + 1)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1}$$

$$\text{Transformée en } z : Z\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{z}{z-1} \text{ et } Z\left(\frac{p}{p^2 + \omega_0^2}\right) = \frac{z^2 - z \cos(\omega_0 T_e)}{z^2 - 2z \cos(\omega_0 T_e) + 1}$$

CHAPITRE 6

COMMANDE ADAPTATIVE A MODELE DE REFERENCE

6.1 Introduction

La commande adaptative à modèle de référence (MRAC : Model Reference Adaptive Control) est une des commandes adaptatives les plus connues. Cette approche de commande a été originalement proposée pour résoudre un problème dans lequel les spécifications de performances sont données en termes d'un modèle de référence. Ce modèle de référence donne une indication sur comment la sortie du système doit idéalement répondre à un signal de commande. Son principe de base (détaillé dans la suite) consiste à adapter les paramètres du contrôleur en fonction de l'erreur entre le système et le modèle (voir la figure 6.1).

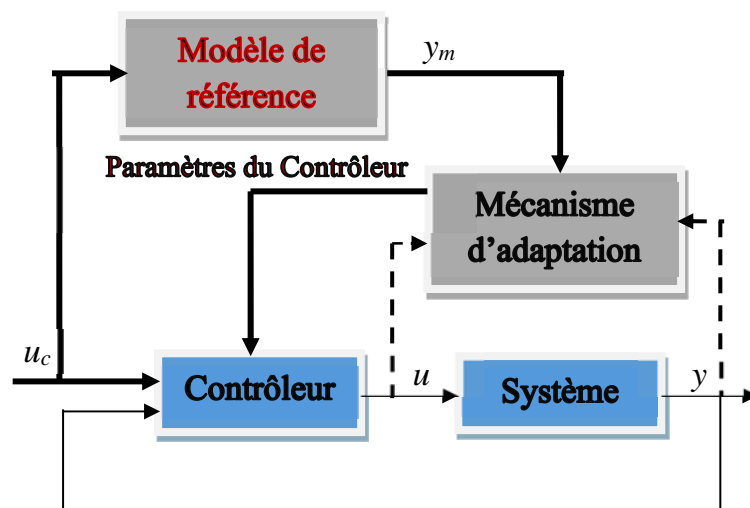


Figure 6.1 : Schéma de la commande adaptative à modèle de référence

6.2 Principe de base

Comme il est montré sur la figure 6.1, un schéma de commande adaptative comporte principalement deux boucles :

- Une boucle interne qui a la structure d'une boucle classique de régulation,
- Une boucle externe qui est la boucle adaptative.

Les paramètres du régulateur adaptatif sont calculés à partir de l'erreur $e = y - y_m$ par la boucle adaptative pour un modèle de référence donné. On peut classer les méthodes d'ajustement des paramètres du correcteur adaptatif à modèle de référence en deux catégories

- 1) Les méthodes du gradient,
- 2) Les méthodes basées sur la théorie de la stabilité.

6.3 Les méthodes du gradient

6.3.1 Règle d'adaptation du MIT

Soit un système en boucle fermée dont le correcteur possède un seul paramètre θ . Soit y_m la sortie du modèle de référence et $e = y - y_m$ l'erreur de poursuite du modèle de référence. On considère la fonction coût suivante :

$$J(\theta) = \frac{1}{2} e^2 \quad (6.1)$$

θ Représente le vecteur des paramètres du contrôleur à adapter

Pour minimiser J , il est logique de faire varier les paramètres dans la direction négative du gradient de J :

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\partial J}{\partial \theta} = -\gamma e \frac{\partial e}{\partial \theta} \quad (6.2)$$

$$\frac{dJ}{dt} = e \frac{de}{dt} = e \frac{\partial e}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} = -\gamma e^2 \left(\frac{\partial e}{\partial \theta} \right)^2 \quad (6.3)$$

$\frac{\partial e}{\partial \theta}$ représente la sensibilité de l'erreur par rapport aux paramètres. Il indique comment l'erreur est influencée par une variation de paramètres.

6.3.2 Autres critères

D'autres critères peuvent être utilisés

$$J(\theta) = |e| \quad (6.4)$$

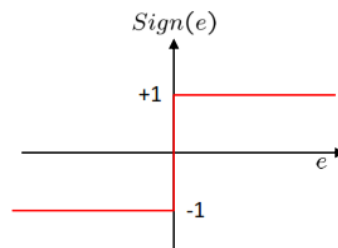
Ce qui donne en appliquant l'algorithme du gradient la règle de mise à jour suivante :

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\partial J}{\partial \theta} = -\gamma \frac{\partial e}{\partial \theta} \text{sign}(e) \quad (6.5)$$

On utilise aussi une autre règle de mise à jour appelée sign-sign algorithme

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\partial J}{\partial \theta} = -\gamma \text{sign} \left(\frac{\partial e}{\partial \theta} \right) \text{sign}(e) \quad (6.6)$$

$$\text{Sign}(e) = \begin{cases} 1 & , \quad e > 0 \\ 0 & , \quad e = 0 \\ -1 & , \quad e < 0 \end{cases}$$



Ce dernier algorithme est simple et rapide. La version discrète est utilisée en télécommunications.

Exemple 6.1 (Commande adaptative en boucle ouverte), soit le système linéaire monovisible représenté sur la figure 6.2.

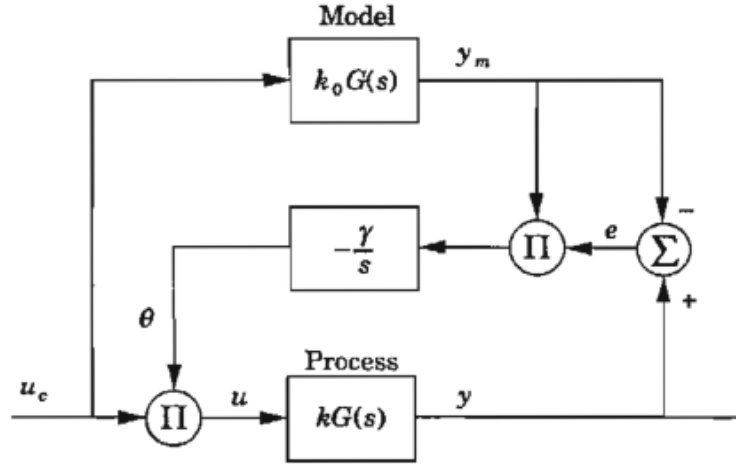


Figure 6.2 : Adaptation de gain en boucle ouverte

La fonction de transfert du système $kG(s)$ avec $G(s)$ est connue mais le gain k est inconnu. L'objectif est de trouver un correcteur en boucle ouverte pour que système corrigé possède la fonction de transfert de modèle de référence $G_m(s) = k_0 G(s)$:

On utilise pour cela un correcteur proportionnel. La commande est alors donnée par

$$u = \theta u_c \quad (6.7)$$

Avec θ le paramètre ajustable du correcteur et u_c la consigne. Cette fonction de transfert est égale à $G_m(s)$ si le paramètre θ est choisi

$$\theta = \frac{k_0}{k} \quad (6.8)$$

Le gain k est inconnu. On utilise alors la règle MIT pour la mise à jour du paramètre θ . L'erreur est

$$e = y - y_m = kG(p)\theta u_c - k_0 G(p)u_c = G(p)(k\theta - k_0)u_c$$

La règle MIT donne la loi d'adaptation suivante

$$\frac{d\theta}{dt} = -\dot{\gamma} \frac{\partial e}{\partial \theta} = -\dot{\gamma} k \frac{k_0}{k_0} G(p)u_c e = -\dot{\gamma} \frac{k}{k_0} y_m e = -\gamma y_m e \quad (6.9)$$

Où $\gamma = -\dot{\gamma} \frac{k}{k_0}$ a été introduit à la place de $\dot{\gamma}$

Le schéma de la commande est donné par la figure.6.2

Remarque 6.1. Pour avoir le signe correct de γ , il faut connaître le signe k .

Exemple 6.2 (Commande adaptative d'un système du premier ordre). Soit un système linéaire décrit par un modèle du premier ordre :

$$\frac{dy}{dt} = -ay + bu \quad (6.10)$$

Où u est la commande variable, et y est la sortie mesurée. Supposant que, on veut obtenir un système en boucle fermé décrit par

$$\frac{dy_m}{dt} = -a_m y_m + b_m u_c \quad (6.11)$$

Soit le contrôleur donné par

$$u = \theta_1 u_c - \theta_2 y \quad (6.12)$$

En remplaçant u dans (6.10)

$$\frac{dy}{dt} = -ay + b(\theta_1 u_c - \theta_2 y) = -(a + b\theta_2)y + b\theta_1 u_c \quad (6.13)$$

Qui représente le système en boucle fermée. On aura un comportement similaire (perfect model-following) au modèle de référence si :

$$b_m = b\theta_1 \Rightarrow \theta_1 = \theta_1^0 = \frac{b_m}{b}$$

$$a_m = a + b\theta_2 \Rightarrow \theta_2 = \theta_2^0 = \frac{a_m - a}{b}$$

L'ordre du système et du modèle de référence étant le même, il est possible de faire une poursuite parfaite du modèle de référence. En introduisant l'opérateur de différentiation $p = \frac{d}{dt}$ l'équation (6.13) devient

$$y = \frac{b\theta_1}{p + a + b\theta_2} u_c \text{ et } e = y - y_m$$

On calcul alors

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_1} = \frac{b}{p + a + b\theta_2} u_c$$

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_2} = -\frac{b^2 \theta_1}{(p + a + b\theta_2)^2} u_c = -\frac{b}{p + a + b\theta_2} y$$

On ne peut pas utiliser directement cette formule, car les paramètres du système a et b sont inconnus, une approximation est donc nécessaire. On considère maintenant cette approximation basée sur l'observation, $p + a + b\theta_2^0 \approx p + a_m$ quand les paramètres donnent une poursuite parfaite de modèle de référence. On utilisera donc l'approximation.

$$p + a + b\theta_2 \approx p + a_m$$

Par conséquent

$$\frac{d\theta_1}{dt} = -\gamma \left(\frac{a_m}{p + a_m} u_c \right) e \quad (6.14)$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \gamma \left(\frac{a_m}{p + a_m} y \right) e \quad (6.15)$$

Avec $\gamma = \dot{\gamma}b/a_m$, le signe de paramètre b doit être connu pour avoir un gain γ de signe correct. On remarque que, le filtre a également été normalisé pour que son gain statique égal unité.

Schéma bloc d'implémentation

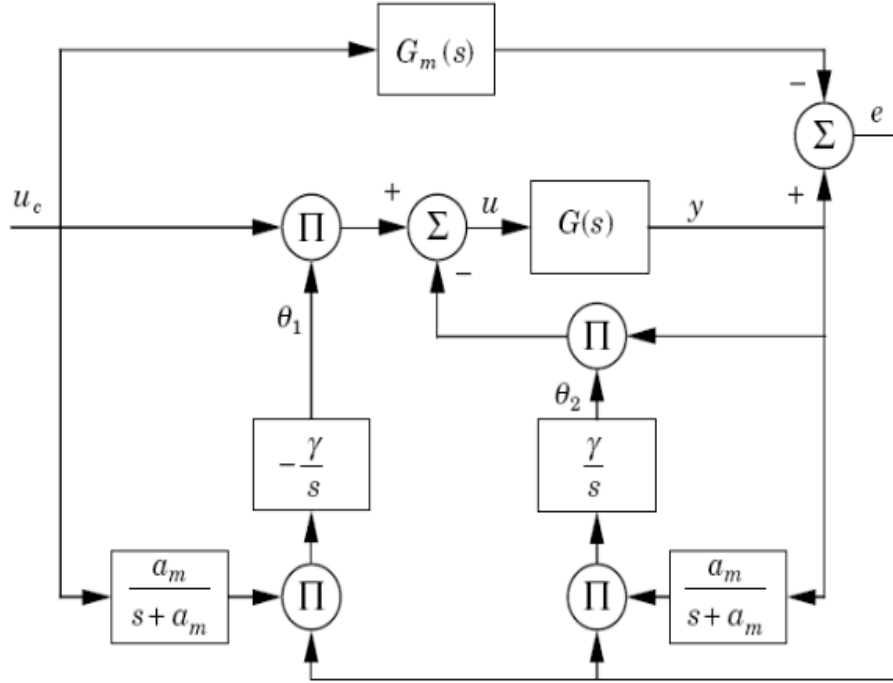


Figure 6.3 : Schéma bloc d'une commande adaptative MRAC pour un système de premier ordre

Application à un système de premier ordre

Les différents paramètres sont $a = 1$, $b = 0,5$ et $a_m = b_m = 2$, l'entrée est un signal carré avec une amplitude égale 1, et $\gamma = 1$.

L'évolution de la sortie et la commande

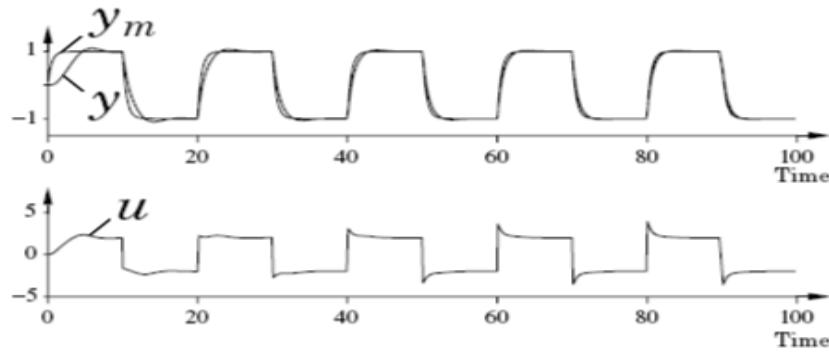


Figure 6.4 : L'évolution de la sortie et la commande

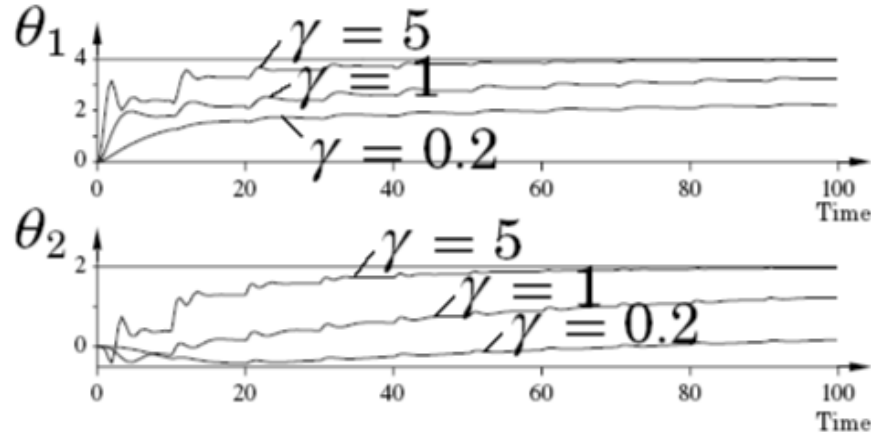


Figure 6.5 : Evolution des paramètres selon différents gains d'adaptation

Remarque 6.2 : Même si l'erreur $e = y - y_m \rightarrow 0$, cela n'implique pas forcément que $\theta \rightarrow \theta^0$ qui est la vraie valeur des paramètres.

6.3.3 Normalisation de la règle MIT

Pour l'algorithme de la règle MIT :

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma \varphi e \quad (6.16)$$

Où on a introduit

$$\varphi = -\frac{\partial e}{\partial \theta}$$

La normalisation de l'algorithme est donnée par

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\gamma \varphi e}{\alpha + \varphi^T \varphi}, \alpha > 0 \quad (6.17)$$

Rend l'algorithme moins sensible au signal d'entrée. Le paramètre α est introduit pour éviter les difficultés quand φ est petit.

6.4 Theorie de Lyapunov

Il n'y a pas de garantie qu'une commande adaptative basée sur la règle MIT donnera un système en boucle fermée stable.

6.4.1 Stabilité des système non linéaires à temps variant

Soit le système non linéaire libre à temps variant

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (6.18)$$

On va rappeler les principales définitions relatives à la stabilité.

Définition 6.1 (Point d'équilibre). Le point $x_e = 0$ est un point d'équilibre du système (6.18) si

$$f(x_e, t) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

Définition 6.2 (Stabilité uniforme). Le point d'équilibre $x_e = 0$ est stable si

$$\forall t_0 \geq 0 \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(t_0, \varepsilon) : \|x(t_0)\| < \delta(\varepsilon, t_0) \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$$

Si $\delta(t_0, \varepsilon) = \delta(\varepsilon)$ est indépendant de t_0 , alors le point d'équilibre est uniformément stable.

Définition 6.3 (Stabilité asymptotique) Le point d'équilibre $x_e = 0$ est asymptotiquement stable s'il est stable et qu'en plus :

$$\exists R > 0, \forall t_0 \geq 0 \quad \|x(t_0)\| < R \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

On introduira maintenant la notion de fonction de classe κ

Définition 6.4 (Fonction de classe κ). La fonction continue $\alpha: [0, a) \rightarrow [0, \infty)$ est de classe κ si α est strictement croissante et $\alpha(0) = 0$. La fonction α est de classe κ_∞ si elle est de classe κ et que : $a = \infty$ et $\alpha(r) \rightarrow \infty$ comme $r \rightarrow \infty$

6.4.2 Théorème de Lyapunov pour les systèmes à temps variant

Théorème 6.1 (Stabilité d'un système à temps variant). Soit $x_e = 0$ un point d'équilibre de $\dot{x} = f(x, t)$. Soit $D = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| < r\}$ la boule de rayon r , alors s'il existe une fonction V continument différentiable tel que :

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x, t) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad (6.19)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) \leq -\alpha_3(\|x\|), \text{ pour } t \geq 0$$

Les fonctions α_1, α_2 et α_3 sont de classe κ , alors $x_e = 0$ est uniformément asymptotiquement stable.

Remarque 6.3. En pratique, il faut borner supérieurement $V(x, t)$ par une fonction indépendante de t .

6.4.3 Lemme de Barbalat

Lemme 6.1 (Lemme de Barbalat). Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et uniformément continue pour $t \geq 0$. Si la limite de l'intégrale $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t g(s) ds$ existe et qu'elle est finie alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$$

Théorème 6.2 (Bornitude et ensemble de convergence). Soit $D = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| < r\}$ Supposons que $f(x, t)$ est Lipschitzienne sur $D \times [0, \infty)$. Soit V une fonction continument différentiable tel que

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x, t) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) \leq -W(x) \leq 0, \text{ pour } t \geq 0 \text{ et } \forall x \in D$$

Avec α_1 et α_2 des fonctions de classe κ définies sur $[0, r)$ et $W(x)$ continue sur D . De plus, on suppose que dV/dt est uniformément continue en t , alors les solutions de l'équation (6.18) avec $\|x(t_0)\| < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$ sont bornées et vérifient $\lim_{t \rightarrow \infty} W(x(t)) \rightarrow 0$. De plus, si toutes les

hypothèses sont vérifiées globalement et que $\alpha_1 \in \kappa_\infty$ alors le résultat est vrai $\forall x(t_0) \in \mathbb{R}^n$

Remarque 6.4 : Il suffit d'avoir d^2V/dt^2 bornée pour avoir dV/dt uniformément continue.

6.5 Synthèse de la commande MRAC par la théorie de Lyapunov

L'utilisation de la théorie de Lyapunov sur la stabilité des systèmes non stationnaires pour la synthèse d'une commande adaptative par modèle de référence (MRAC) passe par les étapes suivantes :

- Formuler l'équation différentielle de l'erreur de poursuite du modèle de référence

$$e = y - y_m$$

- Trouver une fonction candidate de Lyapunov et un mécanisme d'adaptation pour assurer

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

- Généralement dV/dt est seulement semi-définie négative. Il est alors possible d'utiliser le théorème 6.2 pour démontrer la convergence de l'erreur vers zéro.

Exemple 6.3 (Synthèse MRAC par la méthode de Lyapunov). Soit le modèle de référence linéaire à temps invariant du premier ordre (voir l'exemple 6.2).

$$\frac{dy_m}{dt} = -a_m y_m + b_m u_c \quad (6.20)$$

On souhaite imposer son comportement à un système qui est aussi de premier ordre

$$\frac{dy}{dt} = -ay + bu \quad (6.21)$$

par une commande proportionnelle sur la mesure et la consigne

$$u = \theta_1 u_c - \theta_2 y \quad (6.22)$$

On rappelle que l'erreur de poursuite est donnée par

$$e = y - y_m$$

ce qui conduit après simplification à l'équation différentielle suivante de l'erreur de poursuite

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \frac{dy}{dt} - \frac{dy_m}{dt} = -ay + b(\theta_1 u_c - \theta_2 y) + a_m y_m - b_m u_c + a_m y - a_m y \\ \frac{de}{dt} &= -a_m e - (b\theta_2 + a - a_m)y + (b\theta_1 - b_m)u_c \end{aligned} \quad (6.23)$$

Si les paramètres du système à commander étaient connus, alors en posant

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_1^0 = \frac{b_m}{b} \\ \theta_2 = \theta_2^0 = \frac{a_m - a}{b} \end{cases} \quad (6.24)$$

Comme les paramètres a et b sont inconnus, on construira le mécanisme d'ajustement des paramètres qui va faire converger θ_1 vers θ_1^0 et θ_2 vers θ_2^0 pour $t \rightarrow \infty$.

On introduit la fonction quadratique suivante

$$V(e, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} \left(e^2 + \frac{1}{b\gamma} (b\theta_2 + a - a_m)^2 + \frac{1}{b\gamma} (b\theta_1 - b_m)^2 \right) \quad (6.25)$$

Avec $\gamma > 0$ une constante strictement positive. On remarque que $V(0, \theta_1^0, \theta_2^0) = 0$. La dérivée temporelle de la fonction V est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= e \frac{de}{dt} + \frac{1}{\gamma} (b\theta_2 + a - a_m) \frac{d\theta_2}{dt} + \frac{1}{\gamma} (b\theta_1 - b_m) \frac{d\theta_1}{dt} \\ &= -a_m e^2 + \frac{1}{\gamma} (b\theta_2 + a - a_m) \left(\frac{d\theta_2}{dt} - \gamma y e \right) + \frac{1}{\gamma} (b\theta_1 - b_m) \left(\frac{d\theta_1}{dt} + \gamma u_c e \right) \end{aligned}$$

Si les paramètres sont ajustés comme

$$\begin{cases} \frac{d\theta_1}{dt} = -\gamma u_c e \\ \frac{d\theta_2}{dt} = \gamma y e \end{cases} \quad (6.26)$$

On trouve

$$\frac{dV}{dt} = -a_m e^2 \quad (6.27)$$

Lyapunov	MIT
$\frac{d\theta_1}{dt} = -\gamma u_c e$	$\frac{d\theta_1}{dt} = -\gamma \left(\frac{a_m}{s + a_m} \right) u_c e$
$\frac{d\theta_2}{dt} = \gamma y e$	$\frac{d\theta_2}{dt} = \gamma \left(\frac{a_m}{s + a_m} \right) y e$

Table 6.1 : Comparaison des méthodes de Lyapunov et MIT.

On constate que $\dot{V} \leq 0$ car si $e = 0$ et $\theta_1 \neq \theta_1^0$ ou $\theta_2 \neq \theta_2^0$ on aura $\dot{V} = 0$. On peut alors déduire que $V(t) \leq V(0)$ car $V(t)$ est décroissante, ce qui implique que e , θ_1 et θ_2 soient bornés et que $y = e + y_m$ soit aussi borné en supposant que le modèle de référence $G_m(s)$ est stable et la consigne u_c bornée. De plus, la dérivée seconde par rapport au temps t de V est donné par

$$\frac{d^2V}{dt^2} = -2a_m e \frac{de}{dt} = -2a_m e (-a_m e - (b\theta_2 + a - a_m)y + (b\theta_1 - b_m)u_c)$$

Comme e, y et u_c sont bornés, alors \dot{V} est aussi bornée, donc \dot{V} est uniformément continue le théorème 6.2 permet de conclure que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

Toutefois, ceci n'assure pas la convergence $\theta_1 \rightarrow \theta_1^0$ et $\theta_2 \rightarrow \theta_2^0$ Il faut imposer une condition sur l'excitation.

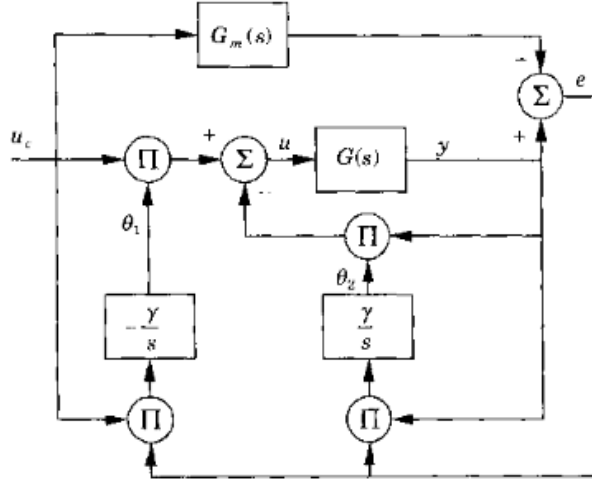


Figure 6.6 : Schéma bloc d'une commande MRAC basée sur la méthode Lyapunov

Le tableau suivant compare les méthodes de synthèse d'un MRAC sur l'exemple du système du premier ordre pour la poursuite d'un modèle de référence du premier ordre avec une commande proportionnelle sur la consigne et la sortie. La règle de mise à jour utilisant la méthode MIT peut être obtenue de la règle la méthode de Lyapunov en remplaçant les signaux u_c et y par leur valeur filtrée $\left(\frac{a_m}{s+a_m}\right)u_c$ et $\left(\frac{a_m}{s+a_m}\right)y$. Dans les deux cas, la règle d'adaptation peut être écrite comme suit

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma \varphi e \quad (6.27)$$

Avec

θ vecteur des paramètres

$$\varphi = [-u_c, y]^T$$

Règle de Lyapunov

$$\varphi = \left(\frac{a_m}{s+a_m}\right)[-u_c, y]^T$$

Règle MIT

La règle de Lyapunov est plus simple et ne nécessite pas de filtrage.

5.6 Synthèse de MRAC dans l'espace d'état

Soit le SLTI décrit par sa représentation d'état

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \quad (6.28)$$

On souhaite poursuivre un modèle de référence donné également par sa représentation d'état

$$\frac{dx_m}{dt} = A_m x_m + B_m u_c \quad (6.29)$$

On utilise une commande qui combine un retour d'état linéaire et une action proportionnelle sur la consigne

$$u = Mu_c - Lx \quad (6.30)$$

Le système en boucle fermée devient

$$\frac{dx}{dt} = (A - BL)x + BMu_c = A_c(\theta)x + B_c(\theta)u_c \quad (6.31)$$

La paramétrisation de la loi de commande peut se faire de différentes manières. Ceci revient à choisir les paramètres des matrices M et L .

5.6.1 Condition de compatibilité

Elle exprime le fait qu'il existe des valeurs de paramètres de commande tel que le système en boucle fermée soit identique au modèle de référence

$$\exists \theta^0: \begin{cases} A_c(\theta^0) = A_m \\ B_c(\theta^0) = B_m \end{cases} \quad (6.32)$$

Dans ce cas, on réalise une poursuite parfaite du modèle de référence. On a alors

$$\begin{cases} A - A_m = BL \\ B_m = BM \end{cases} \quad (6.33)$$

On peut conclure de l'équation (6.33) que les colonnes de la matrice $(A - A_m)$ sont une combinaison linéaire des colonnes de B et que les colonnes de B_m sont aussi une combinaison linéaire des colonnes de B . Si B et B_m sont linéairement indépendantes, on peut écrire

$$\begin{aligned} L &= (B^T B)^{-1} B^T (A - A_m) = (B_m^T B)^{-1} B_m^T (A - A_m) \\ M &= (B^T B)^{-1} B^T B_m = (B_m^T B)^{-1} B_m^T B_m \end{aligned}$$

5.6.2 Equation différentielle de l'erreur

L'erreur de poursuite du vecteur d'état est définie par

$$e = y - y_m$$

sa dérivée temporelle est alors

$$\frac{de}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dx_m}{dt} = Ax + Bu - A_m x_m - B_m u_c$$

en rajoutant en soustrayant $A_m x$ au second terme de l'équation, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{de}{dt} &= A_m e + (A - A_m - BL)x + (BM - B_m)u_c \\ &= A_m e + (A(\theta^0) - A_m)x + (B(\theta^0) - B_m)u_c \\ &= A_m e + \Psi(\theta - \theta^0)\end{aligned}\tag{6.34}$$

Supposant que l'équations (6.32) sont vérifiées

On choisit la fonction quadratique candidate suivante

$$V(e, \theta) = \frac{1}{2}(\gamma e^T P e + (\theta - \theta^0)^T ((\theta - \theta^0)))\tag{6.35}$$

Avec $P > 0$ une matrice symétrique définie positive. En supposant que Q est une matrice symétrique définie positive qui vérifie l'équation suivante

$$A_m^T P + P A_m = -Q$$

La dérivée temporelle de V , après calcul, est donnée par

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= -\frac{\gamma}{2}e^T Q e + \gamma(\theta - \theta^0)^T \Psi^T P e + (\theta - \theta^0)^T \frac{d\theta}{dt} \\ &= -\frac{\gamma}{2}e^T Q e + (\theta - \theta^0)^T \left(\frac{d\theta}{dt} + \Psi^T P e \right)\end{aligned}\tag{6.36}$$

Afin de rendre \dot{V} semi-définie négative, on choisit la règle d'adaptation suivante

$$\frac{d\theta}{dt} = -\Psi^T P e\tag{3.37}$$

Ce qui donne

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{\gamma}{2}e^T Q e\tag{3.38}$$

De même qu'avec l'exemple 6.3, en procédant de la même façon et en utilisant le théorème 6.2 et le Lemme de Barbalat, on conclut que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0\tag{3.39}$$

PARTIE III : COMMANDE PREDICTIVE

CHAPITRE 7

INTRODUCTION A LA COMMANDE PREDICTIVE

7.1 Philosophie de la commande prédictive

Grâce à ses propriétés intrinsèques et sa facilité de mise en œuvre, la commande prédictive se situe parmi les commandes avancées les plus utilisées dans le milieu industriel, si exigeant en termes de performances et de simplicité d'implémentation. De nombreuses applications industrielles existent, surtout pour des systèmes pour lesquels la trajectoire à suivre est connue à l'avance, comme des robots ou bras de robots, des machines-outils, des applications dans l'industrie pétrolière, biochimique ou chimique, aéronautique, thermique, l'industrie du ciment. Il est à noter cependant que, malgré des calculs hors-ligne simples caractéristiques de la commande prédictive sans contraintes, les structures d'asservissement à base de correcteurs PID s'avèrent encore les plus utilisées dans l'industrie, peut-être à cause de l'inertie des ingénieurs habitués à régler manuellement ce type de correcteur et à les maintenir.

S'éloignant quelque peu de la simplicité requise par le milieu industriel, et partant des stratégies de base initiales de la commande prédictive, le monde de la recherche propose désormais des structures encore plus évoluées, pour lesquelles, tout en conservant la simplicité des concepts, des outils mathématiques nouveaux spécifiques aux théories de la stabilité et de la robustesse, font leur apparition. Ces nouveaux domaines rigoureux et captivants ouvrent des perspectives toujours renouvelées pour la méthodologie prédictive. Après un bref historique non exhaustif de cette stratégie, les paragraphes suivants détaillent les grands principes communs à l'ensemble des méthodes.

7.2 Historique de la commande prédictive

Depuis la fin des années 70, de nombreuses catégories et dénominations de la commande prédictive ont été proposées. La liste ci-dessous propose un aperçu non exhaustif des plus classiques :

- MPHC (Model Predictive Heuristic Control) : Connue ensuite sous le nom de MAC (Model Algorithmic Control). Cette approche, appliquée aux systèmes industriels multi variables, basée sur des prédictions sur un horizon temporel long, impose des trajectoires de référence pour les sorties et minimise la variance de l'erreur ;
- DMC (Dynamic Matrix Control) : Proposée par Shell, utilise l'incrément de commande à la place de la commande dans le critère de performance pour un horizon fini de prédiction ; cet

algorithme est appliqué à des systèmes multi variables linéaires sans contraintes ; l'erreur de poursuite est minimisée en spécifiant le comportement futur des sorties ; les commandes optimales sont calculées par la méthode des moindres carrés ;

- EHAC (Extended Horizon Adaptive Control) : Stratégie de commande prédictive pour les systèmes mono-variables, utilise des modèles E/S pour maintenir la sortie future (calculée via la résolution d'une équation diophantienne) le plus près possible de la consigne pendant une période donnée au-delà du retard pur du système ;
- EPSAC (Extended Prediction Self-Adaptive Control): Introduit une commande constante pour un système non-linéaire (en linéarisant le système) et utilise un prédicteur sous-optimal à la place de la résolution de l'équation diophantienne ;
- GPC (Generalized Predictive Control) : Cette méthode la plus connue, basée sur un modèle de type CARIMA, introduit un horizon de prédiction sur la commande, agit conformément au principe de l'horizon fuyant et peut être appliquée aux systèmes à non minimum de phase, aux systèmes instables en boucle ouverte, aux systèmes avec retards purs variables ;
- PFC (Predictive Functional Control) : Est un algorithme prédictif simple, utilisé surtout pour des systèmes SISO industriels rapides et/ou non linéaires, s'avérant pratique pour l'ingénieur en permettant le réglage direct des paramètres (par exemple la constante de temps) associées au temps de montée; pour garder la simplicité, une manque de rigueur en performance et surtout dans la garantie des contraintes est associée avec cet algorithme ;
- CRHPC (Constrained Receding Horizon Predictive Control) : Propose de prendre en compte des contraintes terminales sous forme « égalité » sur la sortie sur un horizon fini au-delà de l'horizon de prédiction ;
- MPC (Model Predictive Control) : formulée dans l'espace d'état, utilise le formalisme de la représentation d'état pour faciliter l'analyse de la stabilité et de la robustesse.

En fait, toutes ces variantes de stratégies de commande prédictive sont aujourd'hui regroupées sous le terme générique MPC, illustrant ainsi le rôle fondamental du modèle. Par ailleurs, les dernières années ont été marquées par la mise en œuvre de lois de commande prédictives robustes.

7.3 Principe de la commande prédictive

La commande prédictive MPC représente un moyen relativement simple d'aborder une loi de commande dans le domaine temporel, et a démontré à travers de nombreuses applications ses qualités liées à la régulation des systèmes multi-variables, des systèmes instables, des systèmes à retard, des systèmes non-linéaires, des systèmes à non minimum de phase, des systèmes hybrides. Le principe « philosophique » de la commande prédictive est le suivant (Figure 6.1).

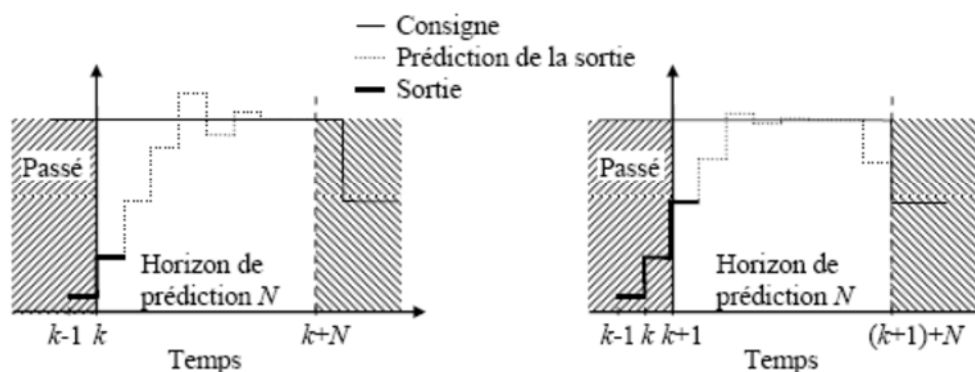


Figure 7.1 : Principe de fonctionnement de la commande prédictive :
Prédiction de la sortie à l'instant k sur un horizon fini (à gauche) ;
Réitération à l'instant suivant (à droite)

Un modèle discret du processus permet dans un premier temps de prédire la sortie du système sur un horizon fini. Puis, à chaque instant, en minimisant un critère de performance sur cet horizon fini, une séquence de commande est obtenue dont seul le premier élément est appliqué au système. La même procédure est enfin reprise à la période d'échantillonnage suivante, selon le principe de l'horizon fuyant. Le but est de maintenir la sortie du système la plus près possible de la référence désirée, supposée connue sur l'horizon fini de prédiction de façon à mettre en évidence un certain caractère anticipatif.

La technique prédictive permet en fait de reproduire de façon théorique le comportement intuitif naturellement prédictif ou anticipatif de l'être humain : en conduisant une voiture, en marchant, en faisant du ski, en respectant le budget alloué à certaines activités sur une période limitée, en traversant une rue... Ainsi, les skieurs font une prédiction de la trajectoire à suivre sur un horizon fini, et élaborent les actions qui vont leur permettre de la suivre, et puis à chaque étape l'horizon de prédiction glisse avec eux. En utilisant des commandes classiques, les décisions sont réalisées à partir des erreurs passées entre la sortie et la consigne, et non des erreurs prédites. Or il apparaît clairement dans le cas du ski que la structure prédictive faisant

intervenir des erreurs futures est fortement nécessaire, le cas contraire étant équivalent à skier en regardant à l'arrière pour réduire l'erreur entre la trajectoire désirée et la position réelle.

Les étapes spécifiques à toutes les lois de commande prédictive peuvent être classifiées comme suit :

- élaboration (choix) du modèle du système sur lequel est basée la prédiction de la sortie ;
- spécification de la trajectoire que doit suivre la sortie ;
- minimisation d'un critère quadratique à horizon fini élaborant une séquence de commandes futures ;
- application du premier élément de la séquence de commande au système et au modèle ;

Les deux dernières étapes sont répétées à chaque instant d'échantillonnage, conformément au principe de l'horizon fuyant.

Remarque

Pour les systèmes multi-variables, cet algorithme est appliqué simultanément à chaque sortie, il en résulte une commande différente pour chaque entrée du système.

7.4 Choix du modèle du processus

La loi de commande prédictive implique la connaissance du comportement futur du système prédit à l'aide d'un modèle du processus. Ainsi l'élément central de la commande MPC est le modèle du système. Ce point fort peut devenir aussi son point faible, selon la qualité du modèle. Trouver le bon modèle (le plus simple possible, mais malgré tout suffisamment significatif et adapté aux besoins, en offrant des prédictions suffisamment précises) implique une connaissance appropriée du système. Les modèles résultent souvent d'une phase d'identification, qui peut se faire en utilisant les lois de la physique, de la chimie ou encore de façon expérimentale en effectuant diverses expériences sur le système. Le modèle doit être capable de prédire le comportement du système en réponse à une sollicitation donnée. Des techniques existent également, qui utilisent un modèle variant dans le temps sur l'horizon de prédiction, d'autres conçues sur un modèle à base de techniques floues. Prendre en compte les parties non-linéaires des systèmes par une modélisation floue et commander de façon prédictive ce modèle peut conduire à une amélioration des performances. Grâce à la simplicité du modèle, corrélée avec la souplesse du correcteur prédictif, cette vision devient intéressante en milieu industriel.

Certes, les systèmes industriels sont rarement linéaires, mais dans la pratique la représentation choisie est souvent un modèle linéaire, induisant en l'absence de contraintes une structure linéaire de la loi de commande prédictive. Ainsi, de cette manière, l'optimisation et

l'analyse hors ligne du comportement en boucle fermée sont beaucoup plus faciles. En dernier lieu, si la modélisation linéaire s'avère insuffisante, une mise en œuvre via un modèle non-linéaire peut s'envisager. Ces modèles servant à la prédiction sont classiquement des modèles à temps discret, dès lors que la commande prédictive est plutôt implémentée sous forme discrète sur ordinateur. Malgré tout, des techniques de synthèse à temps continu existent.

En conclusion partant d'un modèle initial (qui n'est pas forcément le meilleur choix de modèle), après un premier essai de commande prédictive qui ne donne pas les résultats souhaités, rien n'empêche l'ingénieur de retoucher le modèle du système en vue de l'élaboration d'une nouvelle loi de commande prédictive.

7.5 Paramètres de réglage de la commande prédictive

Choisir le bon modèle du système et un correcteur MPC comme stratégie de commande ne résout pas encore le problème. Il reste à déterminer les paramètres de réglage spécifiques à la commande prédictive, qui interviennent généralement dans le critère de minimisation suivant.

$$J = \sum_{j=N_1}^{N_2} (r(k+j) - \hat{y}(k+j/k))^T \tilde{Q}_j (r(k+j) - \hat{y}(k+j/k)) + \sum_{j=1}^{N_u} (\Delta u(k+j-1))^T \tilde{R}_j (\Delta u(k+j-1)) \quad (7.1)$$

Ces paramètres sont en fait assez semblables d'une structure prédictive à une autre, se composant d'*horizons de prédiction et de pondérations*. Si l'on se base sur une stratégie prédictive de type GPC (sans doute la plus connue), ces paramètres de réglage sont les suivants

- les horizons inférieur N_1 et supérieur N_2 de prédiction sur la sortie ;
- l'horizon de prédiction sur la commande N_u ;
- les facteurs de pondérations sur l'erreur de poursuite \tilde{Q}_j et sur l'effort de commande \tilde{R}_j .

Dans le cas de la commande prédictive avec contraintes, il convient de régler également les horizons sur les contraintes. Le critère d'optimisation peut englober aussi des coûts terminaux qui doivent être bien choisis. Il faut noter que non seulement ces paramètres de réglage, mais aussi *la structure du critère quadratique*, jouent un rôle fondamental sur les performances de la commande résultante. Dans la pratique, *la période d'échantillonnage* a aussi un rôle essentiel.

Plusieurs stratégies de choix de ces paramètres existent. Ainsi, si l'on se réfère au cas GPC, on notera que pour un système à retard, *l'horizon inférieur de prédiction sur la sortie peut être choisi égal à la valeur du retard pur divisé par la période d'échantillonnage, pour les autres*

systemes il peut être égal à 1. L'horizon supérieur de prédiction sur la sortie peut être choisi approximativement égal au temps de réponse du processus divisé par la période d'échantillonnage. Si N_2 augmente, les performances nominales en boucle fermée sont améliorées si toutefois N_u est suffisamment grand (ceci est nécessaire pour un bon conditionnement). Pourtant dans la pratique, pour beaucoup de systèmes, on constate qu'une valeur de N_u supérieure à 3 n'apporte pas de différences significatives. Une autre règle générale est de choisir $N_2 - N_u$ supérieur au temps de réponse. L'horizon de prédiction sur la commande doit être augmenté en fonction de la complexité du système à piloter. Pour les systèmes stables simples (SISO), N_u peut être choisi égal à 1, parce que dans ce cas le comportement du système en boucle fermée suit le comportement du système en boucle ouverte, en restant stable. Pour les systèmes instables, N_u doit être choisi (strictement) supérieur au nombre des pôles instables.

Généralement la pondération sur l'erreur de poursuite \tilde{Q}_J est considérée comme unitaire, dans ce cas seule la pondération sur l'effort de commande \tilde{R}_J intervient et est choisie conformément au critère suivant : l'augmentation de \tilde{R}_J conduit à une réponse plus lente du système bouclé avec le correcteur. Pour les systèmes multi-variables, les pondérations \tilde{Q}_J et \tilde{R}_J jouent un rôle très important sur le dépassement et sur la largeur relative de la bande passante. Ces matrices sont utilisées en vue de moduler la pondération relative entre les différentes voies d'un modèle MIMO. Une normalisation de l'erreur de poursuite par rapport à l'effort de commande s'impose en vue de donner un sens physique au choix des pondérations. Une bonne sélection de ces pondérations pour le cas MIMO peut s'avérer relativement longue.

Notons enfin que dans le cas des lois de commande prédictives adaptatives, pour lesquelles il est nécessaire d'estimer le modèle du système en ligne à chaque période d'échantillonnage, les paramètres de réglage de la commande MPC adaptative peuvent éventuellement rester les mêmes dès lors que le système varie lentement au cours du temps.

Remarque : Dans le cas de la commande prédictive multi-variable, les mêmes horizons de prédiction sur toutes les sorties, ainsi que les mêmes horizons de commande sont généralement choisis, sauf si le comportement du système est vraiment très différent sur chaque voie entrée/sortie.

CHAPITRE 8

COMMANDE PREDICTIVE GENERALISEE (GPC)

8.1 Introduction

La commande GPC nécessite un modèle numérique de représentation pour son fonctionnement. Il peut être obtenu par la discrétisation du système continu (utilisant la transformée en z avec le BOZ) et de choisir un modèle pour l'identification préalable.

Cette technique de commande comprend, plusieurs approches qui sont identiques par rapport au principe général de base de la commande GPC :

- ✓ Approche algorithmique.
- ✓ Approche polynomiale synthèse RST.
- ✓ Recherche Automatique des paramètres.
- ✓ Extension en structure cascade multi échantillonnée et en δ .
- ✓ Approche sous contraintes terminales.
- ✓ Approche multi-variable.

De l'ensemble des techniques proposées ci-dessus. La structure cascade garantit la rejection des perturbations, la commande prédictive permet quant à elle de prendre en compte la connaissance de la trajectoire future. L'auto calibrage, permettant la recherche automatique des paramètres de réglage, est le garant de l'implantation réelle et effective de ce type de commande dans un secteur industriel. Cela montre que toutes les méthodes prédictives sont simples et efficaces en milieu industriel.

Concernant, l'approche polynomiale synthèse RST sera exposée en détaille plus loin puisque c'est la technique utilisée dans notre travail. Dans le cas des autres stratégies.

8.2 Principe de la commande prédictive approche polynomiale (RST)

Parmi toutes les méthodes prédictives reprenant bien sûr les principes exposés précédemment, la Commande Prédictive Généralisée est peut-être celle qui a connu le plus grand nombre d'applications et qui demeure une référence dans le cas de la commande prédictive des systèmes monovariabiles. C'est pourquoi ce paragraphe propose une description des idées principales de cette stratégie. Il s'agit ici de reprendre tous les points fondamentaux de l'algorithme GPC pour aboutir aux trois polynômes RST du régulateur équivalent.

8.2.1 Modèle de représentation du procédé et calcul du prédicteur

La commande GPC se différencie des autres algorithmes prédictifs par deux caractéristiques majeures. Même si toute représentation demeure admissible, elle utilise le plus souvent pour la prédiction du comportement un modèle entrée/sortie par fonction de transfert de type CARIMA (Controlled Auto-regressive Integrated Moving Average).

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k-1) + C(q^{-1})\frac{\varepsilon(k)}{\Delta(q^{-1})} \quad (8.1)$$

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{n_a}q^{-n_a}$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_{n_b}q^{-n_b}$$

$$\Delta(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$$

Ce modèle est un modèle incrémental, où u , y représentent l'entrée et la sortie du système à commander, ε est un signal aléatoire centré non corrélé avec l'entrée, A et B sont des polynômes en l'opérateur de retard q^{-1} de degrés n_a et n_b respectivement, et $\Delta(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$ est l'opérateur différence, $C(q^{-1})$ est un polynôme en l'opérateur retard, lié aux perturbations et par la suite, sans une connaissance supplémentaire sur la nature des perturbations, il sera choisi égal à 1 (sa valeur n'influe pas par ailleurs sur le comportement en suivi de trajectoire, il peut jouer un rôle en rejet de perturbation).

8.2.2 Critère de performance

Le critère de performance est représenté par une fonction de coût quadratique considérant l'erreur de poursuite et l'effort de commande sur un horizon glissant de la forme :

$$J(N_1, N_2, N_u) = \sum_{j=N_1}^{N_2} [r(k+j) - \hat{y}(k+j/k)]^2 + \lambda \sum_{j=1}^{N_u} [\Delta u(k+j-1)]^2 \quad (8.2)$$

Où $\hat{y}(k+j/k)$ représente la prédiction optimale à l'instant $k+j$ connaissant les paramètres de contexte à l'instant présent k , N_1, N_2 caractérisent le début et la fin de la fenêtre de prédiction sur la sortie, N_u est l'horizon de prédiction sur la commande, $\lambda > 0$ un facteur de pondération sur l'effort de commande et enfin r est la consigne à suivre supposée connue sur l'horizon de prédiction.

Remarque : En règle générale, l'horizon de prédiction sur la sortie est supérieur à l'horizon de commande et pour la cohérence de la prédiction il est supposé qu'à la fin de l'horizon de commande :

$$\Delta u(k+j) = 0, \quad j \geq N_u \quad (7.3)$$

Remarque : Le modèle CARIMA fait intervenir les incréments de commande et non la commande effective. Cet aspect permet d'imposer au final une action intégrale au sein du régulateur et assure par conséquent une erreur statique nulle pour des consignes et perturbations constantes. L'aspect incrémental du modèle se retrouve aussi dans le critère par la présence de Δu . En se basant sur le modèle mentionné en (8.2) et en appliquant les idées de modélisation présentées par Clark et ses coauteurs, un prédicteur p optimal peut être construit sous la forme :

$$y(k + j/k) = \underbrace{F_j(q^{-1})y(k) + H_j(q^{-1})\Delta u(k - 1)}_{\text{réponse libre}} + \underbrace{G_j(q^{-1})\Delta u(k + j - 1) + J_j(q^{-1})\varepsilon(k + j)}_{\text{réponse forcée}} \quad (8.4)$$

Avec F_j, G_j, H_j, J_j polynômes solutions uniques des équations diophantiennes suivantes :

$$\begin{cases} \Delta(q^{-1})A(q^{-1})J_j(q^{-1}) + q^{-j}F_j(q^{-1}) = 1 \\ G_j(q^{-1}) + q^{-j}H_j(q^{-1}) = B(q^{-1})J_j(q^{-1}) \end{cases} \quad (8.5)$$

$$\deg(J_j(q^{-1})) = j - 1, \quad \deg(F_j(q^{-1})) = \deg(A(q^{-1})),$$

$$\deg(G_j(q^{-1})) = j - 1, \quad \deg(H_j(q^{-1})) = \deg(B(q^{-1})) - 1$$

Le prédicteur optimal déduit de la considération que la meilleure estimée du signal perturbateur dans le futur est égale à sa moyenne, nulle ici, prend la forme :

$$\hat{y}(k + j/k) = \underbrace{F_j(q^{-1})y(k) + H_j(q^{-1})\Delta u(k - 1)}_{\text{réponse libre}} + \underbrace{G_j(q^{-1})\Delta u(k + j - 1)}_{\text{réponse forcée}} \quad (8.6)$$

8.2.3 Synthèse de régulateur RST

La minimisation du critère se base sur la mise sous forme matricielle de l'équation de prédiction (8.6)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}} &= G\tilde{\mathbf{u}} + ify(k) + ih\Delta u(k - 1) \\ J &= (G\tilde{\mathbf{u}} + ify(k) + ih\Delta u(k - 1) - r)^T (G\tilde{\mathbf{u}} + ify(k) + ih\Delta u(k - 1) - r) + \lambda \tilde{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{u}} \\ ih &= [H_{N_1}(q^{-1}), \dots, H_{N_2}(q^{-1})]^T; \quad if = [F_{N_1}(q^{-1}), \dots, F_{N_2}(q^{-1})]^T \\ \tilde{\mathbf{u}}^T &= [\Delta u(k), \dots, \Delta u(k + N_u - 1)]^T \end{aligned} \quad (8.7)$$

De façon similaire, la réponse forcée peut être réécrite sous forme matricielle :

$$G = \begin{bmatrix} g_{N_1}^{N_1} & g_{N_1-1}^{N_1} & \dots & 0 \\ g_{N_1+1}^{N_1+1} & g_{N_1}^{N_1+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & 0 \\ g_{N_2}^{N_2} & g_{N_2-1}^{N_2} & \dots & g_{N_2-N_u+1}^{N_2} \end{bmatrix}, g_0 = 0 \quad (8.8)$$

Avec les coefficients g_i^j issus des polynômes G_j correspondant à ceux de la réponse indicielle du modèle.

La minimisation analytique du critère conduit à la séquence optimale de commande future :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{opt} &= M[r - ify(k) - ih \Delta u(k-1)] \\ M &= (G^T G + \lambda I_{N_u \times N_u})^{-1} G^T = [m_1^T, \dots, m_{N_u}^T]^T \end{aligned}$$

Qui constitue en fait un régulateur linéaire représentable sous forme polynomiale RST Avec :

$$S(q^{-1})\Delta u(k) = -R(q^{-1})y(k) + T(q)r(k) \quad (8.9)$$

$$S(q^{-1}) = (1 + m_1 if q^{-1})$$

avec $\text{degré}[S(q^{-1})] = \text{degré}[B(q^{-1})]$

$$R(q^{-1}) = m_1 if$$

$$\text{degré}[R(q^{-1})] = \text{degré}[A(q^{-1})]$$

$$T(q) = m_1 [q^{N_1} \dots q^{N_2}]^T$$

$$\text{degré}[T(q)] = N_2$$

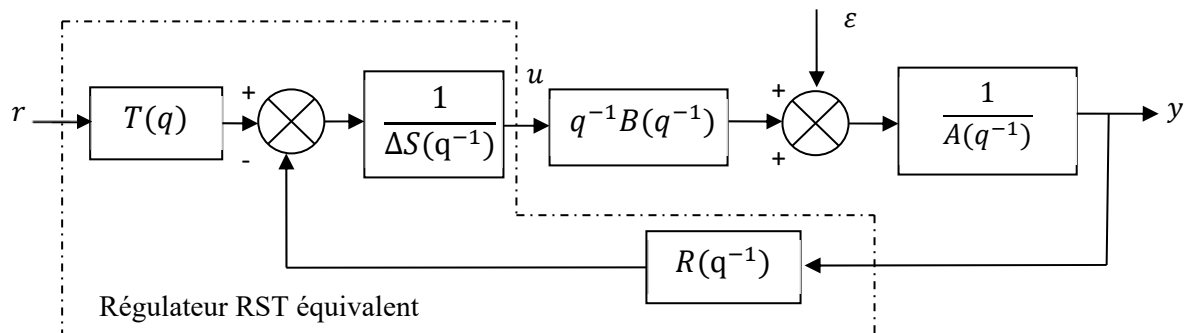


Figure 8.1: Régulateur polynomial équivalent

8.2.3.1 Les avantages

- Tout d'abord, l'utilisation du modèle CARIMA et le travail sur les incréments de commande assure la précision statique pour une consigne en échelon.

- Ensuite, le non nécessité d'utiliser une représentation d'état lors de l'implantation du modèle du système, ce qui s'avère intéressant lorsque les modèles proviennent d'une identification discrète sous forme de fonction de transfert discrète.
- En fin, la relation fournissant la commande se traduit par un algorithme simple, et beaucoup de calculs peuvent être fait hors ligne ou il ne reste à faire en temps réel que l'acquisition de la sortie du processus et le calcul proprement dit de la commande, incluant néanmoins l'élaboration de la réponse libre.

8.2.3.2 Les inconvénients

- Tout d'abord, il n'existe aucune théorie précise permettant de démontrer la stabilité de la commande, à l'exception de travaux de Clarke assurant la robustesse sous certaines conditions de réglage très restrictives.
- De plus, il n'y a pas de règles définies permettant de choisir les paramètres, sauf quelques compromis entre les différentes caractéristiques déduit par expérience dans le domaine.

8.3 Conclusion

Les différentes techniques citées précédemment ont vraiment un intérêt considérable, mais dans la pratique le modèle dont elles sont basées est toujours non idéal. Surtout lorsqu'il s'agit des systèmes non linéaire et variant dans le temps. On est toujours amené à approcher la dynamique du processus à commander par un modèle paramétrique linéaire et stationnaire dans un domaine plus au moins restreint autour de son point de fonctionnement.

La solution alors est le concept de commande adaptative qui permet d'éliminer l'effet de perturbations, sur la dynamique du processus, qui affectent les performances alors que la commande linéaire ne permet d'éliminer que les perturbations d'état du processus. Dans notre cas, on va exploiter le principe de la commande prédictive pour, le calcul de la loi de commande et l'adaptation dans le but d'éliminer les bruits. Ceci nous conduit à la commande adaptative GPC que son schéma synoptique est illustré par la figure 7.2.

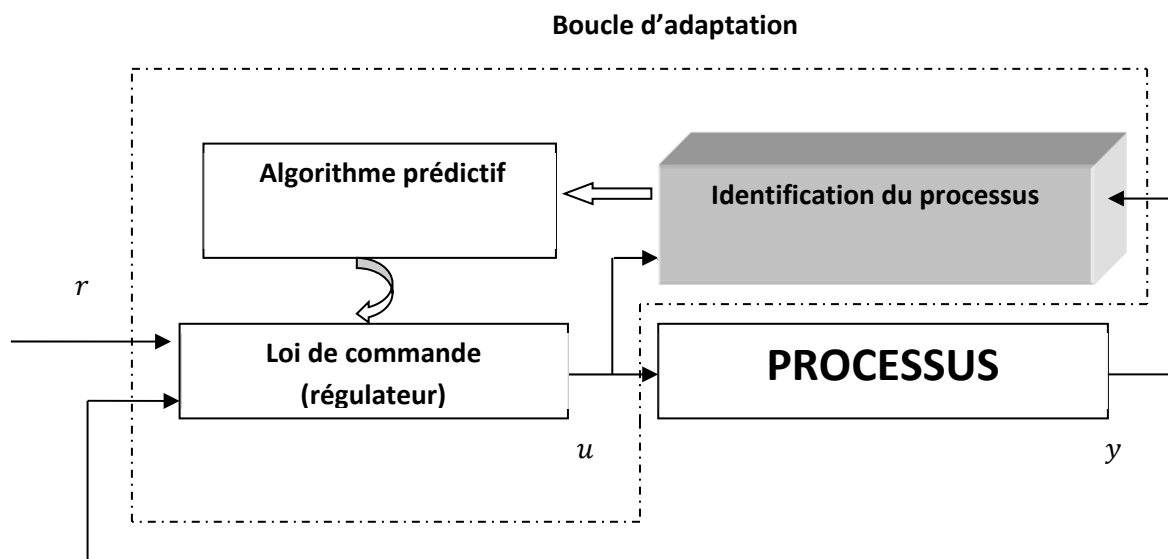


Figure 8.2: Commande GPC adaptative.

Références bibliographiques

- 1- L. L Frank, V. Dragune and L.S. Vassills. Optimal control. John Wiley & Sons. 2012
- 2- B.D O Anderson and J. B. Moore. Linear optimal control. Englewood Cliffs. NJ Prentice-Hall. 1971
- 3- I. D. Landau Identification et commande des systèmes, Hermès, 1993.
- 4- K. J. Astrom and B. Wittenmark, Adaptive control., Dover, 2008.
- 5- I. D. Landau, R. Lozano, M. M'Saad, and A. Karimi, Adaptive control. Springer , 2011.
- 6- V. V. Chalam, Adaptive control systems: Techniques and applications. Marcel Dekker, 1987
- 7- P. Boucher and D. Dumur, La commande prédictive, Technip, 1996.
- 8- J. A. Rossiter, Model-Based Predictive Control: A Practical Approach, CRC Press, 2003
- 9- J. M. Maciejowski, Predictive Control: With Constraints, Prentice Hall, 2002
- 10- E. F. Camacho, C. B. Alba, Model predictive control. Springer, 2013
- 11- D. Alazard, et al. Robustesse et commande optimale. Editions Cépaduès (2000)
- 12- Daniel Liberzon. Calculus of Variations and Optimal Control Theory: A Concise Introduction. Princeton University Press, 2012.
- 13- Kemin Zhou, John C. Doyle, Keith Glover . Robust and Optimal Control. Prentice Hall, 1995.
- 14- Hence P. Geering. Optimal control with engineering application. Springer, 2007.
- 15- Joao P. Hespanha. Undergraduate lectures notes on LQG LQR controller design. 2007.
- 16- E. Godoy & E. Ostertag. Commande numérique des systèmes : approches fréquentielle et polynomiale. Ellipses, 2003.