

Auto 1 + 02 + 03 Into 2 ~~Relat 02~~ OK

① $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y \geq 0, z \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

$I = \iiint_V yz \, dx \, dy \, dz$ (2,5)

② $I = \int_1^{+\infty} \frac{x^3 + 1}{x^2} e^{1-x^2} \, dx$ Au dix pour Auto 1 (0,25)

③ $u_n = \frac{2}{3^n}$ (0,25)

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx$

~~$\pm \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$~~

Tel 01 (0,25)

$I = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t^5} \, dt$ (PS = 5)

la fct $t \rightarrow \frac{e^t - 1}{t^5}$ continue et positive sur $]0, 1]$.

$e^t - 1 \sim_0 t$

$\frac{e^t - 1}{t^5} \sim_0 \frac{1}{t^4}$

$\int_0^1 \frac{1}{t^4} \, dt$ Div (Riemann, $\lambda = 4 \neq 1$)

d'après le critère d'équivalence

$\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t^5} \, dt$ Diverge.

(1)

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \cos \varphi \\ z = r \sin \varphi \end{cases} \quad |J| = r^2 \sin \varphi$$

$$\Delta = \{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq 1; 0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$$

$$I = \iiint_{\Delta} r \sin \theta \cos \varphi \cdot r \sin \varphi \cdot r^2 \sin \varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \int_0^1 r^4 \, dr \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi$$

$$= \left[\frac{1}{5} r^5 \right]_0^1 \times \left[-\cos \theta \right]_0^\pi \times \left[-\frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\frac{1}{5} \right] \times [2] \times [0] = 0$$

(2) $I = \int_1^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^2} e^{1-x^2} \, dx$

La fct $x \mapsto \frac{x^3+1}{x^2} e^{1-x^2}$ continue et positive sur $[1; +\infty[$

$$\frac{x^3+1}{x^2} \sim_{+\infty} x$$

$$\frac{x^3+1}{x^2} e^{1-x^2} \sim_{+\infty} x e^{1-x^2}$$

$$\int_1^{+\infty} x e^{1-x^2} \, dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x t e^{1-t^2} \, dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} \int_1^x -2t e^{1-t^2} \, dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} \left[e^{1-t^2} \right]_1^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} e^{1-x^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

CV

d'après le critère d'équivalence $\int_1^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^2} e^{1-x^2} \, dx$ converge.

(3)

$$u_n = \frac{2}{3^n}$$

$$= \frac{2}{2^n \times 3^n}$$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$\sum u_n$ CV car est une série géométrique de raison $q = \frac{1}{6}$ ($-1 < \frac{1}{6} < 1$)