Tel 01 + 0 2 ~~Auto 01 + 02 + 03~~

1

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases} \quad |J| = r^2\cos\varphi.$$

$\Delta = \{(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 / \ 0 \le r \le 1, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\}.$

$I = \iint$

$$I = \iiint_\Delta r\cos\theta\cos\varphi \times r\sin\varphi \times r^2\cos\varphi \, dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \int_0^1 r^4 dr \times \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi$$

$$= \left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^1 \times \left[\sin\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \times \left[-\frac{1}{3}\cos^3\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\frac{1}{5}\right] \times [2] \times \left[\frac{1}{3}\right] = \frac{2}{15}$$

2

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{x+3}{x^2+\sin(\frac{1}{x})}\, dx.$$

La fct $x \mapsto \frac{x+3}{x^2+\sin(\frac{1}{x})}$ contine et positive sur $[2, +\infty[$.

$$-1 \le \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le 1$$

$$x^2 - 1 \le x^2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le x^2+1$$

$$\frac{1}{x^2+1} \le \frac{1}{x^2+\sin(\frac{1}{x})} \le \frac{1}{x^2-1}$$

$$\frac{x+3}{x^2+1} \le \frac{x+3}{x^2+\sin(\frac{1}{x})} \le \frac{x+3}{x^2-1}$$

on a: $\frac{x+3}{x^2+1} \le \frac{x+3}{x^2+\sin(\frac{1}{x})}$

$$\frac{x+3}{x^2+1} \sim_{+\infty} \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$ Div

(Rieman pour $q=1$)

D'après l'équivalence

$$\int_2^{+\infty} \frac{x+3}{x^2+1}\, dx \text{ Div}$$

D'après la comparaison

$$\int_2^{+\infty} \frac{x+3}{x^2+\sin(\frac{1}{x})}\, dx \text{ Div}$$

3

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim\left(\left(2+\frac{1}{n^2}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{n^2}\right)^2$$

$$= 4 > 1.$$

D'après Cauchy, la série $\sum u_n$ Div.

~~Tel01+02~~ INT02 ~~Autre+02+03~~ OK

① $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, \ z \geq 0 \text{ et } x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$

$$I = \iiint_V xz \, dx\,dy\,dz$$

② $I = \int_1^{+\infty} \frac{x+3}{x^2+\sin(\frac{1}{x})} dx$

③ $u_n = \left(2 + \frac{1}{n^2}\right)^{2n}$.

Au choix

Autre 1

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx.$$

la fct $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$, continue et positive

sur $[1; +\infty[$.

$$\sqrt{x^2+1} \geq x.$$

$$x\sqrt{x^2+1} \geq x^2$$

$$\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} \leq \frac{1}{x^2}$$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ cv (Riemann pour $\alpha = 2 > 1$)

D'après le critère de comparaison

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx$ converge.