

OK

INT 001 :

① $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0 \text{ et } z \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

calculer $I = \iiint_V \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy dz$.

② Déterminer la nature de l'intégrale impropre suivante : $\int_1^e \frac{x^2 + 1}{\ln x} dx$.

③ Déterminer la nature de la série numérique suivante :

$$u_n = \frac{e^{-n^2}}{n^2 + 3}$$

①

Tel03 + ELNo2

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad |f| = r$$

$$\Delta = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq r \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq \sqrt{1-r^2}\}$$

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Delta} \frac{3}{r} x r \sqrt{1-r^2} dr d\theta dz \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-r^2}} 3 dz \right] dr \times \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-r^2) dr \times \left[\theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} \left[r - \frac{1}{3} r^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad \int_1^2 \frac{x^2+1}{\ln x} dx \quad (PS=1)$$

La fct $x \mapsto \frac{x^2+1}{\ln x}$ continue et positive sur $]1, 2]$

$$\ln x \sim_1 x-1.$$

$$\frac{x^2+1}{\ln x} \sim_1 \frac{x^2+1}{x-1} = x+1 + \frac{2}{x-1}$$

$$\int_1^2 \left(x+1 + \frac{2}{x-1} \right) dx = \lim_{x \rightarrow 1} \int_x^2 \left(t+1 + \frac{2}{t-1} \right) dt.$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[4 - \frac{1}{2} x^2 - x - 2 \ln(x-1) \right] = -\infty \quad \text{div}$$

D'après le critère de comparaison équivalence

$$\int_1^2 \frac{x^2+1}{\ln x} dx \quad \text{div}$$

①

③

$$-n^2 \leq 0$$

$$e^{-n^2} \leq 1$$

$$\frac{e^{-n^2}}{n^2+3} \leq \frac{1}{n^2+3}$$

$$\frac{1}{n^2+3} \sim_{+ \infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\leq \frac{1}{n^2} \text{ CV (Riemann pour } \alpha = 2 > 1)$$

Alors d'après le critère de comparaison

$$\sum \frac{e^{-n^2}}{n^2+3} \text{ CV}$$

②